Вейвлет-анализ изображений промышленных деталей*

В. З. Рахманкулов, А. А. Ахрем,
В. В. Герасимов, В. В. Лебедев

В статье рассматриваются некоторые вопросы теории и практики вейвлет-анализа изображений. Приводятся основные свойства пространств вейвлетов. Описывается разработанный авторами программный комплекс обработки изображений специальных классов промышленных деталей с применением аппарата вейвлет-функций.

Введение

Многие века существовала проблема единообразного и достаточно простого представления сложных функций. Эта проблема получила новую значимость в связи с появлением и бурным развитием связи, радиотехники и средств телекоммуникаций. Долгое время решением этой проблемы было использование аппарата представления произвольных функций в виде рядов Фурье. Однако в последние годы стало очевидно, что применение рядов Фурье для функций с локальными особенностями оказалось малоэффективным. Связано это было с тем, что базисная функция рядов Фурье — синусоида являлась по природе гладкой и строго периодической функцией, определенной на бесконечности. И на практике (в условиях ограничения членов ряда или спектра разложения) такая функция принципиально была не способна описывать произвольные сигналы и функции. По этой причине возникла необходимость в функциях совсем другой природы, которые возможно было использовать для обработки зашумленных сигналов и изображений. Поэтому в начале 90-х годов прошлого века появился совершенно новый вид функций, гораздо более приспособленный для решения вышеуказанных задач. Имя этим функциям — *вейвлеты* (от английского слова wavelets —

* Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН № 14 «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий», направление 1 «Интеллектуальные технологии и математическое моделирование» (проект № 2.44 «Транспозиционные виртуальные компьютерные технологии для исследования и построения интеллектуальных систем управления»).

волна). В последующие годы теория вейвлетов бурно развивалась. Появлялось множество их разновидностей и типов, применимых для решения конкретных практических задач. Таких как, например, обработка и распознавание изображений, а именно сжатие файлов с изображениями, удаление шума (фильтрация), декомпозиция, реставрация и идентификация изображений. Причем набор вейвлетов, в их временном или в частотном представлении, может приближать сложный сигнал (изображение), как и идеально точно, так и с некоторой погрешностью. Вейвлеты представлены большим числом базисных функций, что делает этот новый математический аппарат более гибким для представления и обработки произвольных изображений. В частности, с помощью его могут проводиться исследования возможностей вейвлет-фильтров для обработки изображений промышленных деталей [1, 2].

Вейвлеты — это функции, имеющие вид коротких волновых пакетов с нулевым интегральным значением, локализованные по оси независимой переменной [1–4].

Вейвлеты, в отличие от тех же рядов Фурье, имеют довольно большое количество базисных функций, определенных в бесконечномерном пространстве. Любой сигнал $s(t)$ можно представить в виде:

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t),$$

$\psi_k(t)$ — базисные функции, C_k — коэффициенты.

Среди важнейших свойств вейвлет-функций стоит отметить:

- Ограниченный частотный спектр.
- Способность к масштабированию (сжатию/растяжению).
- Возможность сдвига во времени.

Именно эти свойства дали основание считать вейвлеты короткими волнами. При наличии этих свойств вейвлеты обеспечивают свое главное преимущество перед синусоидами: возможность представления локальных особенностей функций и сигналов.

Основная идея, лежащая в основе теории вейвлетов, заключается в выборе некоторой функции, называемой масштабирующей, и построении по ней другой функции, называемой вейвлет-функцией, растяжения и сдвиги которой образуют базис (вейвлетов) в бесконечномерном гильбертовом пространстве $L_2(R)$, измеримых на вещественной оси функций $f(x)$ $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty\right)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx, \quad f(x),\ g(x) \in L_2(R).$$

В дальнейшем нам также потребуются следующие понятия теории вейвлет-пространств [1–5].

Определение 1. Вейвлетом называется функция $\psi \in L_2(R)$ такая, что система $\{\psi_{j,k}\}$ $(j, k \in Z,\ Z$ — множество целых чисел), где

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad t \in R,$$

будет ортонормальным базисом гильбертова пространства $L_2(R)$. Систему $\{\psi_{j,k}\}$ назовем базисом вейвлетов.

Определение 2. Для данного $r \in R$ оператором сдвига T_r, действующим на некотором семействе F функций, определенных на R называется оператор, задаваемый формулой

$$\forall\, f \in F, \quad \forall\, x \in R \quad T_r(f(x)) \equiv f(x - r).$$

Если $s \in Z$, то оператором растяжения называется оператор J_s:

$$\forall\, f \in F, \quad \forall\, x \in R \quad J_S(f(x)) = f(2^S x).$$

Приведем теперь основное в теории вейвлет-анализа определение пространства вейвлетов.

Определение 3. Предположим, что дана последовательность $\{V_j\}$ $(j \in Z)$ замкнутых подпространств в $L_2(R)$ таких, что

1) $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$;
2) $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L_2(R)$;
3) $\bigcap_{j\in Z} V_j = 0$;
4) $V_j = J_{-j}(V_0) \quad \forall\, j \in Z$;
5) $V_n = T_n(V_0) \quad \forall\, n \in Z$;
6) найдется такая функция $\Phi \in V_0$, что для любого целого числа j система функций $\{\Phi_{j,k}\}$ $(k \in Z)$, где $\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Phi(2^j x - k)$ будет ортонормированным базисом в V_j.

Функцию Φ из пункта 6 определения 3 принято называть масштабирующей.

Введем теперь для каждого $j \in Z$ подпространство $W_j \subset L_2(R)$, ортогональное к V_j и такое, что $V_j + W_j = V_{j+1}$.

Известно (см., например, [1, 3, 4]), что при всех целых j

$$V_{j+1} = V_j + J_j(W_0),$$

а также для любого $j \in Z$

$$W_j = J_j(W_0).$$

Кроме того для последовательности $\{W_j\}$ справедливо представление

$$\sum_{j\in Z} W_j = L_2(R),$$

(где $\sum\limits_{j\in Z} W_j$ — прямая сумма подпространств W_j).

Вейвлеты характеризуются своим временным и частотным образами. Временной образ определяется функцией $\Psi(t)$. Частотный (Фурье) образ определяется функцией

$$F(\omega) = \int_a^b \psi(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Сигнал можно представить совокупностью волновых пакетов — вейвлетов, образованных на основе некоторой базовой функции $\Psi_0(t)$. Эта совокупность разная в разных частях временного интервала определения сигнала и корректируемая множителями, имеющими вид порой сложных временных функций, и представляет сигнал с той или иной степенью детализации. Такое разложение сигнала на совокупность вейвлетов называют *вейвлет-анализом сигналов*. При этом число используемых при разложении сигнала вейвлетов задает *уровень декомпозиции сигналов* и за нулевой уровень декомпозиции часто принимается сам сигнал, а последующие уровни декомпозиции образуют ниспадающее вейвлет-дерево.

Точность представления сигнала по мере перехода на более низкие уровни декомпозиции снижается, но зато появляется возможность вейвлет-фильтрации сигналов, удаления из них шумов и их эффективная компрессия. Одной из основополагающей идей вейвлет-представления сигналов заключается в разбивке приближения к сигналу на две составляющие: грубую (аппроксимирующую) и уточненную (детализирующую), с последующим их уточнением итерационным методом. Каждый шаг такого уточнения соответствует определенному уровню декомпозиции и реставрации сигнала. И это возможно как во временной, так и в частотной областях представления сигналов вейвлетами. Данный подход был давно реализован в технике представления функций рядами Тейлора или Фурье, а также в современной технике обработки изображений.

В качестве практического примера — можно привести вейвлет типа «мексиканская шляпа».

Данный пример был реализован с помощью программного пакета “Mathcad 2001 Profesional”. График функции $\Psi(a,t)$ по сути и является временным образом вейвлета «мексиканская шляпа» (psi-функция), а график функции $F(a,\omega)$ — частотный образ вейвлета (см. рис. 1). Вейвлеты демонстрируют разные подходы в сокращении избыточной информации и в очистке изображений от шума (фильтрация изображений).

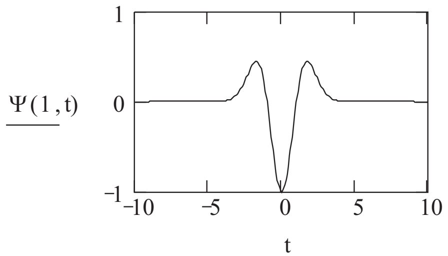
$$\mathrm{mhat}(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} \rightarrow -\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right) + t^2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right)$$

$$i := \sqrt{-1}$$

$$\Psi(a,t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\mathrm{mhat}\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

$$F(a,\omega) := \int_{-1000}^{1000} \Psi(a,t)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\,dt \qquad t := -10,-9.9..10$$

$$\omega := 0,0.1..10$$



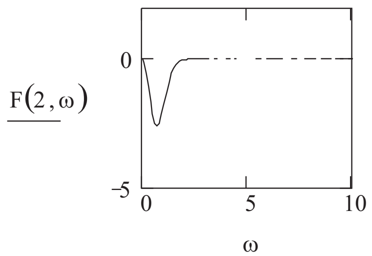


Рис. 1

В качестве объекта фильтрации была выбрана поворотная платформа робототехнического комплекса, имеющая ячейки для деталей типа тел вращения. Подход, который был использован для фильтрации изображения платформы, заключался в ограничении уровня детализирующих коэффициентов, так как кратковременные особенности сигналов создают детализирующие коэффициенты с высоким содержанием шумовых компонент, имеющих большие случайные выбросы значений сигнала.

Задав некоторый порог для их уровня, и срезав по уровню детализирующие коэффициенты, можно уменьшить уровень шумов. При этом возможно как глобальное ограничение всех коэффициентов по уровню, так и локальное ограничение. Естественно большое значение имеет выбор вейвлет — функции, имеющей специфическое для нее математическое описание и ряд собственных качественных характеристик.

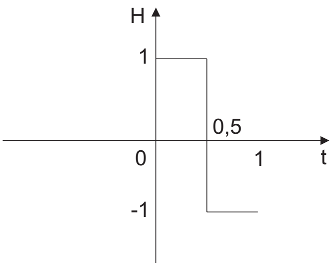


Рис. 2. График вейвлета Хаара $H(t)$

Наиболее простой функцией по сравнению с остальными, которые применялись для фильтрации изображения платформы с штампованными деталями является вейвлет Хаара $H(t)$, задаваемый формулой

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in [0, 1/2]; \\ -1, & \text{если} \quad t \in [1/2, 1]; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Вейвлеты Добеши и Койфлета имеют более сложную геометрическую интерпретацию и математическое описание, чем вейвлет Хаара. Эти два типа вейвлетов: Добеши, Койфлета, а также вейвлет Симлета относятся к группе ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Среди основных свойств, присущих этой группе можно выделить:

— возможность применения быстрого вейвлет-преобразования;
— обеспечение принципиальной возможности реконструкции сигналов и функций.

Обзор основных программных пакетов, используемых для работы с вейвлетами

Среди профессионального и наиболее современного программного обеспечения, способного решать довольно сложные задачи практического применения вейвлетов и вейвлет-преобразований, можно выделить три основных программных пакета — Mathcad 2001 Professional, Matlab 6, Mathematica 4/4.1. Эти программные комплексы применимы как и для самого анализа свойств вейвлет-функций и вейвлет-преобразований, так и для их использования в задачах обработки цифровых сигналов и изображений. Непосредственно для работы с вейвлетами используются соответствующие расширения, интегрированные в эти программные пакеты: Wavelet Toolbox (Matlab), Wavelet Extension Pack (Mathcad), Wavelet Explorer (Mathematica).

Wavelet Toolbox 2.0 (*Matlab*) является наверное самым мощным инструментом для работы с вейвлетами. Это отдельное расширение программного комплекса Matlab 6, устанавливаемое, при полной инсталляции Matlab. Wavelet Toolbox, которое имеет собственную обширную библиотеку классов, компонентов, и довольно широкий набор дополнительных утилит для работы с вейвлетами. С Wavelet Toolbox есть возможность работать, как в командном режиме, так и с использованием специального графического интерфейса пользователя Graphic User Interface (GUI). Также в Wavelet Toolbox имеется большое количество наглядных примеров в фирменном описании, а по обилию типов вейвлетов и функций для обработки сигналов не имеет равных по сравнению с другими системами компьютерной математики. Можно отметить основные средства для работы с вейвлетами в командном режиме:

- инструментальные средства для вейвлет-анализа и синтеза сигналов и изображений;
- множество уже встроенных вейвлетов разного типа;
- возможность разработки собственных пользовательских вейвлетов;
- средства обработки сигналов и изображений;
- средства для непрерывного и дискретного вейвлет-анализа;
- средства очистки сигналов и изображений от шума;
- средства обработки и компрессии сигналов изображений;
- мощные средства визуализации вейвлетов и операций с ними.

Все указанные возможности можно использовать, как в командном режиме путем написания небольших скриптов на стандартном языке моделирования используемого в среде Matlab, так и с помощью графического интерфейса (GUI). Для примера можно привести скрипт, строящий график вейвлета Добеши (db2) и график интеграла (рис. 3) от него.

```
Wname='db2';
[phi,psi,xval]=wavefun(wname,7);
subplot(211);
plot(xval,psi);
title('Wavelet');
[integ,xval]=intwave(wname,7);
subplot(212);
plot(xval,integ);
title('Wavelet integrals');
```

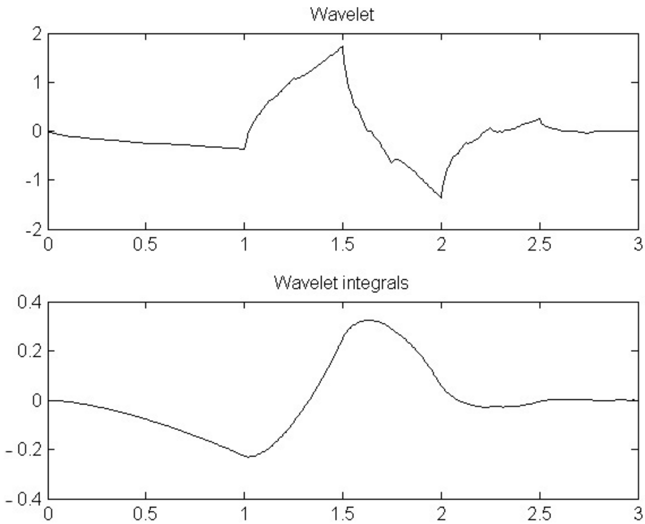


Рис. 3

Однако, когда требуется тщательный анализ фильтруемого изображения в результате применения тех или иных вейвлет-функций и более детальный подбор коэффициентов детализации, все-таки гораздо удобнее использовать Graphic User Interface (GUI).

Тем более в использовании графический интерфейс пользователя довольно прост и нагляден. Все операции компрессии и фильтрации изображения с различными вариациями соответствующих параметров производятся с файлами в формате *.mat [2]. Так как на практике часто приходится иметь дело с файлами изображений различных форматов, существует возможность импорта файла (в качестве примера выбрано двумерное, зашумленное изображение платформы, со штампованными алюминиевыми деталями platforma.bmp) в формат *.mat, используя опции импорта или функцию imread (в командном режиме):

```
A = imread('platforma.bmp');
% A is an S1xS2x3 array of uint8.
A = double(A);
Xrgb = 0.2990*A(:,:,1) + 0.5870*A(:,:,2) + 0.1140*A(:,:,3);
NbColors = 255; X = wcodemat(Xrgb,NbColors);
map = pink(NbColors);
```

После сохранения и последующей загрузки полученного mat-файла (левая верхняя часть окна на рис. 4) с помощью вейвлета Хаара получаем синтезированное изображение (левая нижняя часть окна на рис. 4).

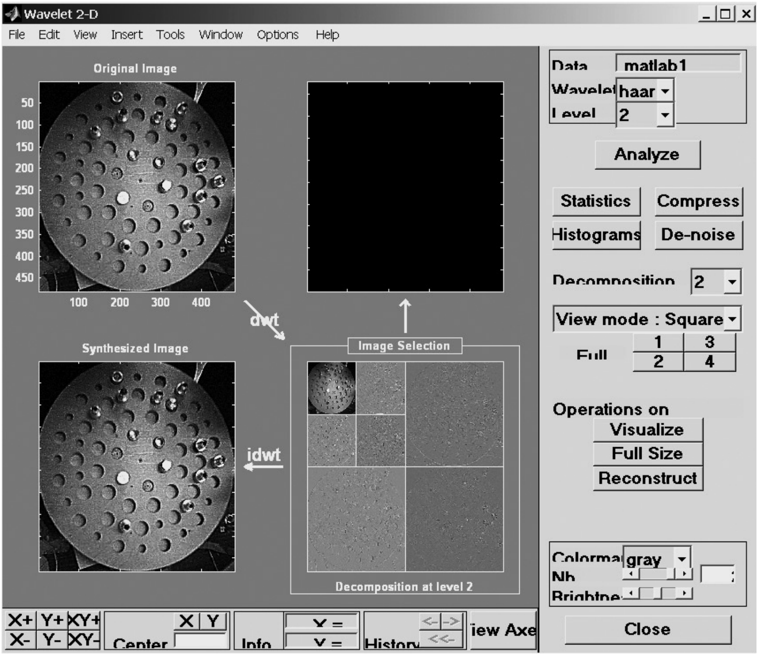


Рис. 4

Для того чтобы провести последующую компрессию или фильтрацию изображения, необходимо нажать соответствующую кнопку. В результате появится новое диалоговое окно, где можно использовать для фильтрации уже «сгруппированные» коэффициенты детализации или самому провести более тонкую подборку коэффициентов, в зависимости от типа помех и уровня зашумленности изображения. Для выбора другого вейвлета или другого уровня декомпозиции, необходимо заново выполнить анализ изображения (сигнала) в главном диалоговом окне. Однако есть возможность полученные коэффициенты разложения записать на диск в виде mat-файла (File → Save Coefficients) и затем считать в рабочую область Matlab для детального изучения.

Фильтрация изображения платформы, со штампованными деталями, с применением различных типов вейвлет-функций

Для фильтрации и компрессии изображений в Wavelets Toolbox используются 7 типов вейвлет-функций. Это — haar, coif, db, sym, bior, rbio, dmey.

Для фильтрации помех данной платформы использовались первые три типа вейвлет — Хаара, Койфлета, Добеши. С помощью них требовалось отфильтровать сильные помехи изображения платформы для последующего выделения контуров, расположенных на платформе штампованных деталей. Целью было выяснить, какой тип, из перечисленных выше вейвлет, обеспечивает лучшую фильтрацию конкретного изображения при конкретном виде помех. На рис. 5 представлено необработанное, сильно зашумленное изображение платформы.

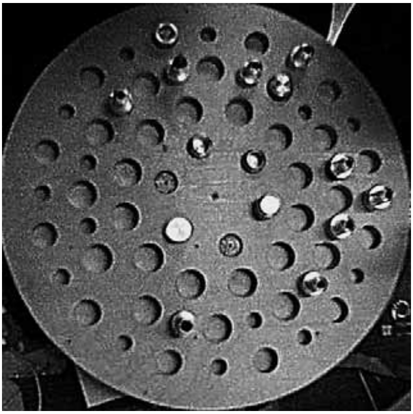


Рис. 5

Это изображение получено с помощью цифровой камеры без выбора какого-то специального ракурса при съемке, а также без использования дополнительных источников света и выбора их определенного направления. Изображение при оцифровке было сохранено в формат рисунков *.bmp, для последующей его обработки изображение было импортировано в формат *.mat и переведено в серый полутон. В начале использовались вейвлеты Хаара с 1 и 2 уровнями декомпозиции. Так как для получения лучших результатов фильтрации возможен нужный подбор детализирующих коэффициентов, было решено использовать практически одни и те же их значения для всех видов вейвлетов, тем самым мы имеем возможность установить качественные отличия, в результате применения каждого вида вейвлета.

В силу того, что конечной целью было получение контуров самих деталей изображение было экспортировано обратно в формат *.bmp, для того чтобы можно было выполнить его оконтуривание и в последующем инвертирование изображения. Для оконтуривания изображений использовался оператор Робертса. На рис. 6 представлен пример фильтрации изображения с помощью вейвлета типа Haar (`level=2`), с последующим выделением контуров оператором Робертса и инвертированием.

На рисунке видно, что контуры деталей видны нечетко и практически большинство имеют разрывы. Столь неудовлетворительный результат можно объяснить, как рядом субъективных факторов (неудачный выбор освещения при съемки деталей, а также их расположение и направления фокуса камеры), так и объективных, например, неудачный выбор коэффициентов детализации или уровня декомпозиции и прочих

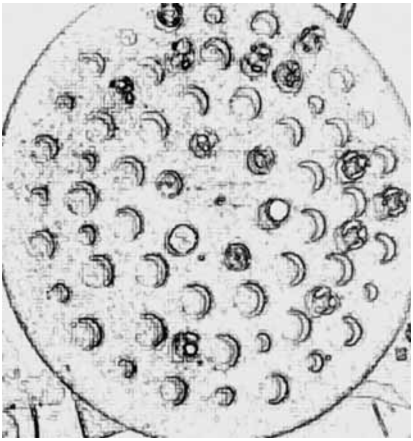


Рис. 6

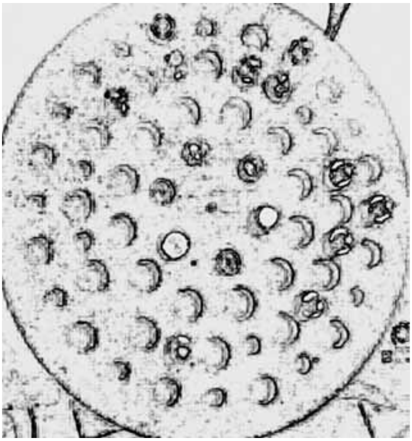


Рис. 7

параметров, либо при данном виде помех нецелесообразно применять такой вид функции, как вейвлет Хаара.

На рис. 7 представлен результат фильтрации платформы с применением вейвлета типа Добеши (`level=2`) с теми же параметрами и методом оконтуривания как и в предыдущем примере.

На рисунке видно, что контуры деталей стали более четкими и практически замкнутыми, по сравнению с предыдущим результатом.

Как видно из приведенных примеров от выбора вейвлет-фильтра и уровня декомпозиции зависит конечный результат (отфильтрованное изображение платформы в нашем случае).

С целью практического применения теории вейвлет-обработки изображений было создано специальное программное приложение.

Данная компьютерная программа была разработана на языке Delphi с использованием интегрированной среды BORLAND Delphi 5.0. Выбор среды разработки и использование языка Delphi позволили успешно реализовать разработанные алгоритмы. При этом был сделан акцент на простоту и удобство работы с программой. Разработанное приложение представляет собой программный код, реализующий все этапы процесса обработки изображений (вейвлет-анализа, фильтрации и оконтуривания). В программе процедура фильтрации состоит из нескольких этапов и есть возможность на каждом из этих этапов определить соответствующие для него параметры. Ниже на рис. 8 представлено основное окно программы, содержащее в левой верхней части исходное изображение, под которым расположено изображение, полученное в результате вейвлет-фильтрации, правее представлены результаты декомпозиции

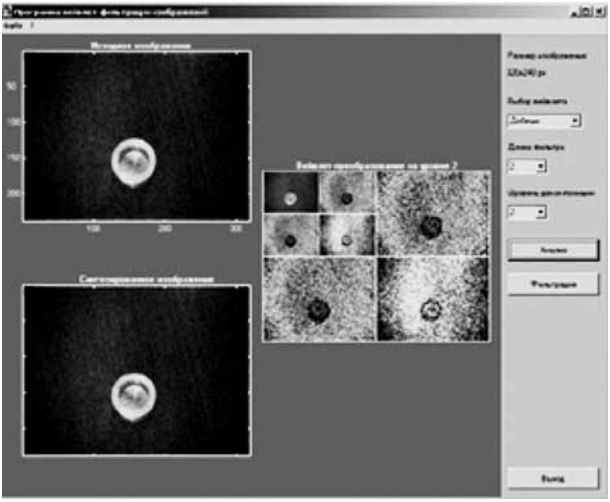


Рис. 8

изображения, в крайней правой части окна представлены опции выбора типа вейвлета и уровня декомпозиции, а также опции запуска режимов фильтрации и получения контура изображения.

Условно процедуру фильтрации можно разбить на три этапа:

1. Определение базисного вейвлета, который будет использован для сепарабельного разложения (опция «выбор вейвлета»), количества нулевых моментов (опция «длина фильтра»), а также определение уровня декомпозиции, при котором данное разложение будет проводится. И далее на основе выбранных параметров проводится анализ изображения, состоящий в проведении сепарабельного двумерного прямого и обратного вейвлет-преобразования, в результате которого мы получаем необходимые вейвлет-коэффициенты, которые в дальнейшем будут использованы для очистки изображения от шума.
2. На втором этапе существует возможность изменения количества используемых вейвлет-коэффициентов трех составляющих: по вертикали, горизонтали и диагонали; на каждом из уровней декомпозиции.
3. И далее это сам процесс фильтрации, связанный с оценкой дисперсии шума и поиском пороговой оценки для ограничения уровня тех вейвлет-коэффициентов, которые не удовлетворяют выбранному значению пороговой оценки.

Последний этап состоит уже в выделении контуров очищенного от шума изображения выбранным методом оконтуривания.

Заключение

В статье рассмотрен ряд вопросов теории и практики вейвлет-анализа изображений. Даны основные факты теории пространств вейвлетов (всплесков). Приводится разработанный авторами на языке Delphi программный комплекс фильтрации, оконтуривания и анализа изображений промышленных деталей с применением различных классов вейвлетов. Приведены также примеры, показывающие эффективность использования вейвлет-функций для обработки изображений.

Литература

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004.
2. *Рахманкулов В. З.*, *Герасимов В. В.*, *Ахрем А. А.*, *Лебедев В. В.* Обработка и распознавание изображений промышленных деталей // В сборнике трудов ИСА РАН «Интеллектуальные информационные технологии. Концепции и инструментарий. Том 16». М.: УРСС, 2005. С. 99–129.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2001.
4. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
5. *Дьяконов В. П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.