РАЗДЕЛ II

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ
И РАСПРЕДЕЛЕННАЯ СРЕДА

Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию

А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба

Введение

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{0.1}$$

в котором $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — m-мерный действительный вектор управления, A и B — действительные $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, а $f = (f^1, \ldots, f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \tag{0.2}$$

задано, а задача управления системой (0.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left[\left\langle e(t), Qe(t)\right\rangle + \left\langle u(t), Ru(t)\right\rangle\right] dt + \frac{1}{2}\left\langle e(T), Pe(T)\right\rangle, \qquad (0.3)$$

в котором T — фиксированное конечное время, Q и P — положительные полуопределенные $(n \times n)$-матрицы, R — положительно определенная $(m \times m)$-матрица и $e(t)$ — ошибка системы, т. е.

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где

$$z = (z^1, \ldots, z^n)$$

— n-мерный действительный вектор, характеризующий заданный режим функционирования системы (0.1).

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к рассматриваемой задаче приводит к достаточно сложной краевой задаче, если только (0.1)–(0.3) не сводится к линейно-квадратичной задаче слежения (см., например, [1, с. 657]). Однако во многих практических ситуациях режим $z(t)$ устроен достаточно плохо и указанное сведение становится невозможным. В этом случае, если влиянием функции f на систему (0.1) по каким-либо причинам можно пренебречь, то задача (0.1)–(0.3) оказывается достаточно простой и ее, видимо, можно считать полностью решенной (см., например, [1, 2]). Кроме того, весьма важным представляется то обстоятельство, что здесь решение удается получить в виде закона управления с обратной связью. Поэтому в общем случае для получения оценок решения задачи (0.1)–(0.3) используют различные методы, которые в той или иной форме используют линеаризацию и последовательные приближения, позволяющие свести ее (задачу) к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач слежения (см., например, [2–5]).

Целью настоящей работы является получение решения задачи (0.1)–(0.3) в виде закона управления с обратной связью. Для получения искомого решения используется некая процедура, являющаяся модификацией упоминавшихся выше методов последовательных приближений и заключающаяся с создании некоторой специальным образом генерируемой последовательности вспомогательных линейно-квадратичных задач слежения.

1. Вспомогательные задачи

Прежде всего, опишем первую (теперь уже классическую) процедуру построения оценок решения нелинейно-квадратичных задач оптимального управления, фактически лежащую в основе последующих построений.

Следуя [3], рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left[\big\langle e(t), Qe(t) \big\rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle \right] dt + \frac{1}{2} \big\langle e(T), Pe(T) \big\rangle \tag{1.1}$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x(t_0) = c, \tag{1.2}$$

где $g = (g^1, \dots, g^n)$ — нелинейная векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

Пусть $u_N(t), x_N(t)$ — некоторое N-е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (1.1), (1.2). Тогда $(N + 1)$-е приближение $u_{N+1}(t), x_{N+1}(t)$ может быть получено как решение вспомогательной задачи о минимизации функционала

$$I_{N+1}(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [\big\langle e(t), Qe(t) \big\rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] \, dt + \frac{1}{2} \big\langle e(T), Pe(T) \big\rangle \tag{1.3}$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x_N, u_N) + A_N(t)(x - x_N) + B_N(t)(u - u_N), \quad x(t_0) = c, \tag{1.4}$$

в котором $A_N(t)$ и $B_N(t)$ — действительные $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, задаваемые равенствами

$$A_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j} \right) \Bigg|_{\substack{u=u_N(t) \\ x=x_N(t)}} \tag{1.5}$$

и

$$B_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \Bigg|_{\substack{u=u_N(t) \\ x=x_N(t)}} \tag{1.6}$$

соответственно.

Задача (1.3), (1.4) представляет собой вариант задачи слежения для линейной системы и ее решение, как известно, дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'_N(t)\left[h_{N+1}(t) - K_{N+1}(t)x_{N+1}(t)\right], \tag{1.7}$$

в котором $K_{N+1}(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned}\dot{K}_{N+1}(t) = -K_{N+1}(t)A_N(t) - A'_N(t)K_{N+1}(t) +\\ + K_{N+1}(t)B_N(t)R^{-1}B'_N(t)K_{N+1}(t) - Q\end{aligned} \tag{1.8}$$

с граничным условием

$$K_{N+1}(T) = P, \tag{1.9}$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}\dot{h}_{N+1}(t) = -\left[A_N(t) - B_N(t)R^{-1}B'_N(t)K_{N+1}(t)\right]'h_{N+1}(t) - Qz(t) +\\ + K_{N+1}(t)\left[g(x_N(t), u_N(t)) - A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)\right]\end{aligned} \tag{1.10}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T) \tag{1.11}$$

(см., например, [1, с. 699]) [1].

Если построенные выше последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_N, \dots \tag{1.12}$$

и

$$u_1, u_2, \dots, u_N, \dots \tag{1.13}$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$, то из (1.12) и (1.13) можно выбрать подпоследовательности

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_k}, \dots \tag{1.14}$$

и

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \dots, u_{N_k}, \dots, \tag{1.15}$$

равномерно на $[t_0, T]$ сходящиеся к некоторым непрерывным функциям x^* и u^* соответственно, где

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty.$$

[1] Здесь в книге [1] имеет место очевидная опечатка.

Тогда, если окажется, что последовательность (1.14) совпадает с последовательностью (1.12), а последовательность (1.15) — с последовательностью (1.13), то, используя соотношения (1.5)–(1.11), можно рассмотреть и вопрос о том, будет ли $u^*(t)$ оптимальным управлением в задаче (1.1), (1.2).

Заметим теперь, что показать эквивалентность последовательностей (1.12), (1.14) и (1.13), (1.15) в общем случае совсем непросто. Поэтому в работе [4] была предложена иная вспомогательная задача, более полно учитывающая конкретные особенности задачи (0.1)–(0.3).

Следуя [4], для всех значений $N = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \left[\big\langle e(t), Qe(t)\big\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\right] dt + \frac{1}{2}\,\big\langle e(T), Pe(T)\big\rangle \quad (1.16)$$

с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N), \quad x(t_0) = c. \quad (1.17)$$

Для заданных функций x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (1.16), (1.17) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'\big[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)\big], \quad (1.18)$$

в котором $x_{N+1}(t)$ — решение уравнения (1.17), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(t_0) = c,$$

$K(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \quad (1.19)$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \quad (1.20)$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -\big[A - BR^{-1}B'K(t)\big]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f\big(x_N(t), u_N(t)\big) \quad (1.21)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T). \quad (1.22)$$

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ задано, то соотношения (1.16)–(1.22) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях T позволяет установить существование решений задачи (0.1)–(0.3) и дает эффективную процедуру построения этих решений. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{1.23}$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c]. \tag{1.24}$$

2. Основная теорема

Пусть L_2 — множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T — часть множества L_2, такая что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (0.1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяющее начальному условию (0.2). В этих обозначениях имеет место следующая основная

Теорема 1. *Для каждой точки* (t_0, c) *пространства* $\mathbb{R}^{1+n}$ *найдется такое действительное число* $T_0 > t_0$, *что для всех значений* $t_0 < T < T_0$ *задача* (0.1)–(0.3) *имеет решение* $x^*(t), u^*(t)$. *Более того, оказывается, что при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'\big[h^*(t) - K(t)x^*(t)\big], \tag{2.1}$$

где $h^*(t)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{h}^*(t) = -\big[A - BR^{-1}B'K(t)\big]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f\big(x^*(t), u^*(t)\big) \tag{2.2}$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ и $H(t)$ — решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \big[A - BR^{-1}B'K(t)\big]X, \quad X(t_0) = E$$

и, соответственно,

$$\dot{H} = -\big[A - BR^{-1}B'K(t)\big]'H, \quad H(T) = E,$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица. Тогда при использовании управления (1.18) уравнение (1.17) эквивалентно уравнению

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)\big[BR^{-1}B'h_{N+1}(\tau) + f\big(x_N(\tau), u_N(\tau)\big)\big]\,d\tau, \tag{2.4}$$

а уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) — уравнению

$$h_{N+1}(t) = H(t)Pz(T) + \int_T^t H(t-\tau)\big(K(\tau)f\big(x_N(\tau), u_N(\tau)\big) - Qz(\tau)\big)\,d\tau. \quad (2.5)$$

Принимая во внимание (2.5), перепишем уравнение (2.4) в следующем эквивалентном виде:

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t-\tau)\Big\{f\big(x_N(\tau), u_N(\tau)\big) + BR^{-1}B'\Big[H(\tau)Pz(T) + \\ + \int_T^\tau H(\tau - s)\big(K(s)f\big(x_N(s), u_N(s)\big) - Qz(s)\big)\,ds\Big]\Big\}\,d\tau.$$

Тогда с учетом (1.18) система (2.4), (2.5) может быть представлена в символической форме

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t \Big[f_1\big(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)\big) + \\ + \int_\tau^T f_2\big(\tau, s, x_N(s), h_N(s)\big)\,ds\Big]\,d\tau, \quad (2.6)$$

$$h_{N+1}(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3\big(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)\big)\,d\tau, \quad (2.7)$$

где

$$h_0 = Pz(T),$$

а

$$f_1 = (f_1^1, \dots, f_1^n), \quad f_2 = (f_2^1, \dots, f_2^n) \quad \text{и} \quad f_3 = (f_3^1, \dots, f_3^n)$$

— соответствующие векторные функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_l^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f_l^i}{\partial h^j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3$$

в пространстве

$$[t_0, T] \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Пусть теперь a — некоторое положительное число. Обозначим через Σ множество точек $(t, x, h) \in \mathbb{R}^{1+2n}$, для которых выполнены неравенства

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad |x - c| \leqslant a, \quad |h - h_0| \leqslant a, \quad (2.8)$$

где $|x|$ — евклидова длина вектора x. Так как Σ — компактное множество, то найдутся такие положительные числа M и L, что для всех значений t, x и h, удовлетворяющих условиям (2.8), при $t_0 \leqslant \tau \leqslant T$ выполнены неравенства

$$|f_l(t, \tau, x, h)| \leqslant M, \quad l = 1, 2, 3, \tag{2.9}$$

и

$$\left|\frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial x^j}\right| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial h^j}\right| \leqslant L, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad l = 1, 2, 3. \tag{2.10}$$

Обозначим через Ω множество всех непрерывных пар (x, h) функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^n$ и при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяющих условиям

$$|x(t) - c| \leqslant a, \quad |h(t) - h_0| \leqslant a, \tag{2.11}$$

т. е. Ω — множество непрерывных пар (x, h) функций, графики которых лежат в Σ. При этом будем рассматривать часть Ω_T множества Ω, такую что наряду с неравенствами (2.11) при $(x, h) \in \Omega_T$ выполнялись бы также неравенства

$$|X(t)c - c| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |H(t)h_0 - h_0| \leqslant \frac{a}{2} \tag{2.12}$$

и

$$|x(t) - X(t)c| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |h(t) - H(t)h_0| \leqslant \frac{a}{2}\,. \tag{2.13}$$

Тогда в силу неравенств

$$|x(t) - c| \leqslant |x(t) - X(t)c| + |X(t)c - c|$$

и

$$|h(t) - h_0| \leqslant |h(t) - H(t)h_0| + |H(t)h_0 - h_0|$$

из условий (2.12) и (2.13) следуют неравенства (2.11) и, таким образом, принадлежность пары (x, h) к множеству Ω.

Для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ положим

$$\varphi(t) = (x(t), h(t))$$

и будем говорить, что $\varphi \in \Omega_T$, если $(x, h) \in \Omega_T$. Обозначим через F оператор, задаваемый правыми частями системы (2.6), (2.7). Тогда, как легко видеть, если число T достаточно мало, то из принадлежности φ

к Ω_T следует принадлежность к Ω_T и функции

$$\varphi^* = F\varphi, \tag{2.14}$$

где $\varphi^* = (x^*, h^*)$.

В самом деле, для того чтобы функция φ^*, задаваемая соотношением (2.14), принадлежала к множеству Ω_T, достаточно, чтобы при выполнении условия (2.12) для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ были выполнены также и неравенства

$$|x^*(t) - X(t)c| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |h^*(t) - H(t)h_0| \leqslant \frac{a}{2}.$$

Но в силу (2.6), (2.7) и (2.9) имеем

$$|h^*(t) - H(t)h_0| = \left| \int_t^T f_3\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big)\,d\tau \right| \leqslant M(T - t_0)$$

и

$$|x^*(t) - X(t)c| =$$
$$= \left| \int_{t_0}^t \left[f_1\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) + \int_\tau^T f_2\big(\tau, s, x(s), h(s)\big)\,ds \right] d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant M((T - t_0) + 1)(T - t_0).$$

Отсюда следует, что при

$$M((T - t_0) + 1)(T - t_0) \leqslant \frac{a}{2} \tag{2.15}$$

условие, предъявляемое к оператору F в (2.14), выполнено.

Пусть теперь $\varphi = (x, h)$ и $\psi = (y, g)$ — некоторые две функции, принадлежащие к множеству Ω_T. Тогда при выполнении неравенства (2.15) функции

$$\varphi^* = F\varphi$$

и

$$\psi^* = F\psi$$

также принадлежат к Ω_T, где

$$\varphi^* = (x^*, h^*) \quad \text{и} \quad \psi^* = (y^*, g^*).$$

При этом оказывается, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leqslant k\|\varphi - \psi\|, \tag{2.16}$$

где

$$\|\varphi\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi(t)|$$

и k — некоторое положительное число, не зависящее от φ и ψ и при всех достаточно малых значениях $T > t_0$ удовлетворяющее условию

$$k < 1. \tag{2.17}$$

В самом деле, в силу неравенств (2.10) и формулы Лагранжа для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $t_0 \leqslant \tau \leqslant T$

$$\Big| f_l\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_l\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant n^2 L\big(|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)|\big), \quad l = 1, 2, 3 \tag{2.18}$$

(см., например, [6, с. 163]). Поэтому

$$\left| \int_t^T \Big[f_3\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_3\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) \Big] d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant n^2 L \left[\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau + \int_t^T |h(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \right]. \tag{2.19}$$

Но

$$\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau \tag{2.20}$$

и

$$\int_t^T |h(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau. \tag{2.21}$$

Тогда, если

$$h^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big)\, d\tau$$

и

$$g^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big)\, d\tau,$$

то из неравенств (2.19)–(2.21) следует, что

$$\|h^* - g^*\| \leqslant 2n^2 L(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \tag{2.22}$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.18)

$$\Bigg| \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg\{ f_1\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_1\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{T} \Big[f_2\big(\tau, s, x(s), h(s)\big) - f_2\big(\tau, s, y(s), g(s)\big) \Big] ds \Bigg\} d\tau \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant n^2 L \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)| +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{T} \big(|x(s) - y(s)| + |h(s) - g(s)| \big) \, ds \Bigg] d\tau. \qquad (2.23)$$

Но

$$\int\limits_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \qquad (2.24)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t} |h(\tau) - g(\tau)| \, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau. \qquad (2.25)$$

Тогда, если

$$x^*(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[f_1\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) + \int\limits_{\tau}^{T} f_2\big(\tau, s, x(s), h(s)\big) \, ds \Bigg] d\tau$$

и

$$y^*(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[f_1\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) + \int\limits_{\tau}^{T} f_2\big(\tau, s, y(s), g(s)\big) \, ds \Bigg] d\tau,$$

то из неравенств (2.23)–(2.25) и (2.20), (2.21) следует, что

$$\|x^* - y^*\| \leqslant 2n^2 L((T - t_0) + 1)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \qquad (2.26)$$

При этом, согласно неравенству треугольника, несложно заметить, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leqslant \|x^* - y^*\| + \|h^* - g^*\|. \qquad (2.27)$$

Поэтому, объединяя неравенства (2.22), (2.26) и (2.27), окончательно получаем, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leqslant 4n^2 L((T - t_0) + 1)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|.$$

Таким образом, если

$$4n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0) < 1, \tag{2.28}$$

то, полагая

$$k = 4n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0),$$

видим, что при выполнении условия (2.28) выполнены также и условия (2.16) и (2.17). Сказанное означает, что существует такое действительное число T_0, что при $t_0 < T < T_0$ число T удовлетворяет условиям (2.15) и (2.28) и обеспечивает выполнение требований, предъявляемых к (2.14), (2.16) и (2.17). Поэтому везде в дальнейшем будем считать число T заданным столь малым, что неравенства (2.15) и (2.28) для него выполнены.

Для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $N = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\varphi_N(t) = \big(x_N(t), h_N(t)\big)$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots, \tag{2.29}$$

определенных и непрерывных на отрезке $[t_0, T]$, в силу системы (2.6), (2.7) приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.30}$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, h_0). \tag{2.31}$$

Поскольку функция (2.31) принадлежит к множеству Ω_T, то согласно равенству (2.30) все функции последовательности (2.29) также принадлежат к Ω_T. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi, \tag{2.32}$$

в котором в силу условий (2.16), (2.17) F является сжимающим оператором, отображающим множество Ω_T в себя. Поэтому уравнение (2.32) имеет на множестве Ω решение φ^*, которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \tag{2.33}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$ (см., например, [6, с. 165]). Но, так как по построению

$$h_0 = Pz(T),$$

то согласно (2.31) последовательность (2.30) удовлетворяет начальным приближениям (1.23) и (1.24). Поэтому из равенств (1.18) и (2.33) следует существование функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$, построенных по формулам

$$\lim_{N\to\infty} u_N(t) = u^*(t) \tag{2.34}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = x^*(t), \tag{2.35}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$. Поэтому функция $x^*(t)$ является соответствующим $u^*(t)$ решением уравнения (0.1) с начальным условием

$$x^*(t_0) = c.$$

При этом уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) переходит в уравнение (2.2) с граничным условием (2.3), а закон управления (1.18) — в (2.1). Более того, по построению

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*)$$

и

$$J_N(u_N) \leqslant J_N(u)$$

для всех $u \in L_2^T$, откуда и следует, что для каждой функции $u \in L_2^T$

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*) \leqslant \lim_{N\to\infty} J_N(u),$$

т. е. $u^*(t)$ — оптимальное управление в задаче (0.1)–(0.3).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Необходимо отметить, что автономность системы (0.1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе фактически нигде не используется и приняты исключительно для простоты обозначений. В любом случае решение задачи (0.1)–(0.3) может быть найдено из тривиального решения вспомогательных линейно-квадратичных задач по формулам (2.34), (2.35), а существование решения и предельного перехода по построению гарантировано.

3. Общий случай

Вновь рассмотрим задачу о минимизации функционала (1.1) при ограничении (1.2). Поскольку для любых действительных $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матриц A и B

$$g(x, u) \equiv Ax + Bu + [g(x, u) - Ax - Bu],$$

то, как легко видеть, в качестве тривиального следствия теоремы 1 справедлива

Теорема 2. *Пусть* A *и* B — *произвольные действительные* $(n \times n)$- *и* $(n \times m)$-*матрицы. Тогда для каждой точки* (t_0, c) *пространства* $\mathbb{R}^{1+n}$ *найдется такое действительное число* $T_0 > t_0$, *что для всех значений* $t_0 < T < T_0$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет решение* $x^*(t)$, $u^*(t)$. *Более того, оказывается, что при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'\big[h(t) - K(t)x^*(t)\big],$$

где $h(t)$ — *решение дифференциального уравнения*

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) = &-\big[A - BR^{-1}B'K(t)\big]'h(t) - Qz(t) + \\ &+ K(t)\big[g(x^*(t), u^*(t)) - Ax^*(t) - Bu^*(t)\big],\end{aligned}$$

с граничным условием

$$h(T) = Pz(T).$$

Замечание. Весьма важным представляется то, что согласно теоремам 1 и 2 решение каждой из задач (0.1)–(0.3) или (1.1), (1.2) всегда дается нелинейным законом управления с обратной связью. Более того, из доказательства теоремы 1 видно, что если на произвольном отрезке $[t_0, T]$ схема (1.16)–(1.24) в силу каких-либо обстоятельств сходится (метод последовательных приближений Пикара), то она сходится именно к решению задачи (0.1)–(0.3).

Литература

1. *Атанс М.*, *Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. *Ли Л. Р.*, *Маркус Л.* Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.
4. *Afanas'ev A. P.*, *Dzyuba S. M.*, *Lobanov S. M.*, *Tyutyunnik A. V.* Successive approximation and suboptimal control of systems with separeted linear part // Appl. Comp. Math. 2003. Vol. 2. № 1. P. 48–56.
5. *Afanas'ev A. P.*, *Dzyuba S. M.*, *Lobanov S. M.*, *Tyutyunnik A. V.* On a suboptimal control of nonlinear systems via quadratic criteria // Appl. Comp. Math. 2004. Vol. 3. № 2. P. 158–169.
6. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.