Модель системной динамики с регулятором рыночного типа

С. И. Травкин, А. Ю. Попович

Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)

Системная динамика является общепризнанным, проверенным временем инструментом анализа и проектирования сложных динамических систем с цепями обратной связи. Представляет особый интерес внесение в системно-динамическую модель регуляторов рыночного типа. Настоящая работа предлагает первые шаги в этом направлении.

Напомним, что в системной динамике принято выделять в потоки (товарный, денежный и т. д.). Связь между потоками осуществляется на интегральных уровнях(накопителях).

Рассмотрим мульти-блочную производственно-рыночную систему, состоящую из **m** производственных блоков(каждый производственный блок является накопителем товара **X** и принадлежит одному из поставщиков). Производственные блоки посылают на рынок $\lambda_i \cdot 100$ %, $i \in [1, m]$ от своей загруженности.

Для того, чтобы проанализировать выходные потоки из блока «рынок», рассмотрим следующую рыночную модель. Пусть **m** участников рынка (поставщиков товара **X**) отовариваются у одного оптовика с функцией предложения **G(x).** Пусть спрос на рынке товара **X** определен всеми поставщиками одинаково функцией **P(x)**. Равновесное решение **G(W) = P(W)** определяет максимальный объем платежеспособного спроса **W** с функцией выручки **V = P – G**, на [0, **W**]. Для упрощения понимания можно считать, что товар штучный (например, батон хлеба), что каждый человек покупает единицу товара и, следовательно, $\forall x \in [0, \mathbf{W}]$ есть только один человек с минимальным достатком равным **P(x)**. Общая денежная масса выручки (прибыльности без учета налогов и пр.) рынка $\Phi = \int_0^W V(x)dx$. Рассматривается рынок со средней покупной способностью $\varphi = \Phi/\mathbf{W}$**,** которую полагаем инвариантом семейства моделей с полиномиальным распределением покупной способности населения:

$$V(x) = V(1 - \frac{x}{W})^{\frac{V}{\varphi} - 1},$$

где V = **V(0) —** маргинальная (дефицитная) выручка на «голодном» рынке.

Обозначим $\mathbf{z} = \mathbf{x/W}$ – ($\mathbf{z}\cdot 100$ %) процент насыщения рынка товаром, и через $\nu = \frac{V}{\varphi} - 1$ — относительное отклонение дефицитной выручки от средней покупной способности на рынке товара **X**. При $\nu > 1$ функция **V(x)** вогнутая, и с ростом параметра рынок резко расслаивается на богатых и бедных, при $\nu \to \mathbf{0}$ рынок выравнивается по покупной способности населения. При этом, коэффициент эластичности

$$E(x) = \frac{\nu}{1 - \frac{x}{W}}.$$

(Следовательно отклонение параметра ν от 1 определяет процент эластичной части рынка $\mathbf{X_E = \{x \in [0, W]: E(x) > 1\}}$.)

При «голодном» рынке $\mathbf{x \ll W}$ падение выручки при приращении поставок пропорционально значению выручки с коэффициентом пропорциональности $\nu/\mathbf{W}$ — модель аппроксимируется простейшей экспоненциальной моделью

$$V_e(x) = V \cdot e^{-\frac{x}{T}},$$

где $\mathbf{T = W/\nu}$ **—** простая экспоненциальная задержка товара на рынке с постоянным коэффициентом эластичности $\mathbf{E_e = \nu/W}$.

Если обратиться к монополистическому случаю, монопольные поставки на рынок **[X, V]** обратно пропорциональны маргинальному спросу и пропорциональны относительному проценту средней покупной способности $x_{mon} = \frac{W}{\nu+1} = \frac{\varphi}{V}W = \frac{\Phi}{V}$. Оставляя (1 – φ/V)100 % рынка голодным, монополист обеспечивает себе максимальную прибыль $G_{mon} = (\frac{\nu}{\nu+1})^{\nu}\Phi = (1-\frac{\varphi}{V})^{\nu}\Phi$ — как **ν**-кратное дисконтирование денежной массы рынка с процентом **φ/V** 100 %. При сильно расслоенном по покупной способности рынке монополист снимает с него примерно треть денежной массы $G_{mon} \approx \Phi \cdot e^{\frac{\varphi}{V}-1} \approx \frac{\Phi}{e}$, то есть также, как при экспоненциальном неограниченном рынке **[X=[0, ∞], V_e],** с денежной массой **Φ = VT**, монопольной поставкой **T** и прибылью **Φ/e**.

Появление других поставщиков на рынке меняет ситуацию. Если поставщики определяют объемы поставок по состоянию рынка предыдущего дня, то с экспоненциальной скоростью оптимальная стратегия поставок приведет к равновесному решению $\mathbf{x_i = W/(m + \nu)}$, поскольку оптимум каждого (**i**-го) находится из условия:

$$1 — (x_i + z_i)/W = \nu x_i/W,$$

где $\mathbf{z_i}$ поставки остальных участников, и рынок не различает поставщиков. Цена товара упадет до $\frac{\nu^{\nu}}{(m+\nu)^{\nu}}V$ и достигнет среднего спроса при $m \approx \nu((1+\nu)^{\frac{1}{\nu}} - 1)$. Выручка участника будет $g_i = \frac{\nu^{\nu}}{(m+\nu)^{\nu+1}}VW = \frac{(\nu+1)\nu^{\nu}}{(m+\nu)^{\nu+1}}\Phi W$, а процент неудовлетворенного спроса составит **m/(m +ν) 100 %**.

Возвращаясь к исходной задаче, рассмотрим два базисных случая на двухблочной структуре: производство, принадлежащее игроку-монополисту, и рынок (рис. 1). В первом случае предполагаем, что игрок на каждом шаге обязан поставлять на рынок все содержимое накопителя, во втором, что игрок обладает полным контролем над объемами поставок.

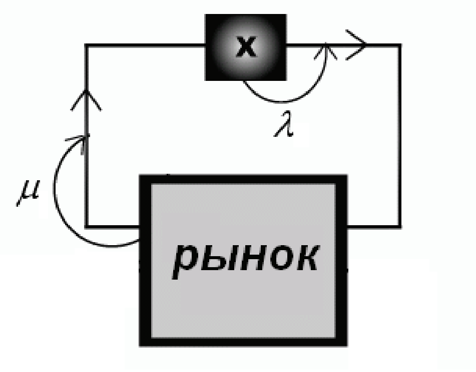


Рис. 1.

Итак, производственный блок работает с производительностью λ, то есть выдает λ·100 % от своей загруженности, поступление определяется монопольной рыночной выручкой

$$\dot{x} = R - \lambda x.$$

Рынок M (D, w) характеризуется линейной функцией цены:

$$P(q) = D(1 - \frac{1}{w} q), \qquad (1)$$

где q — количество товара на рынке, w — объем рынка (число потенциальных покупателей). Если каждый из покупателей покупает по единице товара q в единицу времени (каждый день), то цена пропорциональна проценту незаполненности рынка:

$$\frac{w-q}{w} 100\%$$

и дефицитной цене единицы товара D — при фактически полном отсутствии товара.

Вся произведенная продукция λx поступает на рынок:

$$q = \lambda x.$$

В производственный блок отчисляется μ·100 % от вырученной суммы:

$$R = \mu G.$$

Таким образом, динамика монопольного линейного производственно-рыночного модуля описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = \mu\lambda x D(1 - \frac{\lambda x}{w}) - x = \frac{x}{a}(1 - \frac{x}{b}), \tag{2}$$

где

$$a = \frac{1}{\mu\lambda D - 1},$$

$$b = w(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu\lambda^2 D}).$$

и, следовательно, логистической зависимостью

$$x(t) = \frac{b}{1 - ce^{-at}},$$

где

$$c = 1 - \frac{b}{x(0)}.$$

Величина b — предельное насыщение производственного блока, достигаемое теоретически за бесконечное время, а λb — установившаяся поставка на рынок.

Для монополиста неограниченного производственной мощностью, то есть такого, который может поставить на рынок любое количество товара, оптимальная поставка, приносящая максимум выручки — половина рынка $w/2$. Получим это, исследуя стационарный режим рассматриваемой системы.

В стационарном режиме:

$$x_s = \frac{w}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mu\lambda D}\right), \tag{3}$$

отсюда выручка:

$$V(x_s) = \frac{Dw}{\xi}(1 - \frac{1}{\xi}), \text{ где } \xi = \mu\lambda D.$$

Выручка максимальна при $\xi = 2$. Подставляя в (3), получаем, что оптимальные поставки составляют w/2:

$$\lambda x_s^{opt} = \frac{w}{2} .$$

В заключение, проиллюстрируем установления стационарного режима в оптимальном для игрока случае.

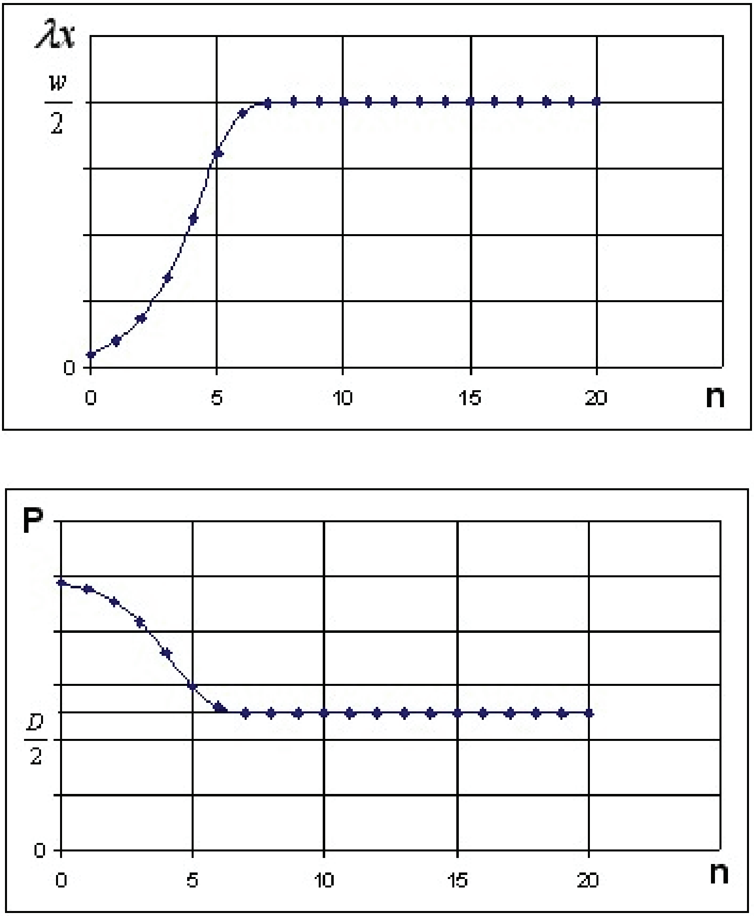
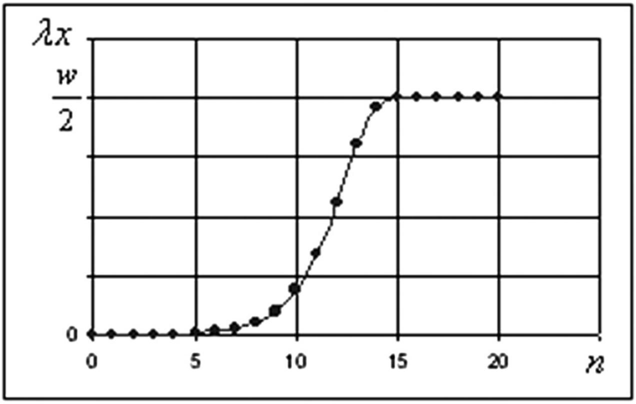
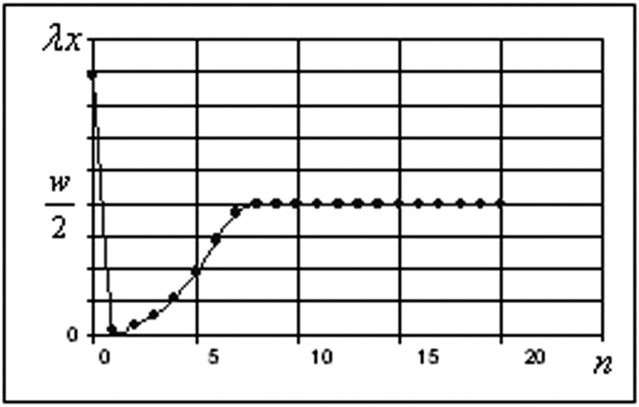
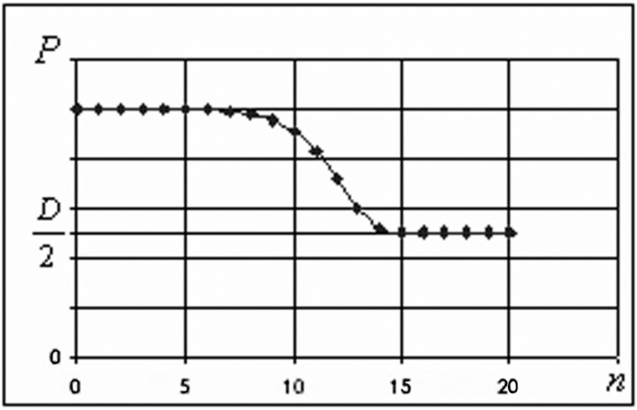


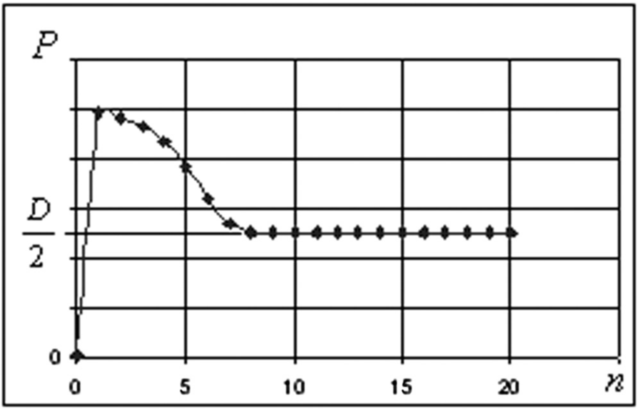
Рис. 2.

Здесь представлены изменения объемов поставок (λx) и цены (**P**) от шага (**n**) при $\xi = 2$. Заметим, что в вышеприведенном примере начальные поставки ($\lambda x(n = 0)$), были относительно малы, составляя $\frac{w}{40}$. Однако стационарный режим установится при любых начальных поставках в интервале (0, w).









$$\lambda x_0 = \frac{w}{10000} \qquad \lambda x_0 = 0,99w$$

Литература

1. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). М.: Прогресс, 1971.
2. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. М.: АСТ, 2003.