Математические методы анализа адекватности моделей сложных технических объектов*

А. А. Ахрем

В статье исследуются математические методы анализа адекватности различных классов моделей сложных технических систем. Получены достаточные условия адекватности моделей из множеств линейных алгебраических и динамических систем, оптимизационных моделей выбора максимальных вариантов технических систем, конечно-разностных моделей динамических дифференциальных систем.

1. Введение

Невозможно представить себе современное развитие науки и техники без широкого применения методов математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его аналогом — математической моделью — и оперированию ею с целью получения сведений об этом объекте при помощи реализуемых на компьютерах программно — алгоритмических средств. Альтернативой математического моделирования является физическое макетирование, но у математического моделирования есть ряд преимуществ: меньше сроки на подготовку анализа; значительно меньшая материалоемкость, особенно при проектировании сложных крупногабаритных технических объектов; возможность выполнения экспериментов на критических режимах, которые привели бы к разрушению физического макета. Еще одним важным преимуществом модельно-компьютерного способа решения физических проблем и проблем управления техническими объектами заключается в гораздо более низкой стоимости в целом компьютерных вычислений по сравнению с затратами на реализацию физических процессов.

Заметим, однако, что воспользоваться преимуществами электронной формы имитации технических процессов можно лишь при условии адекватного отображения физической реальности в математических

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (Проект № 2.44)

и компьютерных моделях. Под адекватностью таких моделей мы, следуя [1–14], понимаем прежде всего:

а) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод об асимптотическом поведении основных характеристик изучаемого объекта, о наличии и характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния и т. п.;

б) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

Другими словами, адекватность математической модели — это способность отображать заданные свойства изучаемого сложного технического объекта с погрешностью не выше заданной. Подчеркнем, что адекватность следует рассматривать только по определенным признакам — свойствам, применяемым в данном исследовании за основные. Если они явно не указаны, то должны подразумеваться либо уточняться по ходу исследования.

В настоящей работе будут рассмотрены методы анализа адекватности математических моделей из множеств линейных алгебраических систем, оптимизационных моделей выбора максимальных вариантов сложных технических систем по бинарному отношению их сравнительной эффективности, линейных и квазилинейных дифференциальных моделей сложных технических систем, а также конечноразностных моделей динамических дифференциальных систем.

2. Адекватность математических моделей из класса линейных многомерных систем алгебраических уравнений

Во многих задачах оптимизации важную роль играет решение системы совместных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A — невырожденная квадратная матрица размерности n $(n \geqslant 2)$; x, b — n-мерные вектор-столбцы:

$$x \equiv \text{col.}(x_1, \ldots, x_n); \quad b \equiv \text{col.}(b_1, \ldots, b_n).$$

При работе с матрицами линейных алгебраических систем типа (1), например, при численном решении системы (1), вычислении определителя матрицы A, обращении A и т. д., часто по матрице A можно заранее предсказать ожидающие нас неприятности. Это делается посредством нахождения числа обусловленности матрицы A. Напомним (см., например, [15–18]), что если $\| \ \|$ — произвольная норма n-мерного вещественного евклидова пространства R^n, то в пространстве $(n \times n)$ — матриц с вещественными коэффициентами M_n возникает следующая норма:

$$\|A\| \equiv \sup \|Ax\| = \sup \|Ax\| \cdot (\|x\|)^{-1}, \quad \|x\| \leqslant 1, \quad \|x\| \neq 0. \tag{2}$$

Определение 1. Пусть A — невырожденная $(n \times n)$ — матрица, $\| \ \|$ — норма в M_n, порожденная некоторой нормой $\| \ \|$ пространства R^n и вычисляемая по формуле (2).

Числом обусловленности $\operatorname{cond} A$ матрицы A называется величина

$$\operatorname{cond} A \equiv \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Роль числа обусловленности матрицы A устанавливает следующее утверждение [15–18]

Утверждение 1.

1. *Число обусловленности* $\operatorname{cond} A$ *удовлетворяет неравенству* $\operatorname{cond} A \geqslant 1$.
2. *Пусть A — невырожденная квадратная матрица размерности n. Пусть, далее, x — решение уравнения*

$$Ax = b \tag{3}$$

с ненулевой правой частью b; x^1 — решение уравнения

$$Ax' = b' \tag{4}$$

с возмущенной правой частью b^1.

Тогда для систем (3), (4) *справедливо следующее соотношение*

$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leqslant \operatorname{cond} A \cdot \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}, \tag{5}$$

причем при подобающем выборе векторов b, b', $b \neq b'$ в этом соотношении может достигаться знак равенства.

3. *Пусть A и $\overline{A}$ — невырожденные квадратные $(n \times n)$ — матрицы и x, $\overline{x}$ — решения соответственно линейных систем алгебраических уравнений*

$$Ax = b, \quad \overline{A}\overline{x} = b.$$

Тогда для решений x, $\overline{x}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leqslant \operatorname{cond} A \cdot \frac{\|A - \overline{A}\|}{\|A\|}. \tag{6}$$

Отметим, что из неравенств (5), (6) следует, что при решении линейной системы алгебраических уравнений типа (1), а значит и при вычислении определителей, обращении матриц и т. д., надо стремиться работать с матрицами, для которых число обусловленности $\operatorname{cond} A$ как можно ближе к 1, поскольку тогда любая ошибка в задании правой части или матрицы системы A (например, в следствие округления числа) не приведет к большой ошибке в решении и такие системы уравнений вида (1) можно считать адекватными.

Приведем теперь пример линейной системы вида (1) с плохо обусловленной матрицей коэффициентов A. Следуя [15], рассмотрим двумерную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}9x_2 = 1{,}9; \\ 0{,}9x_1 + 0{,}8x_2 = 1{,}7 \end{cases} \tag{7}$$

с двумерной матрицей коэффициентов A_2, равной

$$A_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}8 \end{pmatrix} \tag{8}$$

система (7) имеет следующее решение

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь возмущенную систему вида

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}9x_2 = 1{,}902; \\ 0{,}9x_1 + 0{,}8x_2 = 1{,}724. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) имеет решение

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1{,}22. \tag{11}$$

Изменение Δb правой части системы (7)–(8) равно

$$\Delta b = \operatorname{col}(0{,}002, 0{,}024). \tag{12}$$

Изменение решения (9) системы (7) Δb равно

$$\Delta x = \operatorname{col}(2, -2{,}22). \tag{13}$$

Используя (12), (13), находим что изменение

$$\frac{||\Delta b||}{||b||} = 0{,}00944$$

вызвало изменение

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = 2{,}102.$$

Таким образом, коэффициент усиления равен

$$2{,}102 \cdot (0{,}00944)^{-1} = 222{,}7.$$

Число обусловленности $\operatorname{cond} A_2$ матрицы A_2 в этом примере равно [15]

$$\operatorname{cond} A_2 = 328{,}6 \gg 1. \tag{14}$$

Соотношение (14) показывает, что матрица A_2 линейной системы (7) является плохо обусловленной, и, следовательно модель (7)–(8) не может считаться адекватной.

3. Адекватность оптимизационных моделей проектирования сложных технических систем

Анализ известной литературы по теории проектирования сложных технических систем (см., например, [1–12] и имеющуюся там библиографию) показывает, что многие задачи проектирования и разработки таких систем могут быть формализованы в виде следующей оптимизационной модели выбора: выделить ядро максимальных элементов

$$\operatorname{Max}(X, R) \tag{15}$$

модели проектирования (X, R), где X — множество альтернативных вариантов проектируемой технической системы; R — бинарное отношение сравнительной эффективности вариантов из множества X;

$$\operatorname{Max}(X, R) = \begin{cases} y \in X \mid \neg\exists\, x \in X : (x, y) \in R, \\ \quad \text{если отношение } R \text{ асимметрично;} \\ y \in X \mid [(x, y)] \in R \Rightarrow [(y, x) \in R], \\ \quad \text{если отношение } R \text{ антисимметрично} \end{cases}$$

($\neg$ — знак логического отрицания).

Отметим, что бинарное отношение R на множестве X задается, как правило, через решение сложных оптимизационных задач математического программирования. Для его задания используются также эксперименты на имитационных моделях функционирования проектируемой технической системы и неформальные эвристические процедуры. Поэтому в реальном процессе проектирования, включающем компьютерную модельную проработку альтернативных вариантов проектируемой системы, исходная модель выбора (15) заменяется более простой приближенной моделью выбора

$$\operatorname{Max}(Y, L),$$

где Y — множество приближенных аналогов вариантов проектируемой технической системы; L — бинарное отношение сравнительной эффективности аналогов, заданное на множестве Y; $Y = F(X)$, $F : X \to Y$ — фиксированное отображение (морфизм), для расчета которой имеются достаточно «быстрые», апробированные компьютерные методы и алгоритмы решения. Заметим, что при таких преобразованиях (морфизмах) оптимизационных моделей проектирования типа (15) желательно сохранить их наиболее важные характеристические свойства. Среди таких свойств, помимо уже упоминавшегося свойства максимальности альтернативных вариантов проектируемой системы, можно выделить также свойство внешней устойчивости подмножеств модели выбора (15). Напомним (см., например, [19, 20]), что подмножество $X_0 \subseteq X$ называется внешне устойчивым в модели (X, R), если для любого $x \in X \backslash X_0$ найдется элемент $x_0 \in X_0$ такой, что $x_0 R x$.

Важность свойства внешней устойчивости подмножеств модели вида (15) подтверждается, например, следующим фактом.

Утверждение 2. *Пусть бинарное отношение сравнительной эффективности R является асимметричным или антисимметричным. Тогда любой вариант $x \in X$, не попавший в некоторое внешне устойчивое подмножество $X_0 \subseteq X$, не может быть максимальным элементом модели проектирования (X, R).*

Доказательство.

1. Рассмотрим сначала случай, когда отношение R является асимметричным. В силу внешней устойчивости подмножества X_0 найдется вариант $x_0 \in X_0$, для которого

$$x_0 R x. \tag{16}$$

В силу (16) и асимметричности отношения R имеем

$$x \overline{R} x_0$$

(где $\overline{R}$ — дополнение бинарного отношения R), т. е., $x \notin \mathrm{Max}(X, R)$, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь случай, когда отношение R является антисимметричным. Предположим противное: пусть существует вариант x из подмножества $X \backslash X_0$, принадлежащий ядру $\mathrm{Max}(X, R)$. Ввиду внешней устойчивости множества X_0 существует такой элемент $x_0 \in X_0$, что

$$x_0 \neq x; \tag{17}$$

$$x_0 R x. \tag{18}$$

Принимая во внимание (18), максимальность x и антисимметричность R, находим, что $x_0 = x$, а это противоречит соотношению (17).

Полученное противоречие показывает, что для всякого элемента x из множества $X \backslash X_0$ выполнено следующее соотношение

$$x \notin \mathrm{Max}(X, R). \qquad \square$$

Утверждение 2 в случае, когда отношение R является антисимметричным доказано. Тем самым утверждение 2 доказано полностью.

Таким образом, в условиях утверждения 2 все максимальные варианты модели проектирования (X, R) находятся среди элементов внешне устойчивых подмножеств этой модели.

В следующих двух разделах настоящей работы для специальных классов моделей проектирования типа (15) и морфизмов F будут получены критерии сохранения свойств внешней устойчивости и максимальности подмножеств этих моделей при их морфизмах.

3.1. Достаточные условия сохранения свойства внешней устойчивости подмножеств оптимизационных моделей проектирования сложных технических систем

Для формировки и доказательства основных результатов данного параграфа нам потребуется ряд понятий из общей теории выбора и принятия решений [6, 19, 20].

Определение 1. Пусть заданы две модели выбора по бинарным отношениям (X, R), (Y, L) и отображения $F : X \to Y$. Отношение R называется F-согласованным с отношением L, если для всяких y_1, $y_2 \in Y$ таких, что $y_1 L y_2$ и всякого $x_2 \in F^{-1}(y_2)$ найдется элемент $x_1 \in F^{-1}(y_1)$, удовлетворяющий условию $x_1 R x_2$.

Введем также следующее

Определение 2. Отображение $F : X \to Y$ сохраняет свойство внешней устойчивости подмножеств моделей выбора по бинарным отношениям (X, R), (Y, L), если для любого внешне устойчивого подмножества $X_0 \subseteq X$ выполнено: $F(X_0)$ — внешне устойчиво в модели (Y, L).

Имеет место

Теорема 1. *Для моделей проектирования (X, R), (Y, L) справедливы следующие утверждения.*

1. *Допустим, что отображение $F : X \to Y$ сюръективно и удовлетворяет условию гомоморфизма. Тогда оно сохраняет свойство внешней устойчивости подмножеств моделей проектирования.*
2. *Пусть отображение $F : X \to Y$ сюръективно, а бинарное отношение R F-согласовано с бинарным отношением L. Тогда множественно-множественное отображение $F^{-1} : 2^y \to 2^x$ (где 2^y, 2^x — булеаны*

соответственно множеств Y, X) сохраняет свойство внешней устойчивости подмножеств, т. е. для любого внешне устойчивого подмножества Y_0 модели (Y, L) выполнено: $F^{-1}(Y_0)$ внешне устойчиво в модели (X, R).

Доказательство.

Докажем вначале утверждение 1 теоремы 1. Пусть y_0 — произвольный элемент множества $Y \backslash F(X_0)$. Возьмем любой элемент $x_0 \in F^{-1}(y_0)$. Так как $F^{-1}(y_0) \cap X_0 = \emptyset$, то ввиду внешней устойчивости множества X_0 модели (X, R) найдется элемент $x'_0 \in X_0$, для которого

$$x'_0 R x_0 \tag{19}$$

Из (19) с учетом гомоморфности отображения $F : X \to Y$ находим, что

$$F(x'_0) L F(x_0) \quad \text{или} \quad F(x'_0) L y_0.$$

Последнее соотношение в силу произвольности элемента $y_0 \in Y \backslash F(X_0)$ означает, что множество $F(X_0)$ является внешне устойчивым в модели (Y, L).

Утверждение 1 теоремы 1 полностью доказано.

Утверждение 2 теоремы 1 является прямым следствием леммы 1.1 параграфа 1 главы 5 книги [6].

Теорема 1 полностью доказана. □

Отметим, что теорема 1 дает достаточные условия сохранения свойства внешней устойчивости множеств оптимизационных моделей проектирования типа (15) при их преобразованиях (морфизмах), удовлетворяющих условиям гомоморфности или согласованности из определений 2, 3.

3.2. Достаточные условия сохранения свойства максимальности подмножеств оптимизационных моделей проектирования сложных технических систем

Пусть заданы: (X, R) — реальный процесс проектной разработки; где X — множество реальных проектов разрабатываемой сложной технической системы; R — бинарное отношение сравнительной эффективности вариантов x множества X; (Y, L) — приближенная (например, компьютерная) модель реального процесса проектирования; где Y — множество приближенных аналогов реальных вариантов $x \in X$; L — модельное отношение сравнительной эффективности приближенных вариантов $y \in Y$; $F : X \to Y$ — заданное отображение множества X на множество Y.

Введем следующее

Определение 3. Модель (Y, L) называется F-адекватной по отношению к реальной задаче проектирования (X, R), если

$$\mathrm{Max}(X, R) \subseteq F^{-1}(\mathrm{Max}(Y, L)),$$

где $\mathrm{Max}(X, R)$, $\mathrm{Max}(Y, L)$ — соответственно множества максимальных элементов моделей (X, R), (Y, L).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть отношения L, R, отображение $F : X \to Y$ удовлетворяют условиям*:

а) *отношение R F-согласовано с отношением L*;

б) *R антисимметрично или асимметрично*;

в) *отображение F сюръективно.*

Тогда, если $\mathrm{Max}(Y, L) \neq \varnothing$, то модель (Y, L) является F-адекватной по отношению к задаче реального проектирования (X, R).

Мы получим теорему 3 как следствие следующей более общей теоремы об адекватности процесса приближенного моделирования реальному процессу проектирования.

Теорема 3. *Пусть имеется m $(1 \leqslant m \leqslant +\infty)$ приближенных моделей (Y_j, L_j) реального процесса проектирования (X, R), где $Y_j = F_j(X)$; $F_j : 2^X \to 2^{Y_j}$ — заданные множественно-множественные отображения; 2^X, 2^{Y_j} — булеаны множеств X, Y_j $(j = 1, \ldots, m)$ соответственно.*

Определим на множестве всех подмножеств 2^X множества X вспомогательное бинарное отношение M следующим образом: $a\,M\,b$ тогда и только тогда, когда множество A внешне устойчиво в модели $(a \cup b,\ R)$.

Положим

$$V \equiv \bigcap_{j=1}^{m} F_j^{-1}\big(\mathrm{Max}(Y_j, L_j)\big);$$

$$V_0 \equiv \mathrm{Max}(V, R); \quad X_0 \equiv \mathrm{Max}(X, R).$$

Предположим, что

$$F_j^{-1} \text{ — гомоморфизмы моделей } (Y_j,\ L_j) \text{ в модель } (2^X, M), \tag{20}$$

где $j = 1, \ldots, m$.

Допустим, кроме того, что $V_0 \neq \varnothing$, а отношение R — антисимметричное, либо асимметрично. Тогда $X_0 \subseteq V_0$.

Заметим, что, как установлено в [6], условие гомоморфности (20) является более слабым, чем условие F-адекватности из определения 4. Таким образом адекватность в теореме 4 получается при более слабых ограничениях на отображения F_j $(j = 1, \dots, m)$ и неограниченном числе моделей.

Доказательство.

Утверждение теоремы 3 в случае, когда отношение R антисимметрично непосредственно вытекает из теоремы 3.1. главы 5 работы [6]. Пусть теперь отношение R является асимметричным. Докажем, что.

$$X_0 \subseteq F_j^{-1}(M_j), \quad M_j \equiv \mathrm{Max}(Y_j, L_j), \quad j = 1, \dots, m. \tag{21}$$

Предположим противное. Пусть существует $x \in X_0 \backslash F_j^{-1}(M_j)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $F_j(x) \not\subset M_j$. Пусть y_j — некоторый фиксированный элемент из множества $F_j(x)$. Так как $F_j(x) \not\subset M_j$, то существует y'_j такой, что $y'_j L_j y_j$. Положим

$$a_j \equiv F_j^{-1}(y'_j); \quad b_j \equiv F_j^{-1}(y_j).$$

В силу гомоморфности отображения F_j^{-1} множество a_j внешне устойчиво в $(a_j \cup b_j, R)$, т. е. существует такой элемент $y''_j \in a_j$, что $y''_j R x$, а это противоречит максимальности элемента x ввиду асимметричности отношения R. Полученное противоречие доказывает справедливость включений (21). Отсюда следует, что $X_0 \subseteq V$; $X_0 \subseteq V_0$.

Теорема 3 полностью доказана. □

В заключении отметим, что теорема 2 дает не только условие адекватности, но и показывает преимущество модельного решения по отработке не максимальных проектируемых вариантов, в пределе оставляющего реальному проектированию только варианты из ядра максимальных элементов по отношению сравнительной эффективности R.

Теорема 3, являющаяся обобщением теоремы 2, показывает до какой степени могут быть ослаблены условия адекватности (т. е. условия сохранения свойства максимальности подмножеств выбора) приближенных моделей при сохранении корректности общей задачи проектирования.

4. Адекватность метода анализа устойчивости квазилинейных дифференциальных систем по их первому приближению

В настоящем разделе мы будем рассматривать линейную однородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t) \cdot x \quad (x \in R^n,\ t \geqslant 0), \tag{22}$$

где $A(t)$ — непрерывная ограниченная при $t \geqslant 0$ матричная функция:

$$\sup_{t \geqslant 0} \|A(t)\| \leqslant a < +\infty, \tag{23}$$

а также ее возмущение

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \tag{24}$$

где $f(t, y) \in C^{(0,1)}_{t,y}$ при $t \geqslant 0$; $\|y\| \leqslant h < +\infty$.

(Считаем, что $f(t, y) \in C^{(0,1)}_{t,y}$ тогда и только тогда, когда она непрерывна по $t \geqslant 0$ и имеет непрерывные частные производные по переменным $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, где $y \equiv \operatorname{col}(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ — n-мерный вектор-столбец.)

Предположим дополнительно, что векторная функция-возмущение $f(t, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(t, y)\| \leqslant \varphi(t) \cdot \|y\|^m, \tag{25}$$

где m — натуральное число удовлетворяющее неравенству $m > 1$; $\varphi(t)$ — непрерывная, положительная при $t \geqslant 0$ функция, для которой

$$\lambda(\varphi(t)) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |\varphi(t)| = 0,$$

где $\lambda(\varphi(t))$ — характеристический показатель Ляпунова функции $\varphi(t)$.

Назовем метод анализа асимптотической устойчивости квазилинейной динамической дифференциальной системы (24), (25) по ее линейному приближению (22), (23) m-адекватным, если из асимптотической устойчивости линейной системы (22) следует асимптотическая устойчивость системы вида (24).

Напомним, что линейная система вида (22) называется правильной по Ляпунову, если сумма характеристических показателей ее совпадает с нижним пределом среднего значения следа матрицы системы:

$$\sigma \equiv \sum_{k=1}^{m} n_k \lambda_k = \underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)\, d\tau,$$

где λ_k, $k = 1, \ldots, m$ — различные показатели Ляпунова системы (22); n_k, $k = 1, \ldots, m$ — кратности показателей λ_k.

Для правильных линейных дифференциальных систем типа (22) имеют место следующие утверждения [21–23].

1. Система вида (22) правильна тогда и только тогда, когда

а) существует предел среднего значения следа матрицы системы

$$S = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)\, d\tau;$$

б) выполнено равенство Ляпунова $\sigma = S$.

2. Линейная система с постоянными коэффициентами правильна.
3. Линейная система с периодическими коэффициентами является правильной.

Справедлива следующая

Теорема 4.

1. *Пусть система первого приближения* (22) *является правильной и удовлетворяет достаточному условию асимптотической* (*экспоненциальной*) *устойчивости*
$$\lambda_1(A) \equiv \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i(A) < 0$$
($\lambda_1(A)$ — *старший характеристический показатель Ляпунова линейной дифференциальной системы* (22)).

   Предположим также, *что выполнено условие нелинейности* (25). *Тогда решение* $y(t) \equiv 0$ *нелинейной системы* (24) *асимптотически* (*экспоненциально*) *устойчиво по Ляпунову при* $t \to +\infty$.

2. *Пусть дана квазилинейная дифференциальная система* (24), (25) *с неправильной системой линейного приближения* (22). *Предположим*, *что линейная система* (22) *удовлетворяет следующему условию*
$$\lambda_1(A) < -\frac{\Psi}{m-1} \leqslant 0, \tag{26}$$
где
$$\Psi \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)\, d\tau$$
— *мера неправильности линейной системы* (22).

   Тогда тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ *нелинейной дифференциальной системы* (24), (25) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t \to +\infty$.

Отметим что утверждение 1 теоремы 4 устанавливает достаточные условия m-адекватности метода анализа асимптотической устойчивости квазилинейной дифференциальной системы типа (24), (25) по ее линейному приближению (22) в случае, когда система линейного приближения (22) правильна, а утверждение 2 теоремы 4 дает достаточные условия m-адекватности этого метода анализа асимптотической устойчивости в случае, когда система первого приближения является неправильной и удовлетворяет дополнительному условию неправильности (26).

Заметим также, что в работе [24] построена экспоненциально устойчивая (т. е. $\lambda_1(A) \equiv \lambda_{\mathrm{Max}}(A) < 0$) линейная дифференциальная система типа (22), (23) с почти — периодическими коэффициентами такая, что при некотором натуральном $m > 1$ и нелинейном возмущении

$$f(t,y): R^+ \times R^2 \to R^2, \quad \|f(t,y)\| \leqslant \|y\|^m \quad (R^+ \equiv [0,+\infty]),$$

нулевое решение соответствующей возмущенной квазилинейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y)$$

неустойчиво.

Другими словами, можно утверждать, что метод анализа асимптотической (экспоненциальной) устойчивости нелинейных дифференциальных систем вида (24), (25) по их линейному приближению (22) не является m-адекватным в случае, когда система линейного приближения почти — периодична.

В заключение данного раздела приведем достаточные геометрические условия адекватности метода анализа асимптотической устойчивости квазилинейной дифференциальной системы типа (24) с квазипериодической и почти-периодической линейной частью (системой первого приближения) (22).

Теорема 5 [11].

1. *Пусть задана квазилинейная система дифференциальных уравнений*

$$\dot{z} = A_{qp}(t)z + f_1(t,z),$$

где $A_{qp}(t)$ — непрерывная квазипериодическая операторная функция с k-мерным базисом частот $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ (см. [30, с. 52, 53]); $f_1(t,z) \in C^{(0,1)}_{t,z}$ при $t \geqslant 0$; $\|z\| \leqslant h_1 < +\infty$; $\|f_1(t,z)\| \leqslant c_1\|z\|$, где c_1 — некоторая достаточно малая положительная константа.

Предположим, что старший показатель Ляпунова $\lambda_1(A_{qp}(t))$ системы первого приближения $\dot{z} = A_{qp}(t)z$ меньше нуля:

$$\lambda_1(A_{qp}(t)) < 0.$$

Допустим дополнительно, что линейная система $\dot{z} = A_{qp}(t)z$ обладает следующим геометрическим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что для всякого решения $u(t)$ квазипериодической линейной системы

$$\dot{u} = B_{qp}(t)u \quad (u \in R^n,\ t \geqslant 0),$$

где $B_{qp}(t)$ — непрерывная квазипериодическая операторная функция с тем же (что и у $A_{qp}(t)$) базисом частот $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$,

$$d(A_{qp}(t), B_{qp}(t)) \equiv \sup \|A_{qp}(t) - B_{qp}(t)\| < \sigma, \quad t \geqslant 0$$

найдется решение $z(t)$ *системы* $\dot{z} = A_{qp}(t)z$, *для которого*

$$\sup \angle(z(t), u(t)) < \varepsilon, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда метод анализа асимптотической устойчивости квазилинейной дифференциальной системы типа (24)

$$\dot{z} = A_{qp}(t)z + f_1(t, z),$$

является m*-адекватным при* $m = 1$.

2. *Пусть дана квазилинейная дифференциальная система типа* (24)

$$\dot{r} = A_q(t)r + f_2(r, t),$$

где $A_q(t)$ — *непрерывная почти-периодическая операторная функция*; $f_2(t, r) \in C_{t,r}^{(0,1)}$ *при* $t \geqslant 0$; $\|r\| \leqslant h_2 < +\infty$; $\|f_2(t, r)\| \leqslant c_2\|r\|$, *где* c_2 — *некоторая достаточно малая положительная константа.*

Предположим, что старший характеристический показатель Ляпунова системы первого приближения $\dot{r} = A_q(t)r$ *меньше нуля*:

$$\lambda_1(A_q(t)) < 0.$$

Допустим дополнительно, что линейная дифференциальная система $\dot{r} = A_q(t)r$ *удовлетворяет следующему геометрическому условию*: *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\sigma > 0$, *что для всякого решения* $v(t)$ *линейной почти-периодической системы*

$$\dot{v} = B_q(t)v \quad (v \in R^n,\ t \geqslant 0),$$

где $d(A_q(t), B_q(t)) \equiv \sup\limits_{t \geqslant 0} \|A_{qp}(t) - B_{qp}(t)\| < \sigma$, *найдется решение* $r(t)$ *системы первого приближения* $\dot{r} = A_q(t)r$, *для которого*

$$\sup_{t \geqslant 0} \angle(r(t), v(t)) < \varepsilon.$$

Тогда метод анализа асимптотической устойчивости квазилинейной дифференциальной системы типа (24)

$$\dot{r} = A_q(t)r + f_2(t, r)$$

является m*-адекватным при* $m = 1$.

5. Анализ адекватности конечно-разностных моделей дифференциальных динамических систем

Многие задачи механики, физики теории управления и других отраслей науки и техники при их моделировании сводятся к дифференциальным уравнениям. Среди различных методов решения дифференциальных уравнений особое место занимают численные методы, которые в настоящее время являются основным инструментом при исследовании научно-технических задач, описываемых дифференциальными моделями. Отметим также, что данные методы особенны эффективны в сочетании с использованием современных компьютерных систем.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения систем дифференциальных уравнений является метод конечных разностей [25–28]. При использовании этого метода область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок прямой) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения [25–28]. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующую дифференциальную задачу [25–28]:

$$Ay = F(x), \quad x \in L; \tag{27}$$

$$ay = R(x), \quad x \in M, \tag{28}$$

где A — дифференциальный оператор, содержащий операции дифференцирования; L — область изменения аргумента x (например, конечный отрезок $[c, d]$, числовая ось $(-\infty, +\infty)$, положительная полуось $[0, +\infty]$ и т. п.); a — оператор начальных или граничных условий; $R(x)$ — правая часть этих условий; M — граница рассматриваемой области (т. е. точки $x = 0$, $x = c$, $x = d$ и т. п.).

В методе конечных разностей исходное дифференциальное уравнение (27) заменяется разностным уравнением путем аппроксимации производных соответствующими конечно-разностными соотношениями. При этом в области L вводится сетка с постоянным шагом $h > 0$. Совокупность узлов $x_0, x_1, \ldots$ этой сетки обозначим через U_h. Значения исходной функции у в узлах сетки заменяются значениями сеточной функции y_h, которая является решением разностного уравнения

$$A_h y_h = f_h, \quad x \in U_h, \tag{29}$$

где A_h — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор A.

Как известно (см, например, [25–28]), погрешность аппроксимации производных, а следовательно, и погрешность аппроксимации (29) в некоторой точке x может быть представлена в виде

$$\varepsilon(x) = O(h^k).$$

При этом говорят, что в данной точке x имеет место аппроксимация k-го порядка. Индекс h в разностном уравнении (29) подчеркивает, что величина шага является параметром разностной задачи. Поэтому (29) можно рассматривать как целое семейство разностных уравнений, зависящих от параметра h.

При решении дифференциальных уравнений обычно требуется оценить погрешность аппроксимации не в одной точке, а на всей сетке U_h, т. е. в точках $x_0, x_1, \ldots$. В качестве погрешности аппроксимации ε_h на сетке U_h, можно, например, принять следующие величины [25–28]:

$$\varepsilon_h \equiv \operatorname*{Max}_i |\varepsilon(x_i)|; \quad \varepsilon_h \equiv \Big(\sum_i \varepsilon^2(x_i)\Big)^{1/2}.$$

В этом случае A_h имеет k-й порядок аппроксимации на сетке, если $\varepsilon(x) = O(h^k)$.

Наряду с аппроксимацией (29) аппроксимируем также дополнительные условия на границе (28):

$$A_h y_h = R_h, \quad x \in W_h, \tag{30}$$

где W_h — множество граничных узлов сетки, т. е. $W_h \subset M$.

Совокупность разностных уравнений (29), (30), аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение и дополнительные условия на границе называется разностной схемой [25–28].

Рассмотрим пример построения разностной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = F(x), \quad x > x_0, \quad y(x_0) = F_0.$$

Для его решения введем равномерную сетку с шагом h, приняв в качестве узлов значения аргументов $x_0, x_1, \ldots$. Значения сеточной функции, аппроксимирующей искомое решение в данных узлах, обозначим через $y_0, y_1, \ldots$. Тогда разностную схему можно, например, записать в следующем виде

$$A_h y_h \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = F_i, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = F_0,$$

где F_i — значение правой части разностного уравнения в точке x_i.

Можно, в частности, принять $F_i = F(x_i)$. Известно (см., например, [25–28]), что данная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации, т. е. $\varepsilon(x) = O(h)$.

Заметим, что решение разностной задачи, в результате которого находятся значения сеточной функции y_i в узлах x_i, приближенно заменяет решение $y(x)$ исходной дифференциальной задачи (27), (28). Однако не всякая разностная схема дает удовлетворительное решение, т. е. получаемые значения сеточной функции y_i не всегда с достаточной точностью аппроксимируют значения искомой функции $y(x_i)$ в узлах дискретной сетки. Здесь важную роль играют такие понятия как устойчивость, аппроксимация и сходимость разностной схемы.

Под устойчивостью схемы понимается непрерывная зависимость ее решений от входных данных (коэффициентов уравнений, правых частей, начальных и граничных условий).

В противном случае разностная схема называется неустойчивой. Естественно, что для практических расчетов используются устойчивые разностные схемы, поскольку входные данные обычно содержат погрешности, которые в случае неустойчивых схем приводят к неверному решению. Кроме того, в расчетах на компьютерах погрешности возникают в процессе счета из-за округлений, а использование неустойчивых схем приводит к недопустимому накоплению этих погрешностей.

При использовании метода конечных разностей необходимо знать точность приближения решения разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи. Положим

$$\sigma_h \equiv y(h) - y_h. \tag{31}$$

Используя (29)–(31), находим, что

$$A_h y(h) - A_h \sigma_h = f_h, \quad x \in U_h; \tag{32}$$

$$a_h y(h) - a_h \sigma_h = R_h, \quad x \in W_h. \tag{33}$$

Из (32), (33) получаем, что

$$A_h \sigma_h = P_h, \quad a_h \sigma_h = p_h,$$

где $P_h \equiv A_h y(h) - f_h$ — погрешность аппроксимации для разносного уравнения; $p_h \equiv a_h y(h) - R_h$ — погрешность аппроксимации для разностного граничного уравнения.

Если ввести характерные значения P, p величин P_h, p_h (например, взять их максимальные по модулю значения на разностной сетке), то при $P = O(h^k)$, $p = O(h^k)$ говорят, что разностная схема (29), (30) имеет k-й порядок аппроксимации на решении.

Аналогичным образом введем теперь характерное значение σ погрешности решения σ_h. Тогда разностная схема сходится, если для величины σ справедливо следующее предельное соотношение

$$\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{34}$$

Если при этом в (34) σ допускает оценку

$$\sigma = O(h^k),$$

то говорят, что разностная схема имеет точность k-го порядка или сходится со скоростью $O(h^k)$.

Сходящуюся со скоростью $O(h^k)$ разностную модель (схему) (29), (30) мы будем в дальнейшем называть k-адекватной по отношению к дифференциальной модели (27), (28).

В теории разностных схем установлено следующее важное утверждение о k-адекватности (сходимости со скоростью $O(h^k)$) разностных моделей типа (27), (28) [25–28].

Теорема 6. *Если решение исходной дифференциальной задачи* (27), (28) *существует, а разностная модель* (29), (30) *устойчива и аппроксимирует задачу* (27), (28) *на данном решении с порядком k, то разностное решение сходится к точному со скоростью $O(h^k)$, т. е. разностная модель* (27), (28) *является k-адекватной.*

(Иными словами, из устойчивости и аппроксимации разностной схемы с порядком k следует ее k-адекватность (сходимость).)

Отметим, что теорема 6 позволяет свести трудную задачу исследования k-адекватности (сходимости) и оценки порядка точности разностной модели к изучению подробно рассмотренных в специальной литературе по сеточным схемам задач оценки погрешности аппроксимации и устойчивости разностных моделей (методы Эйлера, Рунге—Кутта, Адамса аппроксимации и решения обыкновенных дифференциальных уравнений [25–28], спектральный метод оценки устойчивости разностных моделей [25–29], методы линеаризации и «замороженных коэффициентов» анализа устойчивости решений разностных схем и т. п. [29, 30]).

6. Заключение

Таким образом в работе изучаются задачи анализа адекватности специальных классов моделей сложных технических систем. Для оптимизационных моделей выбора вариантов сложных технических объектов по бинарному отношению их сравнительной эффективности получены достаточные условия сохранения свойств максимальности и внешней устойчивости множеств выбора при преобразованиях (гомоморфизмах) моделей. Для специальных классов линейных дифференциальных моделей сложных технических объектов даны достаточные условия их адекватности (сохранение свойства асимптотической устойчивости решений) при их возмущениях высшего порядка малости. Для конечно-разностных моделей дифференциальных динамических систем функционирования таких объектов приведены достаточные условия их адекватности (сходимости с точностью k-го порядка, где $k \geqslant 1$).

Литература

1. *Бусленко Н. П.*, *Калашников В. В.*, *Коваленко И. Н.* Лекции по теории сложных систем. М.: Советское радио, 1973.
2. Технология системного моделирования / Под ред. акад. С. В. Емельянова М.: Машиностроение, 1988.
3. Робототехника и гибкие автоматизированные производства: В 9 кн. Кн. 1. *Макаров И. М.* Системные принципы создания гибких автоматизированных производств. М.: Высшая школа, 1986.
4. *Краснощеков П. С.*, *Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Издательство МГУ, 1983.
5. *Краснощеков П. С.*, *Петров А. А.*, *Федоров В. В.* Информатика и проектирование. М.: Знание, 1986.
6. *Вязгин В. А.*, *Федоров В. В.* Математические методы автоматизированного проектирования. М.: Высшая школа, 1989.
7. *Капустин Н. М.*, *Дьякова Н. П.*, *Кузнецов П. М.* Автоматизация проектирования. М.: Высшая школа, 2003.
8. *Краснощеков П. С.*, *Савин Г. И.*, *Федоров В. В.*, *Флеров Ю. А.* Автоматизация проектирования сложных объектов машиностроения // Автоматизация проектирования. 1996. № 1. С. 3–13.
9. *Рахманкулов В. З.*, *Ахрем А. А.*, *Севрюк В. И.* Методы и средства автоматизированного анализа стратегии развития гибкого компьютерно-интегрированного производства. Препринт. М.: ИСА РАН, 1992. 62 с.
10. *Ахрем А. А.*, *Рахманкулов В. З.* Виртуальное проектирование и принятие решений // Автоматизация проектирования. 1997. № 4. С. 20–30.
11. *Ахрем А. А.*, *Рахманкулов В. З.*, *Соклеткин А. В.* Модели проектирования и переноса передовых информационных технологий // В кн.: Нелинейная динамика и управление. Вып. 2. М.: Физматлит, 2002. С. 271–278.
12. *Рахманкулов В. З.*, *Ахрем А. А.* Об адекватности виртуальных компьютерных моделей процессов автоматизированного проектирования сложных технических систем // В сборнике трудов ИСА РАН: Управление информационными потоками. М.: УРСС, 2002. С. 290–294.
13. *Белкин А. Р.*, *Левин М. Ш.* Принятие решений. Комбинаторные модели аппроксимации информации. М.: Наука, 1990.
14. *Мышкис А. Д.* Элементы теории математических моделей. М.: УРСС, 2004.

15. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977.
16. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
17. *Бахвалов Н. С.*, *Жидков Н. П.*, *Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
18. *Туркач Л. И.*, *Плотников П. В.* Основы численных методов. М.: Физматлит, 2003.
19. *Макаров И. М. и др.* Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
20. *Подиновский В. В.*, *Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
21. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений: В 6 т. Т. 2. М.: Издательство АН СССР, 1956.
22. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
23. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
24. *Липницкий А. В.* Об устойчивости по почти-периодическому линейному приближению дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 208–214.
25. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
26. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
27. *Рябенький В. С.* Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 1994.
28. *Локуциевский О. В.*, *Гавриков М. Б.* Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.
29. *Анучина Н. Н.*, *Бабенко К. И.*, *Годунов С. К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1979.
30. *Левитан Б. М.*, *Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 1978.