

Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце^{*}

Р. М. Колпаков, М. А. Посыпкин

*Институт системного анализа Российской академии наук
(ИСА РАН)*

Статья посвящена вопросам сложности решения задачи об одномерном булевом ранце методом ветвей и границ. Для задачи о ранце получены две верхние оценки сложности. Выделен частный случай, когда сложность ведет себя как полином при росте размерности задачи. Для задачи о сумме подмножеств получены верхняя и нижняя оценки сложности.

1. Введение

Задача о ранце является одной из классических задач дискретной оптимизации. Исследованию этой задачи посвящены многочисленные статьи и монографии [1, 2].

В настоящее время существуют различные алгоритмы решения задачи о ранце, среди которых одними из наиболее распространенных являются методы ветвей и границ (МВГ). Эти методы основаны на древовидной декомпозиции пространства допустимых решений. За счет исключения из рассмотрения подзадач, решение которых заведомо не улучшит текущий результат, часто удается существенно снизить объем вычислений по сравнению с полным перебором.

Особенностью метода ветвей и границ является то, что в зависимости от коэффициентов задачи решение ее данным методом может иметь существенно различную трудоемкость. В частности, доказано [3] существование постановок задачи о ранце, для которых сложность решения,

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 05–01–00495-а, 06–07–89079-а.

определяемая числом создаваемых подзадач, имеет порядок $\frac{2^n}{\sqrt{n}}$. В то же время тривиально строится пример задачи, для решения которой требуется один шаг МВГ. Поэтому важным представляется получение оценок сложности, зависящих от коэффициентов задачи. Такие оценки позволяют сделать определенные выводы о трудоемкости задачи, не решая ее.

В настоящей работе для задачи о ранце получены две верхние оценки сложности, зависящие от коэффициентов. Выделен частный случай, когда сложность ведет себя как полином при росте размерности задачи. Также для задачи о сумме подмножеств получены верхняя и нижняя оценки сложности.

2. Некоторые свойства бинарных деревьев

В этом разделе устанавливаются некоторые свойства бинарных деревьев, которые будут необходимы в дальнейшем для получения оценок трудоемкости метода ветвей и границ. Для целей дальнейшего изложения понадобятся следующие определения:

Определение 1. *Бинарным деревом* будем называть ориентированное дерево, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) каждая дуга помечена 0 или 1;
- 2) из корневой вершины исходит две дуги, помеченные 0 и 1 соответственно;
- 3) из каждой внутренней вершины исходит две дуги, помеченные 0 и 1 соответственно и входит одна дуга, помеченная произвольным образом.

Определение 2. Пусть a — вершина дерева T . Будем называть дерево S *поддеревом с корнем a дерева T* , если все вершины S являются вершинами T , все дуги S являются дугами T и a — корень дерева S . Если a при этом является корнем дерева T , то будем называть S *корневым поддеревом дерева T* .

Определение 3. Пусть a — вершина дерева T . Будем называть дерево S *максимальным поддеревом с корнем a дерева T* , если любое поддерево с корнем a дерева T будет также поддеревом с корнем a дерева S .

Определение 4. Взаимно однозначное соответствие, переводящее вершины бинарного дерева T_1 в вершины бинарного дерева T_2 , дуги T_1 в дуги T_2 , сохраняющее инцидентность дуг и вершин и разметку деревьев, будем называть *изоморфизмом деревьев T_1 и T_2* .

Определение 5. Два бинарных дерева T_1 и T_2 будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм, отображающий T_1 в T_2 .

Определим следующие подмножества вершин бинарного дерева:

$V(T)$ — множество вершин дерева T ;

$V_t(T)$ — множество концевых вершин дерева T ;

$V_t^0(T)$ — множество концевых вершин дерева T , в которые входит дуга, помеченная 0;

$V_t^1(T)$ — множество концевых вершин дерева T , в которые входит дуга, помеченная 1.

Введем также следующие обозначения для мощностей перечисленных подмножеств:

$$v(T) = |V(T)|, \quad v_t(T) = |V_t(T)|, \quad v_t^0(T) = |V_t^0(T)|, \quad v_t^1(T) = |V_t^1(T)|.$$

Если a — некоторая вершина дерева T , то последовательность дуг, соединяющую корень дерева с этой вершиной будем обозначать через $\pi(a)$. Число дуг, помеченных 0, в этой последовательности обозначим через $e_0(a)$, а число дуг, помеченных 1, — через $e_1(a)$.

Определение 6. Будем называть (c_0, c_1) -деревом бинарное дерево T , такое что

- 1) $e_0(x) = c_0$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^0(T)$;
- 2) $e_1(x) = c_1$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^1(T)$.

Несложно показать, что для любых натуральных c_0, c_1 существует (c_0, c_1) -дерево. Доказываемые далее утверждения 1, 2, 3 содержат оценки числа вершин в бинарных деревьях.

Утверждение 1. Пусть T — (c_0, c_1) -дерево. Тогда $v_t(T) = \binom{c_0 + c_1}{c_0}$.

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции по числу n вершин в дереве. В бинарном дереве не может быть менее трех вершин. Пусть $n = 3$. Тогда дерево имеет вид, представленный на рис. 1, $c_0 = 1$, $c_1 = 1$. Это дерево имеет две концевые вершины, следовательно для него справедливо доказываемое соотношение, так как

$$\binom{2}{1} = 2.$$

Пусть для некоторого натурального $n > 3$ утверждение доказано для деревьев с числом вершин, меньшим n . Докажем его для дерева с числом

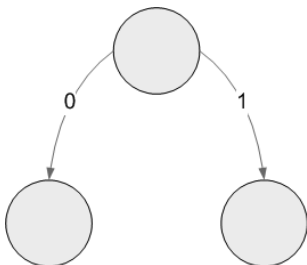
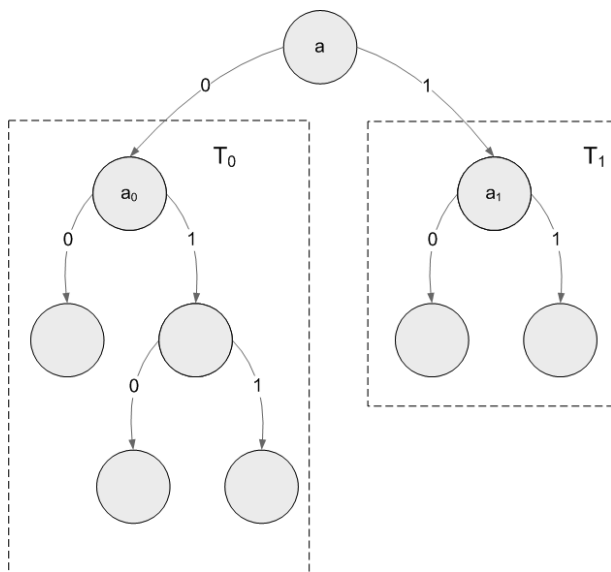


Рис. 1. Элементарное бинарное дерево

Рис. 2. Декомпозиция дерева T на деревья T_0 и T_1

вершин n . Пусть T — бинарное дерево, $v(T) = n$. Рассмотрим корневую вершину a дерева T . Пусть a_0 и a_1 — вершины, соединенные с a дугами, помеченными 0 и 1 соответственно (рис. 2). Пусть также T_0 и T_1 — поддеревья дерева T с корнями a_0 и a_1 соответственно. Деревья T_0 и T_1 являются бинарными и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$v(T_0) \leq n - 1,$$

$$v(T_1) \leq n - 1,$$

$$e_0(x) = c_0 - 1 \quad \text{для всех } x \in V_1^0(T_0),$$

$$\begin{aligned}
e_1(x) &= c_1 \quad \text{для всех } x \in V_t^1(T_0), \\
e_0(x) &= c_0 \quad \text{для всех } v \in V_t^0(T_1), \\
e_1(v) &= c_1 - 1 \quad \text{для всех } v \in V_t^1(T_1).
\end{aligned}$$

Согласно предположению индукции,

$$v_t(T_0) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 - 1 \\ c_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad v_t(T_1) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 - 1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$v_t(T) = v_t(T_0) + v_t(T_1) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 - 1 \\ c_0 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 + c_1 - 1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть T — бинарное дерево, для которого справедливы следующие соотношения:

- 1) $e_0(x) \geq c_0$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^0(T)$;
- 2) $e_1(x) \geq c_1$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^1(T)$.

$$\text{Тогда } v_t(T) \geq \begin{pmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Построим корневое (c_0, c_1) -поддерево T^* дерева T следующим образом. Обозначим через $E_0(T)$ множество

$$\{x \in V_t^0(T) \mid e_0(x) > c_0\},$$

а через $E_1(T)$ обозначим множество

$$\{x \in V_t^1(T) \mid e_1(x) > c_1\}.$$

Если $E_0(T) = \emptyset$ и $E_1(T) = \emptyset$, то $T^* = T$.

Пусть $E_0(T) \neq \emptyset$. Рассмотрим вершину $x \in E_0(T)$. Существует вершина x' , $x' \in \pi(x)$, такая что $e_0(x) = c_0$ и дуга, входящая в x' , помечена 0. Получим корневое поддерево T' дерева T удалением из него максимального поддерева с корнем в x' . Дерево T' удовлетворяет соотношениям 1, 2 условия доказываемого утверждения, так как все его концевые вершины кроме x' также являются концевыми вершинами дерева T , а для вершины x' справедливо $e_0(x') = c_0$. Заметим, что

$$|E_0(T')| \leq |E_0(T)| - 1.$$

Повторяя данную процедуру не более чем $|E_0(T)|$ раз, получим поддерево T'' дерева T , удовлетворяющее соотношениям 1, 2 условия доказываемого утверждения, такое что $|E_0(T'')| = 0$. Аналогично строим поддерево T^* дерева T'' , такое что $|E_1(T^*)| = 0$. Таким образом, поддерево T^* удовлетворяет соотношениям 1, 2 условия доказываемого утверждения и для него справедливы соотношения $E_0(T^*) = \emptyset$ и $E_1(T^*) = \emptyset$. Следовательно T^* является (c_0, c_1) -деревом. Согласно утверждению 1,

$$v_t(T^*) = \binom{c_0 + c_1}{c_0}.$$

Так как T^* — поддерево T , то

$$v_t(T) \geq \binom{c_0 + c_1}{c_0}.$$

Что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Пусть T — бинарное дерево, для которого справедливы следующие соотношения:

- 1) $e_0(x) \leq c_0$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^0(T)$;
- 1) $e_1(x) \leq c_1$ для всех вершин x , принадлежащих $V_t^1(T)$.

$$\text{Тогда } v_t(T) \leq \binom{c_0 + c_1}{c_0}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что существует (c_0, c_1) -дерево T^* , содержащее дерево T . Обозначим через $E_0(T)$ множество

$$\{x \in V_t^0(T) \mid e_0(x) < c_0\},$$

а через $E_1(T)$ обозначим множество

$$\{x \in V_t^1(T) \mid e_1(x) < c_1\}.$$

Если $E_0(T) = \emptyset$ и $E_1(T) = \emptyset$, то $T^* = T$.

Рассмотрим вершину $x \in E_0(T)$. Пусть $e_0(x) = c'_0$, $e_1(x) = c'_1$. Тогда $c'_0 < c_0$, $c'_1 < c_1$. Введем обозначения: $d_0 = c_0 - c'_0$, $d_1 = c_1 - c'_1$. Рассмотрим (d_0, d_1) -дерево S . Построим дерево T' добавлением к дереву T дерева S , совместив x с корнем дерева S . В результате концевая вершина x заменится $v_t(S)$ концевыми вершинами. Обозначим множество новых концевых вершин через P , $|P| = v_t(S)$. Тогда, $e_0(x) = c_0$ для всех вершин x , принадлежащих P , и $e_1(x) = c_1$ для всех вершин x , принадлежащих P . Следовательно, $|E_0(T')| = |E_0(T)| - 1$, $|E_1(T')| = |E_1(T)|$. Повторяя данную процедуру

$|E_0(T)|$ раз, получим дерево T'' , содержащее T , для которого выполнены соотношения 1, 2 условия доказываемого утверждения и $|E_0(T'')| = 0$.

Повторяя аналогичную процедуру по отношению к вершинам из $E_1(T'')$, через конечно число шагов получим (c_0, c_1) -дерево T^* , содержащее дерево T . Тогда

$$v_t(T) \leq v_t(T^*) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

3. Метод ветвей и границ для задачи о ранце

3.1. Общая схема метода ветвей и границ и дерево ветвления

Метод ветвей и границ (МВГ) относится к числу основных методов решения задач оптимизации. Этот метод основан на древовидной декомпозиции исходной задачи на подзадачи¹.

В процессе дальнейшего изложения мы будем часто употреблять термин *рекорд*, означающий наилучшее найденное значение целевой функции к данному шагу алгоритма. Предполагается, что рекорд, также как и целевая функция, принимает действительные значения.

Различные варианты МВГ имеют специфичные для решаемой задачи особенности, но при этом подчиняются следующей общей схеме [4]:

Данные: рекорд, список подзадач.

Шаг 1. В список подзадач помещается исходная задача.

Шаг 2. Если список подзадач пуст, то завершить алгоритм. В противном случае из списка выбирается и удаляется подзадача P .

Шаг 3. Вычисляется значение целевой функции, и при необходимости обновляется значение рекорда. Для задачи P проверяется выполнимость условия отсева. Если подзадача P удовлетворяет условию отсева, то осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 4. Задача P подвергается декомпозиции. Полученные в результате подзадачи помещаются в список подзадач. Перейти к шагу 2.

Условие отсева как правило задается в виде совокупности *правил отсева* и считается выполненным, если выполняется хотя бы одно из правил отсева.

¹ Иногда говорят о декомпозиции множества допустимых решений на подмножества.

Обозначим через $\mathbb{P}$ совокупность всех подзадач рассматриваемого класса, а через $2^{\mathbb{P}}$ — множество всех подмножеств этой совокупности. Тогда конкретный вариант A метода ветвей и границ определяется следующими тремя отображениями:

1. Выбор подзадачи из списка: $\phi^{(A)} : 2^{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$. Это отображение ставит в соответствие любому подмножеству множества возможных подзадач выбранную подзадачу. Достаточно определить это отображение только для конечных подмножеств. При этом для любого конечного подмножества Υ множества $\mathbb{P}$ должно выполняться $\phi^{(A)}(\Upsilon) \in \Upsilon$.
2. Условие отсева: $\delta^{(A)} : \mathbb{P} \times \mathbb{R} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$. Условие отсева определяет по подзадаче и значению рекорда, подлежит ли эта подзадача дальнейшей декомпозиции или ее следует отбросить.
3. Правило декомпозиции: $\nu^{(A)} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, определяющее, каким образом разбивается очередная подзадача.

Такая модель описывает достаточно широкий класс алгоритмов типа МВГ. Следует отметить, что существуют варианты МВГ, которые не соответствуют этой схеме, мы не рассматриваем эти варианты в данной работе.

Процессу решения задачи с помощью МВГ можно сопоставить *дерево ветвления*, вершинам которого ставятся в соответствие получаемые в процессе решения подзадачи. Корнем дерева является исходная задача. Концевым вершинам дерева ветвления соответствуют подзадачи, для которых выполнено условие отсева. Внутренние вершины соответствуют подзадачам, подвергшимся декомпозиции. Внутренняя вершина, соответствующая подзадаче P , соединяется дугами с вершинами, соответствующими подзадачам из множества $\nu(P)$. Дерево ветвления решения задачи P алгоритмом МВГ A будем обозначать через $T(A, P)$.

Определение 7. Будем говорить, что условие отсева δ_1 *не слабее* условия отсева δ_2 на некотором множестве подзадач $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}$, если для любой подзадачи Q из множества $\mathbb{Q}$ и любых двух значений рекорда r_1 и r_2 , где $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$, справедливо $\delta_1(Q, r_1) \Rightarrow \delta_2(Q, r_2)$.

Определение 8. Если для любой подзадачи Q из множества $\mathbb{Q}$ и любых двух значений рекорда r_1 и r_2 , где $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$ справедливо $\delta_1(Q, r_1) \Leftrightarrow \delta_2(Q, r_2)$, то условия отсева δ_1 и δ_2 называются *эквивалентными на множестве подзадач* $\mathbb{Q}$.

Справедливо следующее очевидное утверждение:

Утверждение 4. Пусть A_1 и A_2 — два варианта метода ветвей и границ для решения одного класса задач. Пусть правила выбора очередной

подзадачи из списка и способ декомпозиции, применяемые в этих методах, совпадают: $\phi^{(A_1)} = \phi^{(A_2)}$, $\nu^{(A_1)} = \nu^{(A_2)}$. Пусть Q — некоторая задача рассматриваемого класса, а $\mathbb{Q}$ — множество ее возможных подзадач. Тогда если условие отсева $\delta^{(A_1)}$ не слабее условия отсева варианта $\delta^{(A_2)}$ на множестве $\mathbb{Q}$, то дерево ветвления $T(A_1, Q)$ изоморфно некоторому корневому поддереву $T(A_2, Q)$. Если условия отсева эквивалентны, то деревья ветвлений $T(A_1, Q)$ и $T(A_2, Q)$ изоморфны.

Рассмотренной общей схеме МВГ соответствует бинарное дерево ветвления. Трудоемкость решения задачи с помощью МВГ характеризуется числом получаемых в процессе решения подзадач. Это число совпадает с числом вершин в дереве ветвления. Любая внутренняя вершина в этом дереве имеет степень ветвления 2. Поэтому общее число вершин v связано с числом концевых вершин v_t соотношением $v = 2 \cdot v_t - 1$. Следовательно, в качестве меры сложности можно также взять число концевых вершин.

Определение 9. Сложностью $S(A, P)$ решения задачи P алгоритмом A типа МВГ назовем число концевых вершин в дереве ветвления $T(A, P)$.

3.2. Постановка задачи о ранце

Задача о ранце формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i &\leq C; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

В приведенной постановке через p_i и w_i обозначены стоимость и вес i -го элемента, помещаемого в ранец грузоподъемностью C . Задача состоит в определении набора максимальной суммарной стоимости, который можно разместить в ранце.

Задаче (1) соответствует следующая линейная задача релаксации:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i &\leq C; \\ 0 &\leq x_i \leq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Оптимум задачи (2) не меньше оптимума задачи (1). Поэтому, если оптимальное решение задачи (2) достигается на целочисленном наборе значений $x_1, \dots, x_n$, то этот набор является также оптимальным решением задачи (1).

Задача (2) представляет собой одномерную задачу линейного программирования и может быть решена методом Данцига [4] следующим образом. Переменные нумеруются в порядке возрастания удельной стоимости:

$$\frac{p_1}{w_1} \geq \dots \geq \frac{p_n}{w_n}.$$

Сначала определяется номер s *дробной переменной* по следующему правилу:

$$s = \min \left\{ j \in N : \sum_{i=1}^j w_i > C \right\}.$$

Здесь через N обозначено множество $1, \dots, n$ в соответствии с [1, 2]. Если такого s не существует, т. е.

$$\sum_{i=1}^j w_i \leq C,$$

то решением задачи (2) является единичный набор значений $x_1, \dots, x_n$. В противном случае решение задачи (2) задается следующим образом:

$$x_i = 1, \quad \text{если} \quad i < s,$$

$$x_i = 0, \quad \text{если} \quad s < i < n,$$

$$x_s = \frac{C - \sum_{i=1}^{s-1} w_i}{w_s}.$$

Определение дробной переменной и решение задачи релаксации требует линейного относительно числа n количества операций.

3.3. Метод ветвей и границ для решения задачи о ранце

Рассмотрим базовый вариант метода ветвей и границ [1, 2, 4] для решения задачи о ранце. В процессе работы алгоритма хранится наибольшее найденное значения целевой функции (рекорд) и список *подзадач*, на ко-

торые разбита исходная задача. Подзадачи из списка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p + \sum_{i \in I} p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I} w_i x_i &\leq C'; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отличие от стандартной постановки (1) состоит в том, что индексы принадлежат некоторому подмножеству I множества N . Подзадача получена из исходной задачи (1) присваиванием значений некоторым переменным с индексами из множества $I \setminus N$: $x_i = \theta_i$ для всех $i \in N \setminus I$. Структура подмножества I не существенна с точки зрения алгоритма решения, так как переименованием переменных можно получить эквивалентную задачу, в которой их индексы изменяются от 1 до $|I|$. Другим отличием является наличие слагаемого p — положительной константы, равной сумме коэффициентов p_i переменных, которым присвоено значение 1:

$$p = \sum_{i \in N \setminus I} \theta_i \cdot w_i.$$

Добавление константы к целевой функции также не влияет на алгоритм решения. Заметим, что

$$C' = C - \sum_{i \in N \setminus I} \theta_i \cdot w_i = C - p.$$

Подзадачи подвергаются *декомпозиции*. Декомпозиция осуществляется следующим образом. Выбирается переменная x_b , называемая *переменной ветвления*. Подзадача (3) разбивается на две подзадачи P_0 и P_1 , получаемые присваиванием переменной x_b значений 0 и 1 соответственно:

подзадача P_0 :

$$\begin{aligned} p + \sum_{i \in I \setminus \{b\}} p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I \setminus \{b\}} w_i x_i &\leq C; \\ x_i &\in \{0, 1\}; \end{aligned}$$

подзадача P_1 :

$$\begin{aligned} p + p_b + \sum_{i \in I \setminus \{b\}} p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I \setminus \{b\}} w_i x_i &\leq C - w_b; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Условие отсева формулируется следующим образом. Для подзадачи P решается соответствующая ей задача релаксации R . Далее к ней применяются следующие правила отсева:

1. Задача R не имеет решения. Это возможно, только если $C' < 0$. Тогда задача P также не имеет решения.
2. Найденное оптимальное решение задачи R — целочисленное, тогда оно также является оптимальным решением подзадачи P . Подзадача решена и не нуждается в дальнейшей декомпозиции. Если найденное значение целевой функции больше рекорда, то рекорд увеличивается.
3. Оптимальное значение целевой функции в задаче R не превосходит значения рекорда. Тогда подзадача P отбрасывается, так как ее решение не улучшит целевой функции.

На практике рассматривают различные варианты выбора очередной подзадачи из списка и переменной для разбиения. Доказываемые далее факты справедливы для любого варианта. Любой метод ветвей и границ, в котором применяются перечисленные правила отсева, будем называть *стандартным*.

4. Оценка сложности метода ветвей и границ

4.1. Оценки сложности ослабленного варианта метода ветвей и границ

Определение 10. Метод ветвей и границ со следующими правилами отсева:

1. $C' < 0$. Задача (6) не имеет решения.
2. $\sum_{i \in I} w_i \leq C'$. Найдено допустимое решение задачи (6):

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{при } i \in I; \\ \theta_i, & \text{при } i \in N \setminus I, \end{cases}$$

будем называть *ослабленным*.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\underline{w} = \min_{i=1, \dots, n} w_i, \quad \bar{w} = \max_{i=1, \dots, n} w_i.$$

4.1.1. Оценки сложности через соотношения величин C , $\underline{w}$, $\bar{w}$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 5. Пусть T — дерево ветвления ослабленного варианта МВГ для задачи о ранце (1). Тогда для любой вершины x из множества $V_t^1(T)$ справедливо

$$\frac{C}{\bar{w}} < e_1(x) \leq \frac{C}{\underline{w}} + 1$$

и для любой вершины y из множества $V_t^0(T)$ справедливо

$$n - \frac{C}{\underline{w}} \leq e_0(y) < n + 1 - \frac{C}{\bar{w}}.$$

Доказательство. Рассмотрим концевую вершину x из множества $V_t^1(T)$ и соответствующую ей подзадачу P следующего вида:

$$\begin{aligned} p + \sum_{i \in I} p_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I} w_i x_i &\leq C'; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть J_0 и J_1 — множества индексов фиксированных переменных подзадачи P , которым присвоены значения 0 и 1 соответственно:

$$J_0 = \{j \in N \setminus I : \theta_j = 0\}, \quad J_1 = \{j \in N \setminus I : \theta_j = 1\}.$$

Так как $x \in V_t^1(T)$, то к подзадаче P было применено первое правило отсева. Следовательно,

$$C' = C - \sum_{i \in J_1} w_i < 0.$$

Из неравенства $w_i \leq \bar{w}$ следует, что $|J_1| \cdot \bar{w} > C$. Таким образом,

$$e_1(x) = |J_1| > \frac{C}{\bar{w}}.$$

Рассмотрим вершину z , соединенную с x дугой. Пусть при переходе от вершины z к x была зафиксирована переменная с индексом j' . Обозначим через J'_1 множество $J_1 \setminus \{j'\}$. Так как вершина z не является концевой,

то

$$C - \sum_{i \in J'_1} w_i \geq 0.$$

Так как $w_i \geq \underline{w}$, то $|J'_1| \cdot \underline{w} \leq C$. Отсюда следует справедливость следующего соотношения:

$$e_1(x) = |J_1| = |J'_1| + 1 \leq \frac{C}{\underline{w}} + 1.$$

Справедливость первого из доказываемых неравенств установлена.

Рассмотрим концевую вершину u из множества $V_t^0(T)$ и соответствующую ей подзадачу P вида (4). Пусть J_0 и J_1 — множества индексов переменных, которым присвоены значения 0 и 1 соответственно. Подзадача P удовлетворяет второму правилу отсева. Поэтому

$$\sum_{i \in I} w_i \leq C',$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\sum_{i \in N} w_i - \sum_{i \in J_0} w_i - \sum_{i \in J_1} w_i \leq C - \sum_{i \in J_1} w_i.$$

Следовательно,

$$\sum_{i \in N \setminus J_0} w_i \leq C.$$

Отсюда получим

$$|N \setminus J_0| \cdot \underline{w} \leq C.$$

Так как

$$|N \setminus J_0| = n - e_0(y),$$

то

$$e_0(y) \geq n - \frac{C}{\underline{w}}.$$

Рассмотрим вершину z , соединенную с u дугой. Пусть при переходе от вершины z к u была зафиксирована переменная с индексом j' . Обозначим через J'_0 множество $J_0 \setminus \{j'\}$. Так как z не является концевой, то для нее не выполнено условие второго правила отсева, т. е.

$$\sum_{i \in N \setminus J'_0} w_i > C.$$

Следовательно,

$$|N \setminus J'_0| \cdot \overline{w} > C.$$

Так как

$$|N \setminus J'_0| = n - e_0(z) = n - e_0(y) + 1,$$

то

$$e_0(y) < n + 1 - \frac{C}{w}.$$

Тем самым установлена справедливость второго доказываемого неравенства и справедливость утверждения.

Из доказанного утверждения и утверждений 2, 3 непосредственно вытекает следующее утверждение:

Утверждение 6. *Рассмотрим задачу о ранце (1). Тогда сложность S решения этой задачи ослабленным МВГ удовлетворяет следующим соотношениям²:*

$$\begin{pmatrix} n + \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil \end{pmatrix} \leq S \leq \begin{pmatrix} n + 2 + \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil \\ \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor + 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть T — дерево ветвления для рассматриваемой задачи. Так как величины $e_1(x)$ и $e_0(y)$ целочисленны, то согласно утверждению 5 для любой вершины x из множества $V_t^1(T)$ справедливо

$$\left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil \leq e_1(x) \leq \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor + 1$$

и для любой вершины y из множества $V_t^0(T)$ справедливо

$$n - \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor \leq e_0(y) \leq n + 1 - \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil.$$

Применяя утверждения 2, 3, устанавливаем справедливость соотношения (5).

Несложно заметить, что точность оценки (5) определяется величиной разности

$$\left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil.$$

Эта разность может рассматриваться как мера относительного различия максимального и минимального весового коэффициентов. Следующее утверждение определяет случай, когда верхняя оценка совпадает с нижней.

² Положим $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1$ при $a < b$.

Утверждение 7. Верхняя оценка в неравенстве (5) совпадает с нижней

тогда и только тогда, когда $\left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor = 1$. При этом $S = \binom{n+1}{\left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil}$.

Доказательство. Пусть $\Delta = 1 + \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil$. Справедливо следующее соотношение:

$$n + 2 + \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil - \left(n + \left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor \right) = 2 \cdot \Delta.$$

Так как $\underline{w} \leq \bar{w}$, то $\Delta \geq 0$. Заметим, что для любых целых $a \geq b \geq 1$, $\Delta \geq 0$ выполняется $\binom{a}{b} \leq \binom{a+2 \cdot \Delta}{b+\Delta}$, причем равенство имеет место только при $\Delta = 0$. Следовательно, верхняя оценка совпадает с нижней только при $\Delta = 0$, т. е. при $\left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor = 1$. Тем самым утверждение доказано.

4.1.2. Оценка сложности через отношение величин $\bar{w}$ и $\underline{w}$

Утверждение 8. Пусть P и Q — подзадачи из подмножества $V_t^1(T)$ концевых вершин дерева ветвления T . Пусть $J_1(P)$ — множество индексов фиксированных переменных в подзадаче P , которым присвоено значение 1. Пусть $J_1(Q)$ — множество индексов фиксированных переменных в подзадаче Q , которым присвоено значение 1. Тогда, если $J_1(P) \subset J_1(Q)$, то $|J_1(Q)| - |J_1(P)| \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}}$.

Доказательство. Так как подзадача P соответствует вершине из множества $V_t^1(T)$, то к ней было применено первое правило отсева. Пусть при получении подзадачи P фиксировалась переменная x_s . Тогда

$$\sum_{i \in \{J_1(P) \setminus s\}} w_i \leq C < \sum_{i \in \{J_1(P)\}} w_i.$$

Аналогично, если при получении подзадачи Q фиксировалась переменная x_t , то имеет место соотношение:

$$\sum_{i \in \{J_1(Q) \setminus t\}} w_i \leq C < \sum_{i \in \{J_1(Q)\}} w_i.$$

Пусть $J_1(Q) \setminus J_1(P) = \{t_1, \dots, t_m\}$. Тогда

$$\sum_{i \in J_1(P)} w_i = \sum_{i \in J_1(Q)} w_i - \sum_{i=1}^m w_{t_i}.$$

Следовательно, справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i \in J_1(Q)} w_i - w_t \leq C < \sum_{i \in J_1(Q)} w_i - \sum_{i=1}^m w_{t_i}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\bar{w} \geq w_t > \sum_{i=1}^m w_{t_i} \geq m\underline{w}.$$

Следовательно, $m \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}}$. Что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается справедливость следующего утверждения:

Утверждение 9. Пусть P и Q — подзадачи из подмножества $V_t^0(T)$ конечных вершин дерева ветвления T . Пусть $J_0(P)$ — множество индексов фиксированных переменных в подзадаче P , которым присвоено значение 0. Пусть $J_0(Q)$ — множество индексов фиксированных переменных в подзадаче Q , которым присвоено значение 0. Тогда, если $J_0(P) \subset J_0(Q)$, то $|J_0(Q)| - |J_0(P)| \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}}$.

Теперь сформулируем и докажем основное утверждение данного раздела.

Утверждение 10. Сложность решения задачи о ранце (1) ослабленным вариантом метода ветвей и границ не превосходит величины

$$\frac{\bar{w}}{\underline{w}} \cdot \left(\binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} \right).$$

Доказательство. Введем операцию покомпонентного сравнения на множестве булевых наборов длины n . Пусть $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $b = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ — два булевых вектора. По определению положим $a \leq b$, если $a_i \leq b_i$ для $i \in N$. Припишем каждой подзадаче P , соответствующей конечной вершине, набор $v(P)$ длины n , совпадающий в позициях

фиксированных переменных с присвоенными значениями и имеющий значения 0 в остальных позициях. Пусть P и Q — две подзадачи, соответствующие концевым вершинам дерева ветвления T . Тогда

- 1) $v(P) \neq v(Q)$;
- 2) $v(P) \leq v(Q) \Leftrightarrow J_1(P) \subseteq J_1(Q) \Leftrightarrow J_0(Q) \subseteq J_0(P)$.

Определив таким образом порядок на множестве концевых вершин, рассмотрим максимальную антицепь σ_1 на множестве $V_t^1(T)$, и максимальную антицепь σ_0 на множестве $V_t^0(T)$. Антицепи σ_0 и σ_1 не пересекаются. Известно, что

$$|\sigma_0| + |\sigma_1| \leq \left(\begin{matrix} n+1 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \end{matrix} \right).$$

Согласно утверждениям 8, 9, длина цепи элементов множества $V_t^1(T)$ не превосходит $\frac{\bar{w}}{\underline{w}}$, и максимальная длина цепи элементов множества $V_t^0(T)$ также не превосходит $\frac{\bar{w}}{\underline{w}}$. Тогда

$$|V_t(T)| = |V_t^0(T)| + |V_t^1(T)| \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}} \cdot |\sigma_0| + \frac{\bar{w}}{\underline{w}} \cdot |\sigma_1| \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}} \cdot \left(\begin{matrix} n+1 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \end{matrix} \right).$$

Тем самым утверждение доказано.

4.2. Верхние оценки сложности для задачи о ранце

Применяя доказанные в предыдущем разделе утверждения, можно получить следующие верхние оценки сложности задачи о ранце.

Теорема 1. *Сложность S решения задачи (1) стандартным методом ветвей и границ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$S \leq \left(\begin{matrix} n+2 + \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{\bar{w}} \right\rceil \\ \left\lfloor \frac{C}{\underline{w}} \right\rfloor + 1 \end{matrix} \right), \quad S \leq \frac{\bar{w}}{\underline{w}} \cdot \left(\begin{matrix} n+1 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \end{matrix} \right),$$

где

$$\underline{w} = \min_{i=1, \dots, n} w_i, \quad \bar{w} = \max_{i=1, \dots, n} w_i.$$

Доказательство. Пусть A — некоторый стандартный метод ветвей и границ решения задачи о ранце. Рассмотрим ослабленный метод ветвей и границ A' , такой что

$$\phi^{(A')} = \phi^{(A)}, \quad \nu^{(A')} = \nu^{(A)}.$$

Очевидно, что условие отсева ослабленного метода ветвей и границ $\delta^{(A')}$ не сильнее условия отсева $\delta^{(A)}$ стандартного варианта. Рассмотрим задачу P вида (1). Согласно утверждению 4, дерево ветвления $T(A, P)$ будет корневым поддеревом дерева $T(A', P)$. Следовательно, сложность $S(A, P)$ решения задачи P алгоритмом A удовлетворяет неравенству

$$S(A, P) = |V_t(T(A, P))| \leq |V_t(T(A', P))| = S(A', P).$$

Согласно утверждениям 6 и 10,

$$S(A', P) \leq \binom{n+2 + \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil}{\left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor + 1}, \quad S(A', P) \leq \frac{\bar{w}}{w} \cdot \binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 можно вывести следствие, показывающее, что если отношение грузоподъемности ранца и минимального веса ограничено, то для сложности решения задачи о ранце стандартным методом ветвей и границ справедлива полиномиальная верхняя оценка:

Следствие 1. Пусть существует такая натуральная константа m , что $\frac{C}{w} \leq m$. Тогда для сложности S решения задачи (1) справедлива следующая оценка:

$$S \leq P(n), \quad \text{где} \quad P(n) = \frac{1}{(m+1)!} \prod_{i=1}^{i=m+1} (n-i).$$

4.3. Верхняя и нижняя оценки сложности метода ветвей и границ для задачи о сумме подмножеств

Рассмотрим частный случай задачи о ранце, так называемую задачу о сумме подмножеств [1, 2]. Постановка задачи о сумме подмножеств отличается от общей постановки задачи о ранце тем, что стоимости

и веса предметов, помещаемых в ранец, совпадают. Математически задача о сумме подмножества формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i &\leq C; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Задаче (6) можно поставить в соответствие *точную задачу о сумме подмножеств*, которая заключается в нахождении решения уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i &= C; \\ x_i &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Покажем, что правила отсева стандартного и ослабленного варианта эквивалентны по отношению к задаче о сумме подмножеств.

Утверждение 11. Пусть подзадача Р задачи (6) имеет вид

$$\begin{aligned} p + \sum_{i \in I} w_i x_i &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I} w_i x_i &\leq C'; \\ x_i &\in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

а соответствующая ей задача релаксации R имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} w_i x_i + p &\rightarrow \max; \\ \sum_{i \in I} w_i x_i &\leq C'; \\ 0 &\leq x_i \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда возможен один из следующих случаев:

1. $\sum_{i \in I} w_i < C'$. В этом случае оптимум задачи R меньше C.
2. $\sum_{i \in I} w_i \geq C'$. В этом случае оптимум задачи R равен C.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что оптимум задачи R составляет

$$\min \left(C', \sum_{i \in I} w_i \right) + p$$

и того, что $C' = C - p$.

Утверждение 12. Пусть задача (7) несовместна. Тогда любая подзадача задачи (6), удовлетворяющая правилам отсева стандартного варианта МВГ, также удовлетворяет правилам отсева ослабленного варианта. Другими словами, правила отсева стандартного и ослабленного вариантов МВГ эквивалентны на любом множестве задач о сумме подмножеств.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда задача (7) несовместна. В этом случае при решении задачи (6) стандартным методом ветвей и границ правило отсева 3 никогда не применяется. Действительно, для применимости правила 3 оптимум задачи релаксации должен быть меньше C , так как в силу несовместности задачи (7) рекорд всегда меньше C . Из утверждения 11 следует, что оптимум задачи релаксации меньше C только когда $\sum_{i \in I} w_i < C'$. При этом решение будет целочисленным. Это соответствует правилу 2. Таким образом, правило 3 не применяется в рассматриваемом случае. В силу несовместности задачи (7) целочисленное решение может быть получено только при условии $\sum_{i \in I} w_i < C'$. Поэтому правило 2 в стандартном МВГ эквивалентно правилу ослабленного варианта. Из сделанных наблюдений следует, что правила отсева стандартного и ослабленного вариантов метода ветвей и границ эквивалентны для рассматриваемого случая.

Из утверждений 4 и 11 непосредственно следует справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. Если точная задача о сумме подмножеств (7) несовместна, то сложность S решения соответствующей задачи (6) о сумме подмножеств стандартным методом ветвей и границ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} n + \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor \end{pmatrix} \leq S \leq \begin{pmatrix} n + 2 + \left\lfloor \frac{C}{w} \right\rfloor - \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{C}{w} \right\rceil + 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\underline{w} = \min_{i=1, \dots, n} w_i, \quad \overline{w} = \max_{i=1, \dots, n} w_i.$$

Тривиальным следствием доказанного утверждения является известный факт, установленный в работе [3]: число вершин в дереве ветвления для задачи

$$\sum_{i=1}^n 2x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n 2x_i \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

составляет

$$2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) - 1.$$

5. Заключение

Работа посвящена оценкам сложности решения задачи об одномерном булевом ранце методом ветвей и границ в стандартном варианте. Для задачи о ранце получены две верхние оценки сложности. Выделен частный случай, когда сложность ведет себя как полином при росте размерности задачи. Для задачи о сумме подмножеств получены верхняя и нижняя оценки сложности.

Авторы выражают благодарность профессору И. Х. Сигалу за внимание к работе и постановку задачи.

Литература

1. Kellerer H., Pfershy U., Pisinger D. Knapsack Problems. Springer Verlag, 2004. 546 p.
2. Martello S., Toth P., Knapsack Problems. John Wiley & Sons Ltd., 1990.
3. Финкельштейн Ю. Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
4. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.