Асимптотическая оценка сложности решения класса задач о ранце методом ветвей и границ*

Р. М. Колпаков, М. А. Посыпкин

Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)

Статья посвящена вопросам сложности решения задачи об одномерном булевом ранце методом ветвей и границ. Рассмотрен частный случай ветвления по дробной переменной. Построено семейство задач, для элементов которого получена рекуррентная формула для сложности. Получена верхняя асимптотическая оценка для сложности задач этого семейства.

1. Введение

Задача о ранце [1, 2] с одним ограничением является одной из классических задач дискретной оптимизации, применяющейся при моделировании различных экономических процессов, решении проблем, возникающих в промышленном производстве, планировании, управлении и других сферах. Различным вопросам, связанным с данной задачей, посвящено большое число исследований, статей и монографий.

Задача о ранце формулируется следующим образом. Даны n предметов. Предмет i характеризуется весом w_i и ценой p_i. Требуется положить в ранец грузоподъемностью C набор предметов максимальной стоимости. Данное неформальное описание может быть математически записано

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00495–а, 06–07–89079–а).

следующим образом[1]:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C; \\ x_i \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Функция $f(\overline{x})$ называется *целевой функцией* для данной задачи. Известно, что задача о ранце принадлежит к классу NP, т. е. нахождение точного решения данной задачи может потребовать огромных вычислительных ресурсов даже при сравнительно небольших значениях n. Сделать поиск решения более эффективным позволяет метод ветвей и границ. Этот метод заключается в последовательной декомпозиции исходной задачи на подзадачи, с отсевом подзадач, решение которых заведомо не приведет к нахождению оптимума исходной задачи. Отсев позволяет существенно сократить объем перебора. Идея отсева заключается в том, что решается так называемая *оценочная задача*, которая позволяет получить верхнюю оценку для решения рассматриваемой подзадачи. Если оценочная задача не имеет решения или найденная оценка не превосходит наилучшее из найденных на данный момент значений целевой функции f, то подзадача исключается из дальнейшего рассмотрения.

В качестве оценочной часто выбирают линейную релаксацию задачи (1), которая получается заменой дискретных ограничений линейными:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C; \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача релаксации решается за линейное относительно числа переменных количество операций методом Данцига [1, 2]. Известно, что ее решение достигается на наборе значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, содержащем не более одного дробного (не целого) значения (переменную, принимающую это значение, будем называть *дробной* переменной).

[1] Через $\overline{x}$ обозначается набор $(x_1, \ldots, x_n)$.

Декомпозиция состоит в разбиении исходной задачи на две путем присваивания одной из переменных значений 0 и 1 и называется *ветвлением* задачи по переменной. Наиболее распространенными способами выбора переменной для ветвления являются выбор первой переменной в соответствии с некоторым порядком или выбор дробной переменной в задаче релаксации. Пример первого подхода можно найти в работе [3], а второго — в работе [4]. Ветвление по дробной переменной считается стандартным и предлагается в качестве основного в некоторых учебных курсах [5].

Процесс решения задачи методом ветвей и границ можно представить в виде *дерева ветвления*, вершинам которого соответствуют создаваемые подзадачи. Сложность решения задачи методом ветвей и границ принято определять как число вершин V_a в дереве ветвления или как число концевых вершин V_t этого дерева [9]. В обоих случаях эта величина имеет один и тот же порядок, так как число концевых вершин связано с общим числом вершин в дереве ветвления соотношением $V_a = 2 \cdot V_t - 1$. В дальнейшем в работе в качестве меры сложности используется число концевых вершин.

Несмотря на то что в большинстве случаев метод ветвей и границ требует намного меньше операций по сравнению с полным перебором, доказано существование случаев, в которых сложность решения близка к полному перебору. В работе [7] приводится пример следующей задачи:

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} 2x_i \leqslant 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; \quad x_i \in \{0, 1\}, \tag{3}$$

и показывается, что сложность решения этой задачи методом ветвей и границ при любом способе выбора переменной для ветвления составляет

$$\binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}.$$

Задача (3) играет существенную роль в дальнейшем изложении. Будем называть ее *задачей Финкельштейна* в соответствии с фамилией автора монографии [7] и обозначать сложность ее решения через $\Phi(n)$. В работе [8] показано, что если для ветвления выбирается переменная с наибольшим весом, то сложность решения задачи о ранце с n переменными не превосходит $\Phi(n)$, т. е. задача (3) имеет максимальную сложность решения. В [9] также получены верхние оценки сложности решения задачи о ранце методом ветвей и границ при ветвлении по переменной, выбираемой в определенном порядке. Для варианта метода ветвей и границ, рассмотренного в [9], пример (3) также оказывается наиболее сложным. Авторам не известны работы, содержащие верхние оценки для сложности метода ветвей и границ при выборе дробной переменной для ветвления. Исследованию этого случая посвящена настоящая работа.

В данной работе рассмотрено семейство задач $P(T, m, k)$ о ранце, где k — целое число, m — целое неотрицательное число, а $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ — упорядоченное множество натуральных чисел длины n. Задача $P(T, m, k)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{m+n} w_i x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} w_i x_i \leqslant ka + 1,$$

$$\text{где} \quad a \in \mathbb{N}, \quad a \geqslant 2, \quad w_i = \begin{cases} a, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant m; \\ t_{n+m+1-i} \cdot a, & \text{если } m < i \leqslant m + n. \end{cases}$$

Получена рекуррентная формула для сложности $S(T, m, k)$ решения задачи $P(T, m, k)$. Показано, что для любого набора натуральных чисел $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in\mathbb{Z}} S(T, m, k)}{\dbinom{m+n}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}} = 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right).$$

Из данного соотношения вытекает, что в ассимптотике сложность решения задачи $P(T, m, k)$ методом ветвей и границ при ветвлении по дробной переменной не превосходит

$$\frac{3}{2} \dbinom{n+m+1}{\left\lfloor \frac{n+m+1}{2} \right\rfloor},$$

но может быть сколь угодно близкой к этому числу. Таким образом, для рассмотренного варианта метода ветвей и границ существуют задачи $P(T, m, k)$, сложность решения которых превосходит асимптотически в $\frac{3}{2} - \epsilon$ раза сложность решения задачи (3).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится точная формулировка метода ветвей и границ и определяется семейство задач, исследованию которого посвящена оставшаяся часть работы. В разделе 3 выводится рекуррентное соотношение для сложности задач из этого семейства, а в разделе 4 исследуются асимптотические свойства полученного соотношения.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается частный случай задачи о ранце, так называемая *задача о сумме подмножеств* [1, 2]. Приведем ее формулировку и дадим описание метода ветвей и границ применительно к этой задаче.

Задача о сумме подмножеств формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max;\\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C;\\ x_i \in \{0, 1\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Ей соответствует следующая линейная задача релаксации:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max;\\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C;\\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1.\end{gathered} \tag{5}$$

Оптимум задачи (5) не меньше оптимума задачи (4). Поэтому, если оптимальное решение задачи (5) достигается на целочисленном наборе значений $x_1, \ldots, x_n$, то оно является также оптимальным решением задачи (4).

Задача (5) представляет собой одномерную задачу линейного программирования и может быть решена методом Данцига [5] следующим образом. Сначала определяется номер s *дробной переменной* по следующему правилу:

$$s = \min\left\{ j \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{i=1}^{j} w_i > C \right\}.$$

Если такого s не существует, т. е.

$$\sum_{i=1}^{j} w_i \leqslant C,$$

то решением задачи (5) является единичный набор значений $x_1, \ldots, x_n$. В противном случае решение задачи (5) задается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i &= 1, \quad \text{если} \quad i < s, \\ x_i &= 0, \quad \text{если} \quad s < i < n, \\ x_s &= \frac{C - \sum_{i=1}^{s-1} w_i}{w_s}. \end{aligned}$$

Определение дробной переменной и решение задачи релаксации требует линейного относительно числа n количества операций.

Метод ветвей и границ для задачи (4) работает по следующей схеме. Решается задача (5) методом Данцига. Возможны следующие варианты:

1. Решения не существует ($C < 0$), тогда задача (4) также не имеет решения.
2. Найденное оптимальное решение целочисленно, тогда оно также является оптимальным решением задачи (4). Задача решена.
3. Найдено оптимальное решение, которое не является целочисленным. В этом случае порождается две новых задачи: первая получается присваиванием дробной переменной x_s значения 0, а вторая — значения 1. Для каждой из построенных задач повторяется последовательность действий 1–3.

Описанному алгоритму соответствует *дерево ветвления*, вершинам которого ставятся в соответствие получаемые в процессе решения задачи. В случаях 1 и 2 вершина, соответствующая решаемой задаче, является концевой, а в случае 3 она соединяется дугами с вершинами для порожденных задач. Приведенный алгоритм отличается от стандартного алгоритма решения задачи о ранце методом ветвей и границ в двух аспектах. Во-первых, решение задачи релаксации методом Данцига не требует упорядочивания переменных по значениям p_i/w_i. Во-вторых, в отличие от общей задачи о ранце, не производится отсев «по рекорду». Поэтому приведенный алгоритм может быть использован для оценки сложности решения задачи о ранце.

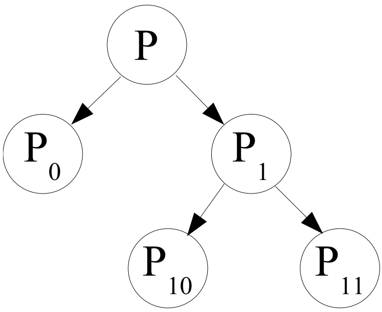
Сложность решения как задачи о ранце, так и, в частности, задачи о сумме подмножеств характеризуется числом получаемых в процессе решения подзадач. Это число совпадает с числом вершин в дереве ветвления. Любая внутренняя вершина в этом дереве имеет степень ветвления 2. Поэтому общее число вершин V_a связано с числом концевых вершин V_t соотношением $V_a = 2 \cdot V_t - 1$. Следовательно, в качестве меры сложности можно также взять число концевых вершин.

Определение 1. *Сложностью* решения задачи о сумме подмножеств называется число концевых вершин в дереве ветвления для метода ветвей и границ.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу P о сумме подмножеств:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 3; \\ x_1 \in \{0, 1\}, \quad x_2 \in \{0, 1\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Решим эту задачу методом ветвей и границ. Задача релаксации имеет решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$. Согласно шагу 3 метода ветвей и границ порождаются две подзадачи P_0 и P_1, полученные присваиванием дробной переменной x_2 значений 0 и 1 соответственно: $P_0 : 2x_1 \to \max;\ x_1 \leqslant 3;\ x_1 \in \{0, 1\}$, $P_1 : 2x_1 \to \max;\ x_1 \leqslant 1;\ x_1 \in \{0, 1\}$. Решим задачу P_0. Решение задачи релаксации имеет вид $x_1 = 1$, является целочисленным и, следовательно, является оптимальным решением задачи P_0. Итоговое решение имеет вид $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, значение целевой функции равно 2. Решим теперь задачу P_1. Решение задачи релаксации имеет вид $x_1 = 1/2$. Присваиванием переменной x_1 значений 0 и 1 порождаются две новые задачи P_{10} и P_{11} с пустым множеством переменных и ограничениями $C_{10} = 1$, $C_{11} = -1$. Вторая задача несовместна. Итоговое решение, получаемое из задачи P_{10}, имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, значение целевой функции равно в этом случае 2. Таким образом, максимум целевой функции равен 2. Дерево ветвления имеет следующий вид:



В этом дереве имеются 3 концевые вершины. Следовательно, сложность решения задачи P равна 3.

Определим класс задач, изучению сложности решения которых посвящена настоящая статья. Для целых неотрицательных n, m, целого k и упорядоченного набора $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ натуральных чисел определим задачу $P(T, m, k)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m+n} w_i x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} w_i x_i \leqslant ka + 1,$$

$$\text{где}\quad a \in \mathbb{N}, \quad a \geqslant 2, \quad t_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$w_i = \begin{cases} a, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant m; \\ t_{n+m+1-i} \cdot a, & \text{если } m < i \leqslant m+n. \end{cases}$$

Заметим, что сложность решения задачи $P(T, m, k)$ не зависит от значения a, а определяется только значением параметров m, k и набором T. Обозначим через $S(T, m, k)$ сложность решения задачи $P(T, m, k)$. Далее в работе выводится рекуррентная формула для $S(T, m, k)$ и исследуется ее асимптотическое поведение.

3. Рекуррентная формула для сложности

Пусть $T = \{t_1, \dots, t_n\}$. Обозначим через $|T|$ число элементов в наборе T, через $\varnothing$ — набор, не содержащий ни одного элемента, и через $T^{(i)}$ — набор $\{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n\}$, полученный из T удалением i-го элемента. Выпишем следующие соотношения для $S(T, m, k)$ при различных k.

Базовые рекуррентные соотношения:

1. Пусть $k < 0$. В этом случае задача не имеет решения, что соответствует дереву ветвления с одной концевой вершиной, т. е. $S(T, m, k) = 1$.
2. Пусть $0 \leqslant k < m$. Дробная переменная имеет номер $l = k + 1 \leqslant m$. При присваивании переменной x_l значения 0 получается задача $P(T, m-1, k)$, а при присваивании переменной x_l значения 1 — задача $P(T, m-1, k-1)$. Следовательно,

$$S(T, m, k) = S(T, m-1, k) + S(T, m-1, k-1).$$

3. Пусть [2]

$$m + \sum_{j=i+1}^{n} t_j \leqslant k < m + \sum_{j=i}^{n} t_j.$$

При присваивании значений 0 и 1 дробной переменной x_{m+i} исходная задача $P(T, m, k)$ распадается на подзадачи $P(T^{(i)}, m, k)$ и $P(T^{(i)}, m, k - t_i)$ соответственно. Поэтому

$$S(T, m, k) = S(T^{(i)}, m, k) + S(T^{(i)}, m, k - t_i).$$

4. Пусть

$$m + \sum_{j=1}^{n} t_i \leqslant k.$$

В этом случае задача $P(T, m, k)$ имеет целочисленное решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+n} = 1, \quad \text{т. е.} \quad S(T, m, k) = 1.$$

Выписанные соотношения позволяют получить рекуррентную формулу, выражающую $S(T, m, k)$ через $S(T', m, k)$, где $|T'| = |T| - 1$. Рассмотрим сначала случай $|T| = 0$, т. е. $T = \varnothing$. При формулировке утверждения нам потребуется обозначение $\binom{a}{b}$ для числа сочетаний из a по b. В соответствии с [6] будем считать, что $\binom{a}{0} = 1$.

Утверждение 1. *Для всех* m, k, *таких что* $k \geqslant -1$, $m \geqslant 0$, $m \geqslant k$, *имеет место равенство*

$$S(\varnothing, m, k) = \binom{m+1}{k+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Рекуррентные соотношения для $S(\varnothing, m, k)$ имеют следующий вид:

$$S(\varnothing, m, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k < 0; \\ S(\varnothing, m-1, k) + S(\varnothing, m-1, k-1), & \text{если } 0 \leqslant k < m,\ m \geqslant 2; \\ 1, & \text{если } k = m. \end{cases} \tag{8}$$

[2] Здесь и далее сумму по пустому множеству полагаем равной 0.

Выписанные рекуррентные соотношения можно представить наглядно в виде треугольной таблицы, в ячейках которой стоят значения $S(\varnothing, m, k)$:

m \ k	−1	0	1	2	…
0	1	1			
1	1	2	1		
2	1	3	3	1	
3	1	4	6	4	1
⋮			…		

На границах полученного треугольника ($k = -1$ и $m = k$) значения функции задаются явным образом, а во внутренней части вычисляются согласно рекуррентному правилу (8). Несложно заметить, что полученный треугольник идентичен треугольнику Паскаля, поэтому

$$S(\varnothing, m, k) = \binom{m+1}{k+1}.$$

Утверждение доказано.

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение треугольника Паскаля:

Определение 2. *Аддитивным треугольником* с вершиной (m_0, k_0) называется функция Δ, принимающая целые значения и заданная на множестве пар целых чисел

$$\{(m, k) \mid k \geqslant k_0, m > m_0, m - m_0 \geqslant k - k_0\},$$

такая что

$$\Delta(m, k) = \Delta(m-1, k) + \Delta(m-1, k-1)$$

для $k > k_0$, $m - m_0 > k - k_0$. Множество

$$\{(m, k) \mid k = k_0, m > m_0\}$$

называется *левой границей*, а множество

$$\{(m, k) \mid m - m_0 = k - k_0, k > k_0\}$$

— *правой границей* треугольника Δ. Объединение левой и правой границ образует *границу* треугольника Δ. Множество пар

$$\{(m, k) \mid k > k_0, m - m_0 > k - k_0\}$$

называется *внутренностью треугольника* Δ.

Аддитивные треугольники удобно изображать в виде треугольных таблиц. В следующей таблице представлен треугольник с вершиной (m_0, k_0), элементы границы выделены серым тоном:

m \ k	…	k_0	k_0+1	…		
⋮	…	⋮	⋮			
m_0	…					
m_0+1	…	*	*			
m_0+2	…	*	*	*		
m_0+3	…	*	*	*	*	
⋮			…			

Над аддитивными треугольниками можно определить операции суммы и разности.

Определение 3. Пусть Δ' и Δ'' — аддитивные треугольники с вершиной (m_0, k_0). Функция Δ, такая что $\Delta(m, k) = \Delta'(m, k) + \Delta''(m, k)$ на множестве $\{(m, k) \mid k \geqslant k_0,\ m > m_0,\ m - m_0 \geqslant k - k_0\}$, называется *суммой* треугольников Δ' и Δ''. Будем в этом случае писать $\Delta = \Delta' + \Delta''$.

Аналогично определяется понятие *разности* двух аддитивных треугольников. Несложно показать, что если Δ' и Δ'' — аддитивные треугольники с вершиной (m_0, k_0), то $\Delta' - \Delta''$ и $\Delta' + \Delta''$ также удовлетворяют определению аддитивного треугольника с вершиной (m_0, k_0).

Заметим, что поскольку значение аддитивного треугольника на его внутренности полностью определяется значениями на границе, то из выполнения условия $\Delta(m, k) = \Delta'(m, k) + \Delta''(m, k)$ на границе следует выполнение этого условия на всей области определения, т. е. $\Delta = \Delta' + \Delta''$. Это наблюдение позволяет проверять, что один треугольник является суммой или разностью двух других на основании сравнения значений на границе.

Определим также понятие *подтреугольника*.

Определение 4. Пусть Δ — аддитивный треугольник с вершиной (m_0, k_0), тогда его *подтреугольником* Δ' с вершиной (m_1, k_1), $m_1 \geqslant m_0$, $k_1 \geqslant k_0$, называется аддитивный треугольник с вершиной (m_1, k_1), такой что $\Delta'(m, k) = \Delta(m, k)$ при всех m, k таких, что $m > m_1$, $k \geqslant k_1$, $m - m_1 \geqslant k - k_1$.

Перейдем к рассмотрению рекуррентных соотношений для случая $|T| > 0$.

Утверждение 2. *Справедливы следующие соотношения*:
если $0 \leqslant k < t_n - 1$, *то*

$$S(T, m, k) = S(T^{(n)}, m, k) + \binom{m}{k}; \tag{9}$$

если $t_n - 1 \leqslant k \leqslant m - 1$, *то*

$$S(T, m, k) = \\ = S(T^{(n)}, m, k) + S(T^{(n)}, m, k - t_n) + \binom{m}{k} - \binom{m - t_n + 1}{k - t_n + 1}; \tag{10}$$

если $m + \sum\limits_{j=i+1}^{j=n} t_j \leqslant k < m + \sum\limits_{j=i}^{j=n} t_j$ *для* $i = 1, \ldots, n$, *то*

$$S(T, m, k) = S(T^{(i)}, m, k) + S(T^{(i)}, m, k - t_i). \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (11) является непосредственным следствием полученных ранее базовых рекуррентных соотношений. Докажем справедливость соотношений (9) и (10).

Рассмотрим рекуррентные соотношения для $S(T, m, k)$ при $|T| > 0$ и $0 \leqslant k < m$:

$$S(T,m,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k < 0; \\ S(T,m-1,k) + S(T,m-1,k-1), & \text{если } 0 \leqslant k < m; \\ S(T^{(n)},m,k) + S(T^{(n)},m,k-t_n), & \text{если } k = m. \end{cases} \tag{12}$$

Этим рекуррентным соотношениям соответствует аддитивный треугольник Δ_1 следующего вида:

m \ k	−1	0	1	2	…
0	1	$S(T^{(n)},0,0)+$ $+S(T^{(n)},0,-t_n)$			
1	1		$S(T^{(n)},1,1)+$ $+S(T^{(n)},1,1-t_n)$		
2	1			$S(T^{(n)},2,2)+$ $+S(T^{(n)},2,2-t_n)$	
⋮			…		

Треугольник Δ_1 может быть представлен в виде суммы двух треугольников Δ_2 и Δ_3. Треугольник Δ_2 имеет следующий вид:

m \ k	−1	0	1	2	…
0	1	$S(T^{(n)}, 0, 0)$			
1	1		$S(T^{(n)}, 1, 1)$		
2	1			$S(T^{(n)}, 2, 2)$	
⋮			…		

Этот треугольник представляет собой в точности треугольник для $S(T^{(n)}, m, k)$, поэтому

$$\Delta_2(m, k) = S(T^{(n)}, m, k).$$

Треугольник Δ_3 имеет вид:

m \ k	−1	0	1	2	…
0	0	$S(T^{(n)}, 0, -t_n)$			
1	0		$S(T^{(n)}, 1, 1-t_n)$		
2	0			$S(T^{(n)}, 2, 2-t_n)$	
⋮			…		

Так как $S(T^{(n)}, m, k) = 1$ при $k < 0$, то первые t_n элементов правой границы равны 1. Поэтому этот треугольник может быть разложен на сумму двух треугольников Δ_4 и Δ_5. Треугольник Δ_4 имеет вид:

m \ k	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	1						
1	0		1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		1			
t_n-1	0			$\cdots$		0		
t_n	0			$\cdots$			0	
$\vdots$					$\cdots$			

Левая граница этого треугольника представляет собой последовательность, состоящую из нулей. Первые $t_n - 2$ элемента правой границы — единицы, а остальные — нули. Этот треугольник может быть представлен в виде разности двух треугольников: $\Delta_4 = \Delta_7 - \Delta_8$. Треугольник Δ_7 имеет вид:

m \ k	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	1						
1	0		1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		1			
t_n-1	0			$\cdots$		1		
t_n	0			$\cdots$			1	
$\vdots$					$\cdots$			

Левая граница этого треугольника представляет собой последовательность, состоящую из нулей, а правая граница состоит из единиц. Несложно заметить, что

$$\Delta_7(m, k) = \binom{m}{k}$$

для $k \geqslant 0$. Треугольник Δ_8 имеет вид:

m \ k	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	0						
1	0		0					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		0			
t_n-1	0			$\cdots$		1		
t_n	0			$\cdots$			1	
$\vdots$					$\cdots$			

Левая граница этого треугольника представляет собой последовательность, состоящую из нулей. Первые t_n-2 элемента правой границы — нули, а остальные — единицы. Этот треугольник также представляет собой треугольник Паскаля, сдвинутый на t_n-1 вправо и вниз. Поэтому

$$\Delta_8(m,k)=\begin{cases}0, & \text{если } -1\leqslant k<t_n-1;\\ \dbinom{m-t_n+1}{k-t_n+1}, & \text{если } t_n-1\leqslant k.\end{cases}$$

Так как $\Delta_4=\Delta_7-\Delta_8$, то

$$\Delta_4(m,k)=\begin{cases}\dbinom{m}{k}, & \text{если } 0\leqslant k<t_n-1;\\ \dbinom{m}{k}-\dbinom{m-t_n+1}{k-t_n+1}, & \text{если } t_n-1\leqslant k.\end{cases}$$

Треугольник Δ_5 имеет следующий вид:

m \ k	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	t_n+1	$\ldots$
0	0	0							
1	0	0	0						
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$					

Окончание таблицы

m \ k	-1	0	1	$\dots$	t_n-2	t_n-1	t_n	t_n+1	$\dots$
t_n-2	0		$\cdots$		0				
t_n-1	0		$\cdots$		0	1			
t_n	0		$\cdots$		0	1	$S(T^{(n)}, t_n, 0)$		
t_n+1	0		$\cdots$		0	1		$S(T^{(n)}, t_n+1, 1)$	
$\vdots$							$\dots$		

Левая граница треугольника Δ_5 содержит только нули. Правая граница является последовательностью вида

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{t_n-2}, 1, S(T^{(n)}, t_n, 0), S(T^{(n)}, t_n+1, 1), \dots, S(T^{(n)}, t_n+i, i), \dots .$$

Очевидно, что $\Delta_5(m,k) = 0$ при $k \leqslant t_n - 2$, $\Delta_5(m,k) = 1$ при $k = t_n - 1$. Легко заметить, что подтреугольник с вершиной $(t_n - 1, t_n - 1)$ треугольника Δ_5 является подтреугольником треугольника S_{n-1} с вершиной $(t_n - 1, -1)$. Следовательно,

$$\Delta_5(m,k) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant k < t_n - 1; \\ S(T^{(n)}, m, k - t_n), & \text{если } t_n - 1 \leqslant k. \end{cases}$$

Суммируя выражения, полученные для треугольников Δ_2, Δ_4 и Δ_5, получаем равенство

$$S(T,m,k) = \begin{cases} S(T^{(n)}, m, k) + \dbinom{m}{k}, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant m; \\ S(T^{(n)}, m, k) + S(T^{(n)}, m, k - t_n) + \dbinom{m}{k} - \dbinom{m - t_n + 1}{k - t_n + 1}, \\ \quad \text{если } t_n - 1 \leqslant k \leqslant m. \end{cases}$$

Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 2 можно применять при получении точных и асимптотических формул для $S(T,m,k)$. Получение точных формул продемонстрируем на следующем примере.

Пример 2. Пусть требуется вычислить сложность решения задачи $P(\{2\}, m, k)$. Рассмотрим различные варианты значения k. Пусть $0 \leqslant k < 2$. Согласно утверждению 2 имеем

$$S(\{2\}, m, k) = S(\varnothing, m, k) + \binom{m}{k}.$$

Используя утверждение 1, получаем

$$S(\{2\}, m, k) = \binom{m+1}{k+1} + \binom{m}{k}.$$

Пусть теперь $2 \leqslant k < m$. Согласно утверждениям 1 и 2 получим

$$S(\{2\}, m, k) = \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+1}{k-1} + \binom{m}{k} - \binom{m-1}{k-1} = $$
$$= \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+1}{k-1} + \binom{m-1}{k}.$$

Если $m \leqslant k < m+2$, то аналогичным образом получаем

$$S(\{2\}, m, k) = S(\varnothing, m, k) + S(\varnothing, m, k-2) = \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+1}{k-1}.$$

4. Асимптотическая оценка сложности

В данном разделе мы изучаем асимптотическое поведения функции $\max\limits_k S(T, m, k)$ при $m \to \infty$. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Утверждение 3. *Пусть γ, γ' — вещественные числа, такие что $0 < \gamma' < \gamma \leqslant 1/2$. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lfloor \gamma' m \rfloor}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lceil (1-\gamma') m \rceil}}{\binom{m}{\lceil (1-\gamma) m \rceil}} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\frac{\binom{m}{\lfloor \gamma' m \rfloor}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m \rfloor}} = \frac{\frac{m!}{(\lfloor \gamma' m \rfloor)!(m-\lfloor \gamma' m \rfloor)!}}{\frac{m!}{(\lfloor \gamma m \rfloor)!(m-\lfloor \gamma m \rfloor)!}} = \frac{\prod\limits_{i=\lfloor \gamma' m \rfloor}^{\lfloor \gamma m \rfloor} i}{\prod\limits_{i=m-\lfloor \gamma m \rfloor}^{m-\lfloor \gamma' m \rfloor} i} =$$
$$= \prod_{i=0}^{i=\lfloor \gamma m \rfloor - \lfloor \gamma' m \rfloor} \frac{i + \lfloor \gamma' m \rfloor}{i + m - \lfloor \gamma m \rfloor} \leqslant \prod_{i=0}^{i=\lfloor \gamma m \rfloor - \lfloor \gamma' m \rfloor} \frac{\lfloor \gamma m \rfloor}{m - \lfloor \gamma' m \rfloor} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=0}^{i=\lfloor\gamma m\rfloor-\lfloor\gamma' m\rfloor} \frac{\gamma m}{(1-\gamma')m} \leqslant \left(\frac{\gamma}{1-\gamma'}\right)^{\lfloor\gamma m\rfloor-\lfloor\gamma' m\rfloor+1}$$

и $\dfrac{\gamma}{1-\gamma'} < 1$ вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lfloor\gamma' m\rfloor}}{\binom{m}{\lfloor\gamma m\rfloor}} \leqslant \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma'}\right)^{\lfloor\gamma m\rfloor-\lfloor\gamma' m\rfloor+1} = 0.$$

Аналогично показывается, что $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\binom{m}{\lceil(1-\gamma')m\rceil}}{\binom{m}{\lceil(1-\gamma)m\rceil}} = 0$.

Утверждение 4. *Пусть* a *и* b *— целые числа,* γ *— вещественное число, такое что* $0 < \gamma < 1$. *Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+b}{\lfloor\gamma m\rfloor+a}}{\binom{m}{\lfloor\gamma m\rfloor}} = \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a}. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через $C(a,b)$ выражение, стоящее под знаком предела. Преобразуем это выражение:

$$C(a,b) = \frac{\binom{m+b}{\lfloor\gamma m\rfloor+a}}{\binom{m}{\lfloor\gamma m\rfloor}} = \frac{\frac{(m+b)!}{(\lfloor\gamma m\rfloor+a)!(m-\lfloor\gamma m\rfloor+b-a)!}}{\frac{m!}{\lfloor\gamma m\rfloor!(m-\lfloor\gamma m\rfloor)!}} =$$

$$= \frac{(m+b)!}{m!} \cdot \frac{\lfloor\gamma m\rfloor!}{(\lfloor\gamma m\rfloor+a)!} \cdot \frac{(m-\lfloor\gamma m\rfloor)!}{(m-\lfloor\gamma m\rfloor+b-a)!)}.$$

Преобразуем первый сомножитель:

$$\frac{(m+b)!}{m!} = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{b}(m+i), & \text{если } b \geqslant 0; \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{i=b+1}^{0}(m+i)}, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Легко заметить, при любом b справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(m+b)!}{m!}}{m^b} = 1.$$

Будем писать $f(m) \sim g(m)$, если $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 1$. Тогда $\frac{(m+b)!}{m!} \sim m^b$. Аналогично показывается справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\lfloor \gamma m \rfloor!}{(\lfloor \gamma m \rfloor + a)!} \sim \lfloor \gamma m \rfloor^{-a} \sim (\gamma m)^{-a},$$

$$\frac{(m - \lfloor \gamma m \rfloor)!}{(m - \lfloor \gamma m \rfloor + b - a)!} \sim (m - \lfloor \gamma m \rfloor)^{a-b} \sim ((1-\gamma)m)^{a-b}.$$

Следовательно,

$$C(a,b) \sim m^b \cdot (\gamma m)^{-a} \cdot ((1-\gamma)m)^{a-b} =$$

$$= m^{b-a+a-b} \cdot \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a} = \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a}.$$

Тем самым утверждение доказано.

В случае $\gamma = 1/2$ формула (14) приобретает более простой вид:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+b}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + a}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = 2^b. \tag{15}$$

Покажем, каким образом соотношение (15) может быть применено для асимптотического анализа сложности задачи из примера 2 при $k = \lfloor m/2 \rfloor$. Для этого, учитывая соотношение (15), сравним ее сложность с числом $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(\{2\}, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \frac{\binom{m+1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} + \binom{m+1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} + \binom{m-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} =$$

$$= 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Задача Финкельштейна с тем же количеством переменных имеет сложность $\Phi(m+1) = \binom{m+2}{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 1}$. Используя снова соотношение (15), можно показать, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\binom{m+2}{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 1}}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} = 4$. Таким образом, $S(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor) \sim \frac{9}{8}\Phi(m+1)$. Другими словами, сложность задачи $P(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor)$ равна асимптотически $9/8$ сложности задачи Финкельштейна.

Утверждение 5. *Для любого набора* $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ *натуральных чисел и любого целого* t *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(T, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right).$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n = 0$. Согласно утверждению 1 имеем $S(\varnothing, m, \lfloor m/2 \rfloor + t) = \left(\begin{matrix} m+1 \\ \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t + 1 \end{matrix} \right)$. Поэтому согласно формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(\varnothing, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t + 1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = 2.$$

Предположим теперь, что доказываемое утверждение справедливо для всех наборов $|T|$ длины $n-1$. Пусть $|T| = n$. Заметим, что найдется M такое, что при $m > M$ выполняется $t_n - 1 \leqslant \lfloor m/2 \rfloor + t \leqslant m - 1$. Поэтому согласно формуле (10) имеем

$$\frac{S(T, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \frac{1}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \cdot \left(S\left(T^{(n)}, m, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + t \right) + \right.$$
$$\left. + S\left(T^{(n)}, m, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + t - t_n \right) + \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t} - \binom{m - t_n + 1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t - t_n + 1} \right).$$

Согласно предположению индукции и формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(T^{(n)}, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+n-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{S(T^{(n)}, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right) \right).$$

Аналогично показывается справедливость соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(T^{(n)}, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t - t_n)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right) \right).$$

С помощью формулы (15) можно также установить справедливость равенства

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+t}-\binom{m-t_n+1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+t-t_n+1}}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+t_n-1}}.$$

Суммируя полученные выражения, получаем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S(T,m,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+t)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+t_n-1}}$$

$$=2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Для любого набора* $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ *натуральных чисел, любого вещественного* γ, $0<\gamma<1/2$, *и любого целого* t *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(T,m,k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n=0$. Согласно утверждению 1 имеем

$$\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(\varnothing,m,k+t)=\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}\binom{m+1}{k+t+1}\leqslant\binom{m+1}{\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor}.$$

С другой стороны, найдется M такое, что при $m>M$ выполнено неравенство $\gamma m\leqslant\lfloor m/2\rfloor\leqslant(1-\gamma)m$. Таким образом, для всех $m>M$ выполнено

$$S\left(\varnothing,m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+t\right)\leqslant\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(\varnothing,m,k+t).$$

Согласно утверждению 5 имеем $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{S(\varnothing,m,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+t)}{\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=2$. Согласно формуле (15) получаем $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\binom{m+1}{\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor}}{\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=2$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(\varnothing,m,k+t)}{\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}=2.$$

Тем самым утверждение доказано для случая $n=0$.

Предположим теперь, что утверждение справедливо для всех наборов T длины n − 1. Рассмотрим набор T длины n. Обозначим

$$\frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m} S(T,m,k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}$$

через V(m). Заметим, что существует M' такое, что при $m > M'$ из $\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m$ вытекает, что $t_n - 1 \leqslant k+t \leqslant m-1$. Поэтому при $m > M'$ мы можем оценить V(m) сверху согласно формуле (10):

$$V(m) \leqslant V_1(m) + V_2(m) + V_3(m),$$

где

$$V_1(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m} S(T^{(n)},m,k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}},$$

$$V_2(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m} S(T^{(n)},m,k+t-t_n)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}},$$

$$V_3(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m} \left(\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1}\right)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}.$$

Покажем существование предела $\lim\limits_{m\to\infty} V_1(m)$. Так как $|T^{(n)}| = n-1$, то согласно предположению индукции и формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} V_1(m) = \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+n-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\right).$$

Аналогично доказывается существование предела $\lim\limits_{m\to\infty} V_2(m)$:

$$\lim_{m\to\infty} V_2(m) = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\right).$$

Из очевидного равенства

$$\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1} = \sum_{i=1}^{t_n-1} \binom{m-i}{k+t-i+1}$$

следует, что

$$V_3(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m} \left(\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1}\right)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \leqslant \sum_{i=1}^{t_n-1} \frac{\max\limits_{\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m} \binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}.$$

Обозначим сумму

$$\sum_{i=1}^{t_n-1} \frac{\max\limits_{\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m} \binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}$$

через $V_3'(m)$, а сумму $V_1(m) + V_2(m) + V_3'(m)$ через $V'(m)$. Очевидно, что $V(m) \leqslant V'(m)$. В силу формулы (15) справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m} \binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m-i}{\lfloor \frac{m-i+1}{2} \rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} = \frac{1}{2^{n+i}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} V_3'(m) = \sum_{i=1}^{t_n-1} \frac{1}{2^{n+i}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+t_n-1}}.$$

Суммируя выражения для $\lim\limits_{m\to\infty} V_1(m)$, $\lim\limits_{m\to\infty} V_2(m)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} V_3'(m)$, получим

$$\lim_{m\to\infty} V'(m) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right) + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+t_n-1}} =$$
$$= 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Заметим, что существует M'' такое, что при $m > M''$ выполняется $\gamma m < \lfloor m/2 \rfloor < (1-\gamma)m$. Поэтому

$$V(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m} S(T, m, k)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \geqslant \frac{S(T, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}.$$

Обозначим выражение

$$\frac{S(T, m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}$$

через $V''(m)$. Согласно утверждению 5 имеем

$$\lim_{m\to\infty} V''(m) = 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} V'(m) = \lim_{m\to\infty} V''(m) = 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)$$

и для $m > \max(M', M'')$ выполняется $V''(m) \leqslant V(m) \leqslant V'(m)$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} V(m) = 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 7. *Для любого набора* $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ *натуральных чисел, любого вещественного* γ, $0 < \gamma < 1/2$, *и любого целого* t *справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(T, m, k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} = 0.$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n = 0$. Выберем произвольное γ', удовлетворяющее соотношению $0 < \gamma < \gamma' < 1/2$. Тогда найдется M такое, что для любого $m > M$ выполнено $\gamma' m \leqslant \lfloor m/2 \rfloor \leqslant (1-\gamma')m$ и $k+t \in [0, \gamma' m] \cup [(1-\gamma')m, \infty)$. Поэтому при $m > M$ согласно формуле (7) получим

$$\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(\varnothing, m, k+t)}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} \leqslant \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma' m]\,\cup\,[(1-\gamma')m,\infty]} \binom{m+1}{k+1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\left(\binom{m+1}{\lfloor \gamma' m\rfloor+1}, \binom{m+1}{\lfloor (1-\gamma')m\rfloor-1}\right)}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} = \max\left(\frac{\binom{m+1}{\lfloor \gamma' m\rfloor+1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}}, \frac{\binom{m+1}{\lfloor (1-\gamma')m\rfloor-1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}}\right).$$

Применяя формулу (13), несложно показать, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+1}{\lfloor \gamma' m\rfloor+1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+1}{\lfloor (1-\gamma')m\rfloor-1}}{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(\varnothing, m, k)}{\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 0.$$

Пусть утверждение доказано для любого набора T длины $n-1$. Докажем справедливость утверждения при $|T| = n$. Из соотношений (9)–(11) следует, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо соотношение

$$S(T, m, k+t) \leqslant S(T^{(i)}, m, k+t) + S(T^{(i)}, m, k+t-t_i) + \binom{m}{k+t}. \qquad (16)$$

Так как $|T^{(i)}| = n-1$, то согласно предположению индукции и формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t)}{\binom{m+n-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 0. \qquad (17)$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t-t_i)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 0. \qquad (18)$$

Аналогично случаю $n = 0$ доказывается справедливость соотношения

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} \binom{m}{k+t}}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 0. \qquad (19)$$

Из соотношений (16)–(19) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\,\cup\,[(1-\gamma)m,\infty)} S(T, m, k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 0.$$

Утверждение доказано.

Следующая теорема является непосредственным следствием утверждений 5, 6 и 7.

Теорема 1. *Для любого набора* $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ *натуральных чисел справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right). \tag{20}$$

Формула (20) может быть использована непосредственно для вычисления асимптотической сложности $\max\limits_k S(T,m,k)$ для заданного набора T. В частности, для задачи из примера 2, используя формулу (20), получим

$$\max_k S\Big(\{2\},m,k\Big)\sim\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\binom{m+1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}=\frac{9}{4}\binom{m+1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}.$$

Теорема 1 позволяет получить

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого набора* T *натуральных чисел*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}\leqslant 3,\quad \textit{где}\quad n=|T|;$$

2) *для любого* $\epsilon>0$ *существует набор* T *натуральных чисел такой, что*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}\geqslant 3-\epsilon,\quad \textit{где}\quad n=|T|.$$

Доказательство. Справедливость первого утверждения устанавливается следующим образом:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\leqslant 2+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leqslant 3.$$

Докажем второе утверждение. Пусть $M=1+\log_2(1/\epsilon)$. Положим $n=M$, $t_1=\ldots=t_n=M$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)=$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2^M}\right)^2\geqslant 3-\frac{1}{2^{M-1}}=3-\epsilon.$$

Следствие доказано.

Заметим, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Phi(m+n)}{\binom{m+n}{[\frac{m}{2}]}} = 2.$$

Поэтому содержательно следствие 1 означает, что среди задач рассматриваемого класса не существует примеров, сложность решения которых асимптотически больше, чем $3/2$ сложности решения задачи Финкельштейна, при этом существуют задачи, сложность решения которых как угодно близко приближается асимптотически к $3/2$ сложности решения задачи Финкельштейна.

5. Заключение

В работе показано, что в случае ветвления по дробной переменной сложность решения задачи о сумме подмножеств может быть асимптотически в $1{,}5 - \epsilon$ раза выше, чем сложность решения примера (3), предложенного в [7]. Тем самым показано, что этот пример не является наиболее сложным для рассматриваемого варианта метода ветвей и границ. В то же время, если ветвление производится по переменной с максимальным весом, то пример (3) оказывается самым сложным [8].

Полученные в работе результаты планируется развивать в следующих направлениях:

1) получение оценок сложности различных вариантов метода ветвей и границ в среднем на некоторой совокупности задач;
2) получение верхней оценки сложности для метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной;
3) получение оценок сложности для других вариантов метода ветвей и границ.

Авторы выражают благодарность профессору А. Б. Угольникову за плодотворное обсуждение изложенных в работе утверждений, а также профессору И. Х. Сигалу за внимание к работе.

Литература

1. *Kellerer H.*, *Pfershy U.*, *Pisinger D.* Knapsack Problems. Springer Verlag, 2004.
2. *Martello S.*, *Toth P.* Knapsack Problems. John Wiley & Sons Ltd., 1990.
3. *Kolesar P. J.* A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1967. V. 13. № 9. P. 723–735.

4. *Greenberg H.*, *Hegerich R. L.* A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1970. V. 16. № 5. P. 327–332.
5. *Сигал И. Х.*, *Иванова А. П.* Введение в прикладное дискретное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
7. *Финкельштейн Ю. Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
8. *Колпаков Р. М.*, *Посыпкин М. А.*, *Сигал И. Х.* О сложности решения задачи о булевом ранце // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: МАКС Пресс, 2006. С. 166–171.
9. *Гришухин В. П.* Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. 1976. С. 203–230.