Решение трехточечной задачи Штейнера на плоскости средствами MatLab

Д. Т. Лотарев

Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)

Задача Штейнера на евклидовой плоскости в современной постановке — это задача теории графов, состоящая в минимизации длины дерева, связывающего между собой на плоскости точки заданного множества $I', |I'| = n$.

Задачу о минимизации дерева, связывающего заданное множество точек на плоскости, можно решать в двух постановках. В первой постановке ребрами дерева могут быть только пары $(i, j), \quad i, j \in I'$. Решение задачи в такой постановке называется *минимальным связывающим деревом* — Minimal Spanning Tree (MST). Это простая задача. Существуют оптимальные алгоритмы для ее решения — алгоритм Прима и алгоритм Краскала.

Во второй постановке разрешается к множеству заданных точек I' добавить некоторое количество дополнительных точек так, что множество вершин искомого дерева, I, состоит из двух подмножеств, $I = I' \bigcup I''$, где I' — множество заданных точек, а I'' — множество дополнительных. Дерево $T(I)$, $I = I' \bigcup I''$, связывающее между собой все вершины $i \in I$, называется деревом Штейнера, и вершины $i \in I''$ называются точками Штейнера. Длина D дерева Штейнера равна сумме длин $d_{ij}, i, j \in I$ входящих в него ребер (i, j). Длина D зависит от числа добавленных точек $n'' = |I''|$ и их локализации на плоскости.

Не всякое дерево Штейнера короче *минимального связывающего дерева. Минимальное дерево Штейнера — Steiner Minimal Tree* $\mathrm{T_s}$ для множества $\mathrm{I'}$ — это минимальное связывающее дерево $\mathrm{T_c}$ для множества $\mathrm{I = I' \bigcup I''}$. *Минимальное дерево Штейнера* в общем случае не длиннее *минимального связывающего дерева* для множества $\mathrm{I'}$. Уменьшение длины составляет не более 13 % ($\sqrt{3}/2$). Задача отыскания минимального дерева Штейнера — это задача Штейнера.

Задача Штейнера гораздо более сложная, нежели задача о минимальном связывающем дереве. Это *NP*-трудная задача. Решить задачу Штейнера, это значит узнать число дополнительных точек, $\mathrm{m = | I'' |}$, узнать матрицу смежности, определяющую пары точек, связанных ребром, (определить топологию дерева) и найти локализацию точек $\mathrm{i \in I''}$ на плоскости.

Задача о соединении точек оптимальным образом — это одна из старейших оптимизационных задач. Она восходит еще к П. Ферма. Еще в середине XVII столетия была предложена следующая задача. На плоскости найти точку *P*, которая минимизирует суммарное расстояние от *P* до трех заданных точек плоскости. Ферма, Торричелли и Кавальери независимо друг от друга нашли решение этой задачи [1].

Общим решением этой задачи является следующее. Точка *P* либо лежит внутри треугольника, построенного на заданных точках, либо совпадает с одной из этих заданных точек. В первом случае каждый из углов между отрезками, соединяющими *P* с каждой из заданных точек, составляет 120^0. Во втором случае угол, образованный отрезками, соединяющими эту точку с другими заданными, равен или больше 120^0. Рисунок 1 демонстрирует способ решения задачи, найденный в середине XVII столетия.

Для отыскания точки *P,* ближайшей (в смысле суммарного расстояния) к заданным точкам *A, B, C,* сначала строится треугольник (*ABC*) и на одной из его сторон, например (*A C*), строится равносторонний треугольник (*ACX*) так, что точка *B* лежит вне этого треугольника. Точка пересечения окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника (*ACX*), с отрезком (*BX*) есть искомая точка *P.*

Применение такого графического решения не всегда удобно. Однако, если точки *A, B, C* заданы координатами, то, записав прямые и окружности в виде уравнений, можно найти точные координаты точки *P.*

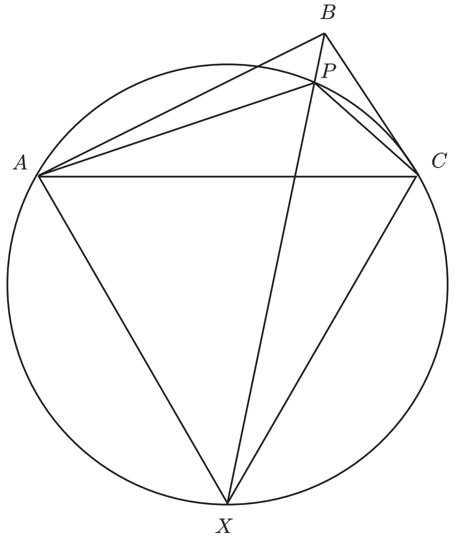

Рис. 1. Точка P минимизирует сумму расстояний PA+PB+PC

Задача Штейнера началась с этой трехточечной задачи.

В XIX столетии Якоб Штейнер — профессор берлинского Университета — изучал эту задачу. Он искал по-прежнему одну точку P, сумма расстояний от которой до каждой из произвольного числа заданных точек, минимальна.

В 1934 году В. Джарник и М. Кослер сформулировали задачу в современной постановке как задачу о дереве минимальной длины на плоскости и доказали ряд свойств оптимального решения [1].

Имя «Задача Штейнера» дали этой задаче Р. Курант и Г. Робинс в 1941 году в первом издании своей книги «Что такое математика» [2].

В настоящее время задача Штейнера представляет значительный научный и практический интерес в связи с широкими исследованиями и практическим использованием при разработке транспортных и компьютерных сетей. Трехточечная задача используется как составная часть эвристических алгоритмов синтеза транспортных сетей большой размерности [3,4].

Применение численных алгоритмов (например, градиентного) для решения даже трехточечной задачи наталкиваются на существенные трудности, связанные с тем, что целевая функция оказывается не всюду дифференцируемой.

В последние годы широкое распространение получил пакет прикладных программ Matlab, который является универсальной программной средой для научных и технических расчетов. Исследования показали, что в этой программной среде можно решить и трехточечную задачу Штейнера на плоскости.

Пакет MatLab имеет средство минимизации функции нескольких переменных. Это встроенная функция *fminsearch,* которая находит локальный минимум по заданному начальному приближению. [5] Для поиска локального минимума применяется симплекс-метод Нелдера—Мида [6]. Для двух переменных симплексом является треугольник. При поиске сравниваются значения функции в трех вершинах треугольника. Наихудшая вершина, в которой функция принимает наибольшее значение, отбрасывается и заменяется новой вершиной. Формируется новый треугольник и поиск продолжается.

Для решения трехточечной задачи Штейнера на плоскости средствами Matlab написана программа в виде М-функции на М-языке. Эта М-функция называется Steiner5. Ее заголовок — *function* **sol = steiner5(u, ab**)

У этой функции параметры **u, ab** являются входными, параметр **sol** — выходным. Параметр u является массивом, задается диапазоном и определяет на плоскости прямоугольную область, в которой размещаются соединяемые точки, а также квадратную сетку, покрывающую эту область. Например, параметр **u** = [0:0.08:4] определяет область 4*4 и сетку с шагом 0.08. Параметр **ab** определяет координаты соединяемых точек. Например, массив **ab** = [0.5, 1, 3.5;1, 2.5, 1.65] определяет координаты трех точек: первые 4 числа — это абсциссы точек, вторые 4 числа — это ординаты, A(0.5, 1), B(1, 2.5), C(3.5, 1.65).

Выходной параметр sol является массивом, в котором содержатся координаты точки Штейнера, минимизирующей длину дерева, и значение самой длины. Если, например, sol = 1.2282 1.9490 4.0840, то 1.2282 и 1.9490 — это координаты точки Штейнера, а 4.0840 — это значение длины. Значения элементов вектора sol определяются с помощью встроенной функции *fminsearch,* которая вычисляет локальный минимум функции по заданному начальному приближению. Поскольку длина дерева в трехточечной задаче — это унимодальная функция, то за начальное приближение может быть принята любая точка области размещения соединяемых точек.

Вызов функции *fminsearch* выполняется по формату [**r,v**] = *fminsearch* ('*fminstei*5', [2,2]). Здесь [**r,v**] это выходной параметр функции *fminsearch*: **r** — координаты точки Штейнера, а **v** — значение длины дерева. Входной параметр *fminstei*5 — это имя программы М-функции, которая вычисляет длину дерева Штейнера при локализации точки Штейнера в каждом узле сетки, покрывающей область. Входной параметр [2,2] — это координаты точки, принятой за начальное приближение. После вызова элементам вектора **sol**, который является выходным параметром функции *Steiner*5, присваиваются значения элементов вектора [**r**,**v**]. Вообще, при вызове встроенной функции *fminsearch* в апострофах указывается имя функции, минимум которой ищется. В нашем случае — это функция *fminstei*5, описывающая целевую функцию задачи Штейнера. Это та целевая функция, которая используется и в самой М-функции Steiner5.

М-функция Steiner5 кроме оператора вызова встроенной функции f*minsearch* выполняет также операторы рисования соединяемых точек и точки Штейнера и всего дерева Штейнера (см. рис. 2), операторы построения 3-D графика поверхности и линий уровня, определяемых значением длины дерева Штейнера в зависимости от локализации точки Штейнера (см. рис. 3).

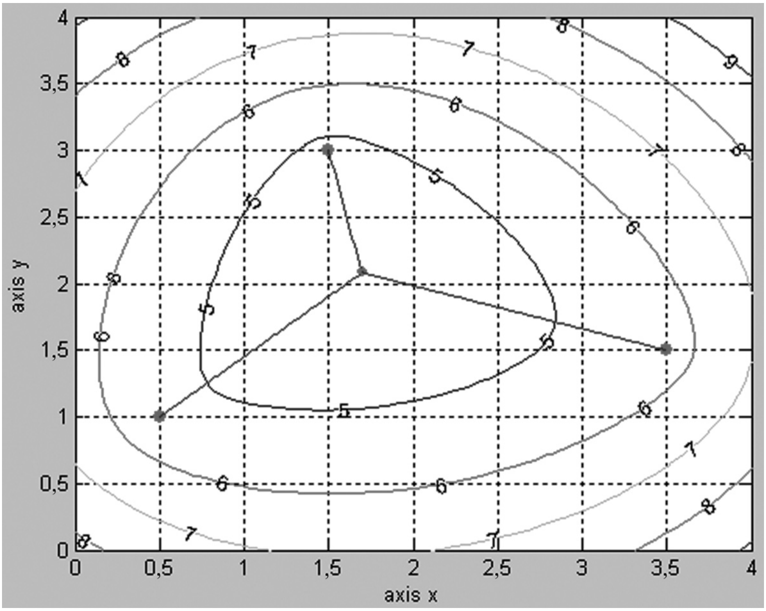

Рис. 2. Дерево Штейнера на плоскости и линии уровня

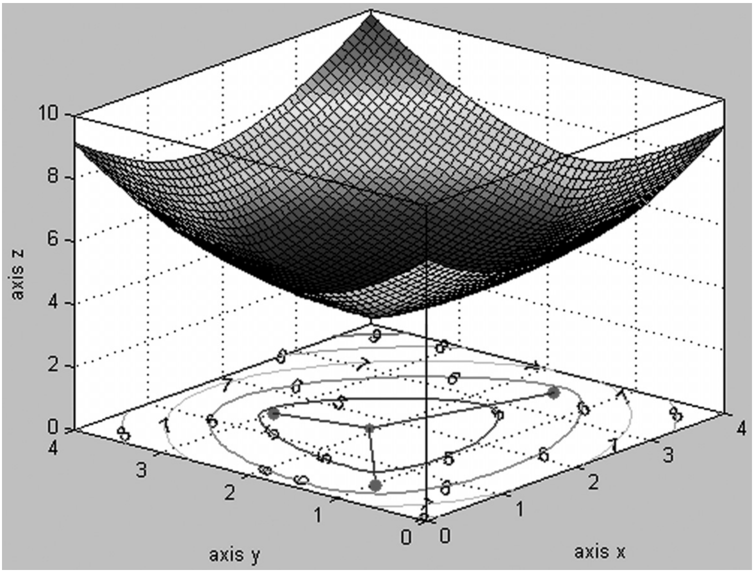

Рис. 3. Дерево Штейнера и поверхность,
которую описывает целевая функция задачи

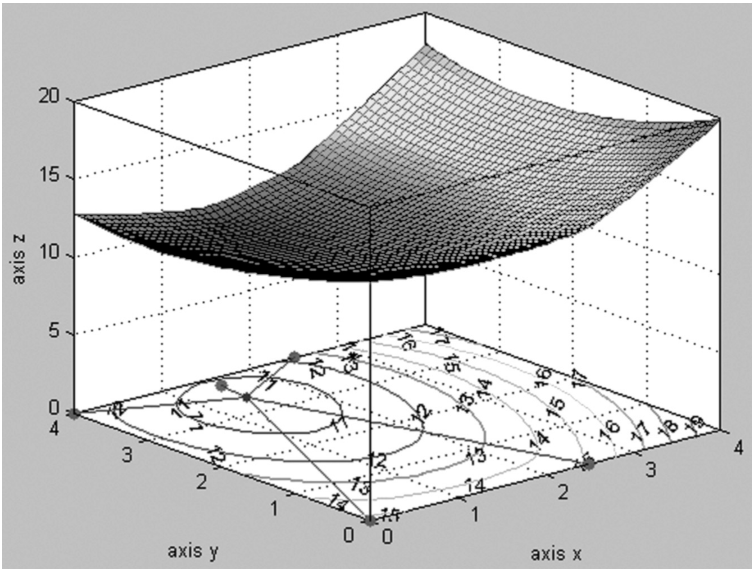

Рис. 4. Решение задачи Лаунгардта

Программа Steiner5 решает также задачу Лаунгардта. Это та задача, которую исследовал Я Штейнер — найти точку на плоскости, для которой сумма расстояний до каждой из точек заданного множества минимальна. Имя «задача Лаунгардта» эта задача получила в связи с тем, что Лаунгардт использовал ее при выборе размещения железнодорожных станций. Вот что написано на сайте http://railrating.info/ в Интернете: «Иногда также станцию приходится располагать в таком месте, чтобы доставить равномерные удобства нескольким соседним селениям, и тогда место расположения станции может быть вычислено математически (способ Лаунгардта)». На рис. 4 показан результат решения задачи Лаунгардта для 5 точек.

Литература

1. *Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г.* Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 3–28.
2. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.
3. *Лотарев Д. Т., Уздемир А. П.* Размещение транспортных сетей на неоднородной территории // АиТ. 2002. № 7. С. 114–124.
4. *Лотарев Д. Т., Уздемир А. П.* Преобразование задачи Штейнера на евклидовой плоскости к задаче Штейнера на графе // АиТ. 2005. № 10. С. 82–92.
5. *Ануфриев И. Е.* Самоучитель MatLab 5.3/6.x. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
6. *Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д.* Численные методы. Использование MATLAB. М.: Изд. дом «Вильямс», 2001.