Метрические характеристики композиции графов диаметра два*

А. М. Раппопорт, Л. С. Гнеденко

Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)

Важную роль для анализа и синтеза систем коммуникаций различного типа играют метрические характеристики графов, в частности, диаметр. Его значение позволяет оценить наибольшее время передачи сообщения в сети. С другой стороны в коммуникационных системах с небольшим диаметром имеется возможность организации локального (децентрализованного) взаимодействия участников при обмене данными. Такие соображения приводят к задаче построения графов с заданным (небольшим) значением этой характеристики.

Не менее значимым при исследовании систем коммуникаций является и такой параметр графа, как число доминирования, определяемое количеством элементов минимального доминирующего множества, реализующего «контролирующие» (управляющие) функции. Использование сетей с числом доминирования, превосходящим единицу, позволяет при обмене информации отказаться от единственного центрального элемента (сервера, органа управления и т. п.) и снизить уязвимость всей системы. Подобный подход находит применение в разнообразных коммуникационных процессах, обладающих той или иной степенью самоорганизации: телекоммуникациях, пиринговых распределенных средах, организационных системах и т. д.

При проектировании различного рода сетевых структур нередко возникает необходимость объединения ряда локальных подсистем с известными метрическими характеристиками в единую, также удовлетворяющую определенным метрическим требованиям. Развитие этого направления приводит к изучению метрических характеристик графа, получающегося в результате такой процедуры.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–07–89326), ОИТВС РАН (проект 2.4) и Президиума РАН (проект 1.3).

Эта задача в общем случае не имеет простого решения, (нахождение числа доминирования, в частности, — NP- полно). Ранее в работах [1]–[4] был получен ряд конструктивных условий на графы с заданными диаметром и числом доминирования и предложены способы их построения.

В статье представлена общая конструкция, объединяющая совокупность графов с известными метрическими характеристиками в единую структуру, для которой удается оценить диаметр и число доминирования. Их значения также находятся в ряде конкретных ситуаций, когда диаметр исходных графов не превосходит двух.

1. Общая конструкция

Определим в графе $G = G(V, E)$ диаметр $\delta = \delta(G) = \max\limits_{x,y \in V} \rho(x, y)$, доминирующее множество $D = \{x / \text{если } y \in V \setminus D$, то найдется $x \in D$, что $\rho(x, y) = 1\}$, число доминирования $\gamma = \gamma(G) = \min\limits_{D \subset V} |D|$, где $\rho(x, y)$ — длина кратчайшей цепи между x, y. (В основном будем придерживаться терминологии из [6].)

Для описания общей конструкции, объединяющей совокупность локальных структур, рассмотрим граф $G^* = (V^*, E^*)$, построенный следующим образом. Его подграф $G = (V, E)$ является произвольным графом с n вершинами и m ребрами. Каждая вершина c_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ из G входит в некоторый подграф $G_i = G_i(V_i, E_i)$ графа G^*, $V_i \cap V = c_i$, $|V_i| = n_i > 1$, $i = \overline{1,n}$, т. е. граф G^* получается из графов G_i присоединением всех ребер из G, инцидентных вершинам c_i, $i = \overline{1,n}$. Такой граф G^* будем называть *композицией* графов G_i, G. В нем $d_i(c_i)$, $d(c_i)$ — степени вершины c_i соответственно в подграфах G_i, G, $d^*(c_i) = d_i(c_i) + d(c_i)$ — степень вершины c_i в G^*. (На рис. 1 приведен пример графа G^*, кружочки обозначают графы G_i.)

Обозначим $\mu_i = \max\limits_{x \in V_i} \rho(c_i, x) \le \delta_i$, где $\delta_i = \delta_i(G_i)$ — диаметр графа G_i, $\delta_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \delta_i$, $\mu_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i$, $\mu^* = \max\{\mu_{ij} = \mu_i + \mu_j + \rho_{ij}, i, j = \overline{1,n}, i \ne j\}$,

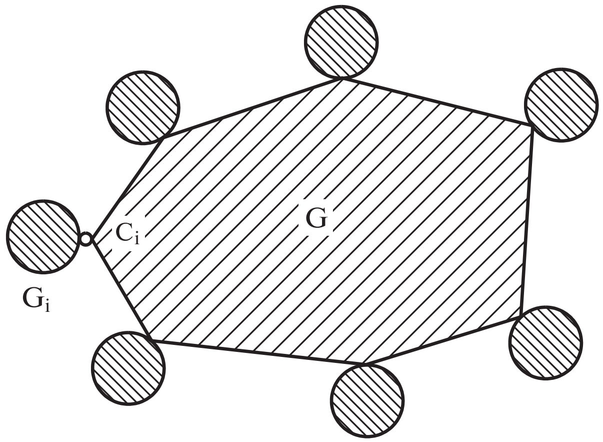

Рис. 1. Граф G*

где ρ_{ij} — расстояние между вершинами c_i, c_j. Нетрудно видеть, что $\delta^* = \delta^*(G^*) = \max\left\{\mu^*, \delta_0\right\}$, $\mu_i + \mu_j \le 2\mu_0 \le 2\delta_0$ и $\rho_{ij} \le \delta$, где $\delta = \delta(G)$ — диаметр графа G. Поэтому

$$\delta^* \le 2\,\delta_0 + \delta\,. \tag{1}$$

Также несложно оценить и число доминирования $\gamma^* = \gamma^*(G^*)$. Поскольку $n_i > 1$, $i = \overline{1, n}$, всякое доминирующее множество D^* в графе $G*$ содержит хотя бы одну вершину из V_i, то $\gamma^* \ge n$. С другой стороны очевидно, что $\gamma^* \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(G_i)$. Таким образом, справедливо

Утверждение 1

В графе G^*, являющемся композицией графов $G = \overline{1,n}$,

$$\delta^* = \max\{\mu^*, \delta_0\} \le 2\,\delta_0 + \delta\,, \tag{2}$$

$$1 < n \le \gamma* \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\,. \tag{3}$$

2. Композиция с небольшим диаметром

Для конкретизации соотношений (1) и (2) естественно использовать дополнительную информацию о графах G, G_i, $i=\overline{1,n}$, гарантирующую небольшое значение диаметра их композиции G^*. Мы ограничимся случаем, когда эти величины не превосходят двух. Для нахождения точных значений диаметра композиции G^* можно воспользоваться известными достаточными условиями. На их основе выделим возможные ситуации для графов G и G_i.

Простейшее из них означает наличие в графе звездной вершины (смежной со всеми остальными). Другие условия представлены в [1].

Поскольку в (2) $\delta^* = \max\left\{\mu^*, \delta_0\right\}$, а $\delta_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{\delta_i\right\} \le 2$, то

$$\delta^* = \mu^* = \max_{i \ne j}\left\{ \mu_i + \mu_j + \rho_{ij}\right\} \tag{4}$$

По условию $1 \le \mu_i, \mu_j, \rho_{ij} \le 2, \quad 3 \le \delta^* \le 6$, поэтому остается выяснить какие значения от 3 до 6 принимает диаметр δ^* в зависимости от соотношений между этими величинами для различных конфигураций $G, G_i, i=\overline{1,n}$ при наличии в них некоторых подмножеств звездных вершин.

Пусть $I = \left\{ 1, \ldots, n\right\}$, $S = \{ i, d_i(c_i) = n_i - 1\}$ определяет подмножество графов G_i, в которых вершины c_i являются звездными, $\bar{S} = I \setminus S$, $|\, S \,| = s$, $|\, \bar{S} \,| = \bar{s}$, т. е. $\bar{S} = \left\{ i, 1 < d_i(c_i) < n_i - 1\right\}$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через χ совокупность графов $\left\{ G^*\right\}$ для которых $\delta, \delta_i \le 2, n_i > 1, \quad i=\overline{1,n}$ и $d_i(c_i) = n_i - 1$ при $i \in S$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма

Если $G^* \in \chi, \bar{s} > 1$*, то* $\delta^* \ge 5$.

Доказательство

Пусть $i, j \in \bar{S}$ и $x \in V_i, y \in V_j, x \neq c_i, y \neq c_j$. Из (4) следует, что если $(c_i, c_j) \in E$, то $\rho(x, y) = 5$, а если $(c_i, c_j) \notin E$, то $\rho(x, y) = 6$. Отсюда $\delta^* \geq 5$.

Выясним какими структурными особенностями должен обладать граф G^* при различных значениях диаметра δ^*.

1. Если $\delta^* = 3$ для графов из χ, то в (4) $\mu_i = \mu_j = \rho_{ij} = 1$ для всех $i \neq j$. Это означает, что $\delta = 1$, $G = K_n$ и $|S| = n$, т. е. G — полный граф, а все вершины c_i являются звездными вершинами в G_i.

2. Если $\delta^* = 4$, то по лемме $\bar{s} \leq 1$. Поэтому, когда $\bar{S} = \varnothing$, для того чтобы в (4) $\mu^* = 4$, должны найтись $i, j \in S$, для которых $\rho_{ij} = 2$, т. е. $(c_i, c_j) \notin E$, т. к. $\delta = 2$. Если же $\bar{S} = \{k\}$, то $\mu^* = 4$ означает, что $\rho_{ik} = 1$ для всех $i \in S$, т. е. $(c_i, c_k) \in E$. Таким образом, $\delta^* = 4$ в классе композиций из χ тогда и только тогда, когда все вершины c_i — звездные в G_i и G — неполный граф, либо имеется единственный подграф G_k, в котором c_k — не звездная вершина $(d_k(c_k) < n_i - 1)$, но c_k — звезда в G $(d(c_i) = n - 1)$. На рис. 2 изображен граф G^* из χ диаметра 4, удовлетворяющий этому условию. В нем $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\bar{S} = \{6\}$, все вершины c_i — звездные в G_i, $i = \overline{1, 5}$ в отличие от вершины c_6, являющейся звездной в подграфе G, т. е. $d_6(c_6) = 2 < 3$, $d(c_6) = 5$.

3. Если $\delta^* = 5$, то по лемме $\bar{s} > 1$. Допуская, что $(c_i, c_j) \notin E$ для $i, j \in \bar{S}$, в (3) получим $\mu^* = 2 + 2 + 2 > 5$. Поэтому подграф $G(S)$ графа G определяемый вершинами из $V \setminus \{c_i, i \in S\}$ — полный, т. е. $G(S) = K_{\bar{S}}$. Наличие или отсутствие других ребер в G^* на значение μ^* не влияет, Таким образом, в классе графов χ компо-

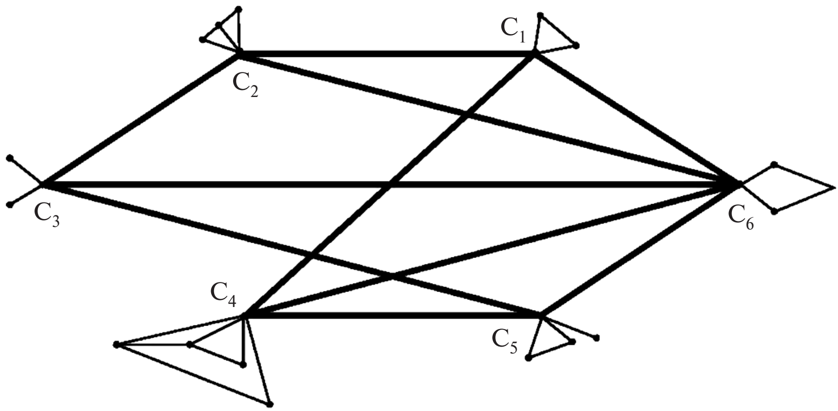

Рис. 2.

зиции $\delta^* = 5$ в том и только в том случае, когда имеется не менее двух незвездных графов G_i, а подграф $G(\bar{s})$ графа G является полным.

4. Если $\delta^* = G$, то по лемме $\bar{s} > 1$ и должны найтись $i, j \in \bar{S}$, для которых в (3) $\mu^* = 6$, т. е. $\mu_i = \mu_j = \rho_{ij} = 2$. Это возможно в том и только том случае, когда в подграфе $G(\bar{S})$ отсутствует хотя бы одно ребро. Таким образом, равенство шести диаметра δ^* композиции G^* равносильно неполноте «незвездного» подграфа $G(\bar{S})$ графа G.

Теперь можно сформулировать условия, при которых диаметр δ^* композиции G^* принимает те или иные возможные значения.

Утверждение 2

Если $G^* \in \chi$, то $3 \le \delta^* \le 6$ и

1. $\delta^* = 3$ тогда и только тогда, когда

$$G = K_n \text{ и } S = I. \tag{5}$$

2. $\delta^* = 4$ тогда и только тогда, когда

$$G \neq K_n \text{ и } \bar{S} = \varnothing, \tag{6}$$

либо

$$|\bar{S}| = 1, \bar{S} = \{k\}, d(c_k) = n - 1, \tag{7}$$

(т. е. имеется единственная «незвездная» вершина c_k в G_k, являющейся звездной в G).

3. $\delta^* = 5$ тогда и только тогда, когда

$$|\bar{S}| > 1,\ G(\bar{S}) = K_{\bar{s}}. \tag{8}$$

4. $\delta^* = 6$ тогда и только тогда, когда

$$G(\bar{S}) = K_{\bar{s}}. \tag{9}$$

Сформулированные условия обобщают результаты из [7] о значениях диаметра δ^*, справедливые лишь в предположении, что все вершины c_i являлись звездными для графов G_i ($|S| = n$), а также определяют конфигурацию композиции G^* со значениями δ^*, равными 5 и 6.

Наличие звездных вершин в графах G_i позволяет определить и значение числа доминирования для графов из χ. Пусть теперь $\bar{S} = S_1 \cup S_2$, где $S_1 = \{ i \in \bar{S}, x \in V_i, d(x) = n_i - 1 \}$, $|S_1| = s_1, S_2 = \bar{S} \setminus S_1$, т.е в подграфах G_i, $i = S_1$ имеется звездная вершина, не совпадающая с c_i. Используя (2), поскольку звездная вершина является минимальным доминирующим множеством, получим следующее соотношение для числа доминирования γ^*.

Утверждение 3

Если $G^* \in \chi$, то

$$\gamma^* = s + s_1 + \sum_{i \in S_2} \gamma_i, \tag{10}$$

где $s + s_1$ — число подграфов G_i, содержащих звездные вершины.

В частности, если все графы G_i содержат такие вершины, т. е. $\bar{S} = \varnothing$, то $\gamma^* = n$. Следует также отметить, что (10) остается верной и в случае, если $\delta_i > 2$ для $i \in S_2$.

3. Р-двухполюсные графы

Интересной представляется ситуация, обобщающая нередко используемую кольцевую структуру коммуникаций. В этом случае в графе выделены 2 вершины c_1 и c_n, соединенных непересекающимися простыми цепями с длинами $\ell_1 ... \ell_p$. Будем называть такой граф G *р-двухполюсным*. Обозначим $\ell = \max\{\ell_k + \ell_s, k, s = \overline{1,p}, k \neq s\}$ — длину максимального простого цикла в G. Нетрудно видеть, что для р-двухполюсных графов диаметр $\delta = \delta(G) = [l/2]$. На рис. 3 приведен пример такого графа, в нем указаны полюса c_1, c_n, $p = 4$.

Как и в предыдущем разделе считаем, что $\delta_i \leq 2, n_i > 1, i = \overline{1,n}$, а подграфы G_i разбиваются на 2 группы, определяемые подмножествами S и $\bar{S}$, характеризуемые «звездностью» вершин c_i в них. По-преж-

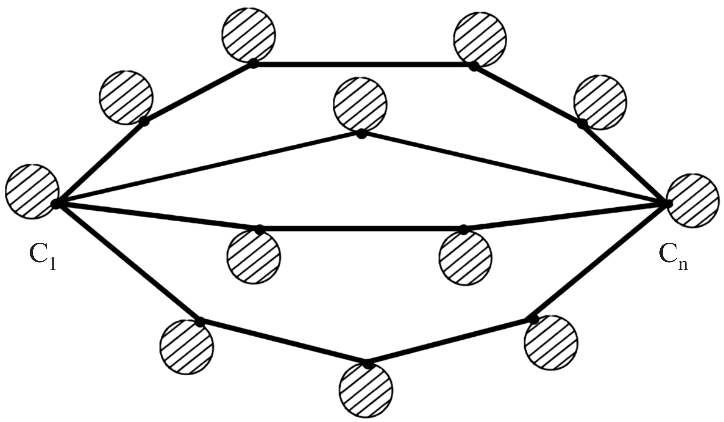

Рис. 3.

нему, если $i \in S$, то $\mu_i = 1$, если же $i \in \overline{S}$, то $\mu_i = 2$.Значения диаметра композиции G^* графов G, $G_i, i = \overline{1,n}$ определяются концевыми вершинами диаметральных цепей графа G.

Заметим, что если кратчайшая цепь соединяет в графе G вершины c_i, c_j, $i, j = \overline{S}$, то $\mu_{ij} = \mu_i + \mu_j + \rho_{ij} = \rho_{ij} + 4$; если $i \in S, j \notin \overline{S}$, то $\mu_{ij} = \rho_{ij} + 3$, если $i, j \in S$, то $\mu_{ij} = \rho_{ij} + 2$. Поэтому, если все диаметральные цепи графа G соединяют вершины, определяемые подмножеством S, но в G имеется кратчайшая цепь длины $\delta - 1$, соединяющая вершины c_i, c_j, $i, j \in \overline{S}$, то $\mu_{ij} = 2 + 2 + \delta - 1 = \delta = 3$. Эти соображения приводят к следующей формулировке

Утверждение 4

Если в графе G^*, являющемся композицией графов G, G_i, $i = \overline{1,n}$, подграф G — p-двухполюсный и $\delta_i \le 2$, $d_i(c_i) = n_i - 1, n_i > 1$, $i = \overline{1,n}$, то

$$[l/2] + 2 \le \delta^* \le [l/2] + 4, \tag{11}$$

причем

1. $\delta^* = [l/2] + 4$, тогда и только тогда, когда в G имеется диаметральная цепь длины $[l/2]$ между вершинами c_i, c_j, $i, j \in \overline{S}$.
2. $\delta^* = [l/2] + 3$ тогда и только тогда, когда в G имеется диаметральная цепь длины $[l/2]$ между вершинами c_i, c_j, $i \in S, j \in \overline{S}$ или все диаметральные цепи соединяют вершины, определяемые $i, j \in S$, но имеется кратчайшая цепь длины $[l/2] - 1$ между c_i, c_j, $i, j \in \overline{S}$.
3. $\delta^* = [l/2] + 2$ тогда и только тогда, когда все диаметральные цепи соединяют вершины, определяемые $i, j \in S$ и нет кратчайшей цепи длины $[l/2] - 1$ между c_i, c_j, $i, j \in \overline{S}$.

Число доминирования γ^* в этом случае определяется согласно утверждению 3.

В заключение следует отметить, что приведенные результаты позволяют при построении коммуникационных систем путем объединения ряда подсистем получать единую конфигурацию с заданными метрическими характеристиками.

Литература

1. *Rappoport A. M.* The problem of construction the decentralized communication structure // Dinamics of non-homogenous system. Proceedings of ISA RUS. Vol. 7. M.: URSS, 2004. P. 176–179.
2. *Раппопорт А. М.* Метрические характеристики графов сетей коммуникаций // Проблемы вычислений в распределенной среде. Модели обработки и представления данных. Динамические системы. (Труды ИСА РАН. Т. 14.) М.: URSS, 2005. С. 141–147.
3. *Афанасьев А. П. Раппопорт А. М.* Построение и оценка доминирующ0их множеств в структурах коммуникаций // Доклады РАН. 2006. Т. 408. № 6. С. 746–749.
4. *Раппопорт А. М., Гнеденко Л. С.* Диаметр и число доминирования структур коммуникаций, порожденных цепными связями // Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы математические модели и оптимизация. (Труды ИСА РАН. Т. 25.) М.: КомКнига/URSS, 2006. С. 131–137.
5. *Раппопорт А. М.* Композиционный подход к построению коммуникационных систем с заданными метрическими характеристиками // Труды 2-й Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии, САИТ-2007». Т. 2. М.: ЛКИ, 2007. С. 181–182.
6. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980; 3-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2006.