

# **Математическое моделирование последовательного заполнения телекоммуникационных сетей с топологией «колесо» потоками связи \***

Я. Р. Гринберг, И. И. Курочкин

*Институт системного анализа Российской академии наук  
(ИСА РАН)*

В работе представлены результаты математического моделирования задачи рационального использования ресурсов телекоммуникационной сети. Телекоммуникационная сеть представляется в виде неориентированного графа, в котором дуги имеют ограничение на пропускную способность. Процесс заполнения заключается в удовлетворении заявок на организацию каналов связи между парами полюсов сети. Заполнение сети происходит последовательно, посредством различных оригинальных алгоритмов. Дана краткая характеристика алгоритмов и исследована их сравнительная эффективность в численном эксперименте на множестве сетей топологии «колесо».

## **Введение**

Рассмотрим некоторую телекоммуникационную сеть, состоящую из узлов и дуг, имеющих конечную пропускную способность, которая соединяет множество абонентов. Организация каналов связи в сети может

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–07–89326), ОИТВС РАН (проект № 2.4), и Президиума РАН (проект 1.3).

Работа была доложена на XV Международной Конференции по Вычислительной Механике и Современным Прикладным Программным Системам (ВМСППС 25–31 мая 2007 года).

осуществляться различными способами и удовлетворять различным критериям поиска пути. Попытку проложить канал связи между парой полюсов будем называть заявкой. В нашем случае заявки поступают последовательно во времени и случайным образом распределены между парами полюсов. Цель данной работы — предложить такие алгоритмы заполнения сети, при которых общее число удовлетворенных заявок было бы максимальным.

На практике, решение такой задачи необходимо при маршрутизации: в автономной системе или ее областях; в IP-сетях при использовании туннелирования, MPLS и VPN; в SDH-сетях и т. п., а также при проектировании микропроцессоров ЭВМ и вычислительных кластеров.

Настоящая работа является продолжением и развитием наших работ [1–5] и представляет результаты по заполнению телекоммуникационных сетей типа «колесо».

## Постановка задачи

Классической задачей теории потоков в сетях является задача допустимости многопродуктового потока, которая решается методом линейного программирования (ЛП). Однако практические задачи могут носить и иной характер. Например, при прокладке каналов связи в телекоммуникационной сети. В этом случае сеть заполняется последовательно, и задача заключается в том, чтобы на каждом шаге путь проложить оптимально по тому или иному критерию. Существующие алгоритмы реализуют либо критерий кратчайшего пути, либо критерий пути минимальной стоимости (алгоритм кратчайшего пути является частным случаем алгоритма минимальной стоимости). Стоимости (метрики) дуг выбираются по разным критериям, например, время задержки, широкополосность, надежность и др., однако ни один из этих критериев не связан с топологией сети и пропускными способностями дуг сети.

Использование метода ЛП для решения задачи последовательного заполнения сети невозможно, так как все множество заявок должно быть известно в начальный момент.

Рассматривается следующая задача: в многополюсной сети последовательно возникает необходимость найти путь между некоторой па-

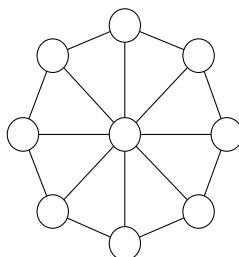
рой полюсов и провести по нему поток единичной интенсивности. Поскольку, порядок соединения пар полюсов неизвестен, то попытку проложить путь между парой полюсов будем называть заявкой. А процесс удовлетворения заявок или прокладку путей между полюсами будем называть процессом заполнения сети или заполнением сети. В задаче предполагается, что распределение заявок между парами полюсов равномерное, а исходная «пустая» сеть произвольна: значения пропускных способностей дуг задаются случайным образом в соответствии с некоторым законом распределения.

В сети каждой паре полюсов соответствует некая характерная величина — пропускная способность минимального разреза, причем по основной теореме теории потоков эта величина равна максимальному потоку, который может существовать в сети между этими полюсами. Естественно, что в произвольной сети разным парам полюсов соответствуют разные значения пропускной способности минимальных разрезов (или максимальных потоков) между ними. Очевидное предположение заключается в том, что чем «равномернее» сеть, т. е. чем меньше разница между максимальным и минимальным по пропускной способности минимальными разрезами, каковые значения определяются среди всех пар полюсов, тем большее количество заявок может быть удовлетворено, поскольку мы предположили равномерный закон распределения заявок между всеми парами полюсов.

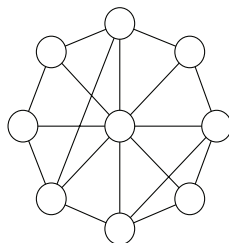
## Топология сетей

Предполагается, что исходная «пустая» сеть имеет топологию типа «колесо». Будем рассматривать следующие подтипы топологии «колесо»:

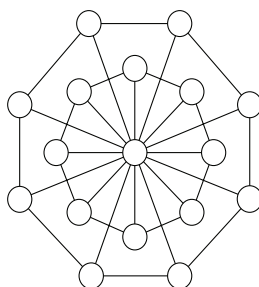
Простое «колесо» — центральный узел соединен со всеми периферическими узлами, а периферические узлы соединены между собой и образуют «кольцо».



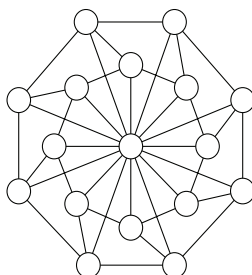
«Колесо» с хордами — помимо связей как в топологии простое «колесо» существуют хордовые соединения между периферическими узлами.



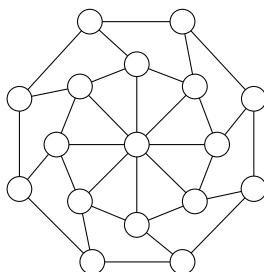
«Двойное колесо» — определяется как два простых «колеса», у которых общий центральный узел.



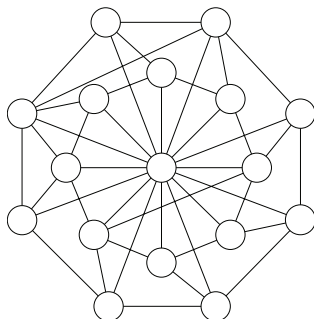
«Двойное колесо» с хордами — то же, что и двойное колесо, но между периферическими узлами существуют хорды, необязательно в пределах одного «кольца».



«Периферическое двойное колесо» — когда одно из «колец» не имеет связи с центральным узлом, а связано только с другим «кольцом».



«Сильносвязное двойное колесо» — существуют связи между двумя «кольцами», между каждым «кольцом» и центральным узлом. Возможно присутствие хордовых связей.



## Краткая характеристика последовательных алгоритмов

В эксперименте принимали участие следующие алгоритмы<sup>1</sup> (в скобках даны сокращения, приведенные в таблицах и на графиках):

- простой алгоритм (П);
- субоптимальный минимально-разрезный алгоритм (РС);
- аддитивный минимально-разрезный алгоритм (РА);
- гибридный минимально-разрезный алгоритм (РГ);
- равномерный по дугам алгоритм (Д).

Расчет путей по всем этим алгоритмам производится как определение пути между двумя полюсами в сети, имеющего минимальную стоимость из всех возможных путей. Алгоритмы различаются разными способами определения этих стоимостей для дуг сети. Ниже приведены формулы, по которым эти величины определялись для каждого из алгоритмов.

### Простой алгоритм

Весы для всех ненулевых дуг определяются как 1. Поиск осуществляется по методу нахождения кратчайшего пути (алгоритм Дейкстры).

Матрица дополнительных весов дуг  $W$  определяется по матрице смежности сети  $Net$ :

$$W = \text{sign}(|Net|).$$

<sup>1</sup> Подробные выводы и объяснения см. в [1, 2, 3, 4].

### Субоптимальный минимально-разрезный алгоритм

В [1] был предложен последовательный алгоритм, в котором назначение весов дугам сети также основывалось на измерении пропускных способностей минимальных разрезов и вхождении данной дуги в эти разрезы. Именно, алгоритм определялся следующей метрикой для каждой дуги, которая входит в минимальные разрезы

$$W_m = N - 1 + (M - h_m + 1)^4,$$

где  $h_m$  — порядковый номер величины минимального разреза  $R_m$ , которые ранжированы в порядке возрастания пропускной способности.

Вес всех остальных дуг, которые не входят ни в один из минимальных разрезов задается  $W_m=1$ .

Назначение метрики для каждой дуги начинается с минимального значения минимальных разрезов между парами полюсов. В процессе назначения метрики, помечаются дуги с назначенной метрикой. В случае, если дуга уже помечена, то назначение новой метрики не происходит.

Данная функция была выбрана по принципу: чем меньше пропускная способность разреза, куда входит данная дуга, тем «дороже» она стоит. Этот алгоритм мы назвали разрезным субоптимальным алгоритмом.

### Оптимальный алгоритм

Этот алгоритм не участвовал в эксперименте. Тем не менее, все минимально — разрезные алгоритмы основаны на величинах, введенных для этого алгоритма. Поэтому приводим его здесь полностью.

Пусть имеется сеть  $G$ , состоящая из  $N$  узлов,  $A_1, A_2, \dots, A_N$  и  $K$  дуг,  $B_1, B_2, \dots, B_K$ , имеющих пропускные способности  $b_k, k=1, 2, \dots, K$ . Узлы  $A_i, i=1, 2, \dots, N_1, N_1 \leq N$  будем называть также полюсами. Упорядочим каким-либо образом все пары полюсов. Общее количество  $M$  различных пар полюсов в сети  $G$  равно  $M = N_1(N_1-1)/2$ .

Стоимости дуг при равномерном по всем парам полюсов потоке требований рассчитываются по формуле, полученной в [3]:

$$W_k = \frac{\overline{R}^2}{R^2} r_k - \frac{1}{MR} \sum_{m=1}^M R_m r_{mk},$$

где  $b_k$  — пропускная способность дуги в сети  $G$ ;  $R_m$  — пропускная способность минимального разреза между  $m$ -й парой полюсов, равная,

по теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе максимальному потоку между этой парой полюсов;  $\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R_m$  — среднее значение пропускных способностей минимальных разрезов между всеми парами полюсов;  $r_{mk} = \frac{u_{mk}}{L_m}$ ,  $r_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M r_{mk}$ ,  $L_m$  — полное количество минимальных разрезов между  $m$ -й парой полюсов; числа  $u_{mk}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, K}$  обозначают количество различных минимальных разрезов между  $m$ -й парой полюсов, в которые входит дуга  $b_k$ .

Этот алгоритм является оптимальным, а именно: приведенные стоимости таким образом определяют очередной путь, что разность  $\chi_2 - \chi_1$  оказывается минимальной по сравнению со всеми другими возможными путями. Величины  $\chi$  определяются по формуле

$$\chi = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{R_m}{\bar{R}} - 1 \right)^2,$$

в которую подставляются пропускные способности дуг до и после удовлетворения очередной заявки и которая имеет смысл среднеквадратичного отклонения минимальных разрезов между всеми парами полюсов; ее мы называем мерой неравномерности сети по минимальным разрезам (МНМР) или критерием  $\chi$ .

Расчет дополнительной метрики по этому алгоритму приводит как к положительным, так и отрицательным весам дуг. Алгоритм Беллмана-Форда решает проблему нахождения минимального по стоимости пути в этом случае только при условии, что в процессе работы не возникает отрицательный цикл. В нашем случае для большинства сетей и шагов это условие не выполняется, поэтому применение этого и других известных алгоритмов невозможно. Именно поэтому оптимальный алгоритм в настоящем эксперименте не участвовал.

### **Аддитивный минимально-разрезный алгоритм**

Оптимальный алгоритм можно изменить, чтобы согласовать его с ограничениями алгоритмов Беллмана-Форда и Дейкстры, добавив к его весам положительную постоянную и сделав, таким образом, веса всех дуг положительными. Такой алгоритм мы назвали аддитивным мини-

мально-разрезным алгоритмом, его дополнительная метрика определена следующим образом [4]:

$$W_k' = W_k + W_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где  $W_k$  определяется так же, как и для оптимального алгоритма,  $W_0$  — максимальный по модулю элемент среди отрицательных величин  $W_k$ , взятый с обратным знаком (т. е. положительный). Эта модификация, хотя и кажется «безобидной», на самом деле существенно меняет критерий  $\chi$ , а именно, введение постоянной для всех дуг сети положительной добавки к весам  $W_0 + \varepsilon$ , означает замену критерия  $\chi$  на следующий

$$\chi' = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{R_m}{R} - 1 \right)^2 + (W_0 + \varepsilon) \sum b_k,$$

и сам факт улучшения становится не таким очевидным.

### **Равномерный по дугам алгоритм**

Этот алгоритм основан на том, что дуги сети разбиваются на классы по величине пропускной способности. Стоимости дугам назначаются таким образом, что стоимость любого пути, проходящего по дугам с меньшими пропускными способностями, будет меньше стоимости одной дуги следующего класса. Подробный вывод и формулы для дополнительной метрики этого алгоритма приведены в [3]

Алгоритм не зависит от закона распределения заявок по парам полюсов.

### **Гибридный минимально-разрезный алгоритм**

Этот алгоритм повторяет идею дугового алгоритма, с той разницей, что классы дуг определяются по принадлежности этой дуги к тому или иному минимальному разрезу. Подробно определение «дополнительной метрики» для этого алгоритма приведено в [4].

Вычислительная сложность этого алгоритма заполнения сети будет меньше вычислительной сложности аддитивного алгоритма по минимальным разрезам и оптимального алгоритма.

Итак, совокупность алгоритмов, если не считать простого, являющегося для данного исследования эталонным, разбивается на две группы.



Первая группа алгоритмов состоит из единственного алгоритма, а именно, из равномерного по дугам алгоритма. Особенность его в том, что метрика дуг определяется только по пропускной способности дуг.

Во вторую группу входят аддитивный минимально-разрезный, субоптимальный минимально-разрезный и гибридный минимально-разрезный алгоритмы. Их отличает то, что при определении метрик в них, так или иначе, учитывается вхождение дуг в минимальные разрезы между парами полюсов.

## Параметры математического моделирования

В данной статье предлагается рассмотреть и проанализировать результаты математического моделирования по заполнению сетей потоками связи с помощью последовательных алгоритмов. Рассматриваются сети со стохастической топологией, с несколькими парами полюсов (парами источник-сток). Заполнение производится единичными потоками.

При моделировании заполнения сети время жизни заявки не учитывается и приравнивается к бесконечности, таким образом моделирование проводится в статическом режиме, в котором можно с минимальными вычислительными затратами оценить заполнение сети «на отказ».

Модель сети определяется с помощью следующих параметров:

- граф связности, в котором указываются пропускные способности дуг сети;
- вектор пар полюсов (пар источник-сток);
- избыточный вектор заявок на проведение единичного потока (Заявка определяется как номер пары полюсов, между которыми следует провести единичный поток);
- идентификационный уникальный номер сети.

Математическое моделирование процесса заполнения сети происходит до наступления следующих критериев:

- критерий первого отказа (проведение очередной заявки невозможно, одна из пар источник-сток несвязна; минимальный из множества минимальных разрезов между парами полюсов равен 0);
- критерий полного отказа (стоки не достижимы из источников, для всех пар полюсов; все минимальные разрезы между парами полюсов равны 0).

В рамках эксперимента была произведена генерация всех подтипов сетей топологии «колесо». Всего было сгенерировано 120 сетей — по 20 сетей на каждый подтип. Было проведено математическое моделирование по последовательному заполнению сетей топологии «колесо» 5-ю алгоритмами.

По результатам заполнения множества из 120 сетей был проведен сравнительный анализ по алгоритмам и различным подтипам топологии «колесо». Сравнительный анализ показал, что минимально-разрезные алгоритмы позволяют проводить для некоторых сетей на 20–25 % больший поток (критерий полного отказа) и на 60 % больший поток (критерий первого отказа), чем при использовании простого алгоритма. Максимальное превышение потока было показано на топологиях: «простое колесо» и «сильносвязанное двойное колесо»

## Моделирование

Таблица № 1

Параметры исследуемых сетей

№	ID сети	Под-тип	Кол-во узлов	Кол-во пар полюсов	Кол-во заявок	Макс. Проп. Сп.	% нулевых дуг	Нач. МН по МР
1	733187.61731	1	16	28	2800	98	10	0.288
2	733187.38872	1	16	28	2800	100	10	0.059
3	733187.51893	1	16	28	2800	97	10	0.189
4	733187.73293	1	16	28	2800	96	10	0.403
5	733187.67141	1	16	28	2800	94	20	0.342
6	733187.49682	1	16	28	2800	87	20	0.167
7	733187.59124	1	16	28	2800	97	20	0.262
8	733187.58784	1	16	28	2800	99	20	0.258
9	733187.87390	1	16	28	2800	95	30	0.544
10	733187.61360	1	16	28	2800	87	30	0.284
11	733187.84632	1	16	28	2800	97	30	0.517
12	733187.51905	1	16	28	2800	94	30	0.189
13	733187.64548	1	16	28	2800	97	40	0.316
14	733188.31900	1	16	28	2800	97	40	0.989
15	733187.43989	1	16	28	2800	95	40	0.110
16	733187.73739	1	16	28	2800	99	40	0.408

Продолжение Таблицы 1

№	ID сети	Под-тип	Кол-во узлов	Кол-во пар плюсов	Кол-во заявок	Макс. Проп. Сп.	% нулевых дуг	Нач. МН по МР
17	733187.55565	1	16	28	2800	91	50	0.226
18	733187.48155	1	16	28	2800	99	50	0.152
19	733187.69560	1	16	28	2800	100	50	0.366
20	733187.45676	1	16	28	2800	92	50	0.127
21	733187.35972	6	17	28	2800	98	10	0.035
22	733187.38426	6	17	28	2800	100	10	0.059
23	733187.43846	6	17	28	2800	99	10	0.114
24	733187.44286	6	17	28	2800	95	10	0.118
25	733187.39810	6	17	28	2800	100	20	0.073
26	733187.55674	6	17	28	2800	100	20	0.232
27	733187.52698	6	17	28	2800	100	20	0.202
28	733187.65494	6	17	28	2800	100	20	0.330
29	733187.73063	6	17	28	2800	99	30	0.406
30	733187.34072	6	17	28	2800	93	30	0.016
31	733187.70195	6	17	28	2800	94	30	0.377
32	733188.06898	6	17	28	2800	97	30	0.744
33	733187.50156	6	17	28	2800	100	40	0.176
34	733187.40123	6	17	28	2800	91	40	0.076
35	733187.56813	6	17	28	2800	90	40	0.243
36	733187.63479	6	17	28	2800	98	40	0.310
37	733187.36711	6	17	28	2800	95	50	0.042
38	733187.63047	6	17	28	2800	99	50	0.305
39	733187.85150	6	17	28	2800	99	50	0.526
40	733188.16208	6	17	28	2800	89	50	0.837
41	733187.43671	4	17	28	2800	98	10	0.117
42	733187.35713	4	17	28	2800	97	10	0.038
43	733187.38418	4	17	28	2800	99	10	0.065
44	733187.40409	4	17	28	2800	97	10	0.084
45	733187.39551	4	17	28	2800	98	20	0.076
46	733187.56214	4	17	28	2800	97	20	0.243

Продолжение Таблицы 1

№	ID сети	Под-тип	Кол-во узлов	Кол-во пар плюсов	Кол-во заявок	Макс. Проп. Сп.	% нулевых дуг	Нач. МН по МР
47	733187.43569	4	17	28	2800	100	20	0.116
48	733187.71179	4	17	28	2800	99	20	0.392
49	733187.41344	4	17	28	2800	100	30	0.094
50	733187.56144	4	17	28	2800	98	30	0.242
51	733187.71978	4	17	28	2800	95	30	0.400
52	733187.38226	4	17	28	2800	95	30	0.063
53	733188.93734	4	17	28	2800	97	40	1.618
54	733187.66598	4	17	28	2800	95	40	0.346
55	733187.43459	4	17	28	2800	98	40	0.115
56	733188.13358	4	17	28	2800	95	40	0.814
57	733187.58586	4	17	28	2800	98	50	0.266
58	733187.53675	4	17	28	2800	100	50	0.217
59	733188.26574	4	17	28	2800	96	50	0.946
60	733187.75512	4	17	28	2800	99	50	0.435
61	733187.44785	5	17	28	2800	94	10	0.127
62	733187.42052	5	17	28	2800	100	10	0.100
63	733187.63280	5	17	28	2800	87	10	0.312
64	733187.55030	5	17	28	2800	99	10	0.230
65	733187.49271	5	17	28	2800	94	20	0.172
66	733187.85526	5	17	28	2800	94	20	0.535
67	733187.38882	5	17	28	2800	89	20	0.068
68	733187.64051	5	17	28	2800	100	20	0.320
69	733187.63176	5	17	28	2800	99	30	0.311
70	733187.63121	5	17	28	2800	94	30	0.311
71	733187.40848	5	17	28	2800	100	30	0.088
72	733187.40374	5	17	28	2800	100	30	0.083
73	733187.51746	5	17	28	2800	95	40	0.197
74	733188.07723	5	17	28	2800	82	40	0.757
75	733187.36856	5	17	28	2800	99	40	0.048
76	733187.42323	5	17	28	2800	83	40	0.103
77	733187.72012	5	17	28	2800	97	50	0.400

Продолжение Таблицы 1

№	ID сети	Под-тип	Кол-во узлов	Кол-во пар плюсов	Кол-во заявок	Макс. Проп. Сп.	% нулевых дуг	Нач. МН по МР
78	733188.20907	5	17	28	2800	100	50	0.888
79	733188.24906	5	17	28	2800	87	50	0.928
80	733187.50478	5	17	28	2800	88	50	0.184
81	732967.87745	2	16	45	4500	99	10	0.0105
82	732967.90766	2	31	66	6600	99	12	0.0105
83	732967.87598	2	16	28	2800	99	8	0.011
84	732967.87622	2	16	28	2800	97	8	0.0115
85	732967.90078	2	31	28	2800	99	8	0.0129
86	732967.88902	2	21	45	4500	99	10	0.0129
87	732967.88043	2	16	45	4500	98	10	0.0138
88	732967.90695	2	31	45	4500	99	10	0.0154
89	732967.90732	2	31	45	4500	99	10	0.0154
90	732967.89913	2	21	66	6600	99	12	0.0155
91	732967.88729	2	16	66	6600	99	12	0.0157
92	732967.88681	2	16	66	6600	99	12	0.0183
93	732967.89345	2	21	28	2800	99	8	0.0195
94	732967.89040	2	16	45	4500	95	10	0.0235
95	732967.90039	2	21	45	4500	91	10	0.0243
96	732967.88990	2	16	28	2800	98	8	0.0255
97	732967.90356	2	21	45	4500	99	10	0.0257
98	732967.91376	2	31	28	2800	99	8	0.0272
99	732967.91162	2	21	66	6600	87	12	0.0291
100	732967.92561	2	31	45	4500	99	10	0.0328
101	733187.39388	3	17	28	2800	99	10	0.077
102	733187.43035	3	17	28	2800	99	10	0.114
103	733187.37946	3	17	28	2800	100	10	0.063
104	733187.40612	3	17	28	2800	98	10	0.090
105	733187.49933	3	17	28	2800	88	20	0.183
106	733187.74187	3	17	28	2800	97	20	0.425
107	733187.43182	3	17	28	2800	99	20	0.115
108	733187.51950	3	17	28	2800	98	20	0.203

Окончание Таблицы 1

№	ID сети	Под-тип	Кол-во узлов	Кол-во пар полюсов	Кол-во заявок	Макс. Проп. Сп.	% нулевых дуг	Нач. МН по МР
109	733187.39041	3	17	28	2800	89	30	0.074
110	733187.35304	3	17	28	2800	96	30	0.037
111	733187.44233	3	17	28	2800	94	30	0.126
112	733187.71520	3	17	28	2800	98	30	0.399
113	733188.42774	3	17	28	2800	98	40	1.111
114	733187.34045	3	17	28	2800	98	40	0.024
115	733187.51165	3	17	28	2800	98	40	0.195
116	733187.48344	3	17	28	2800	94	40	0.167
117	733188.03094	3	17	28	2800	86	50	0.714
118	733187.89062	3	17	28	2800	100	50	0.574
119	733187.66796	3	17	28	2800	98	50	0.351
120	733187.40040	3	17	28	2800	92	50	0.084

**Выходные данные**

При заполнении сетей были рассчитаны следующие результирующие параметры:

- проведенный поток до 1-го отказа;
- проведенный поток до разрыва всех пар полюсов;
- orderBadSet — множество отклоненных заявок;
- endNet — остаточная сеть;
- orderCount — общее количество удовлетворенных заявок;
- orderEndNumber — Номер последней удовлетворенной заявки;
- netID — идентификатор сети;
- path — множество проложенных путей в исходной последовательности;
- param — структура с динамическими параметрами.

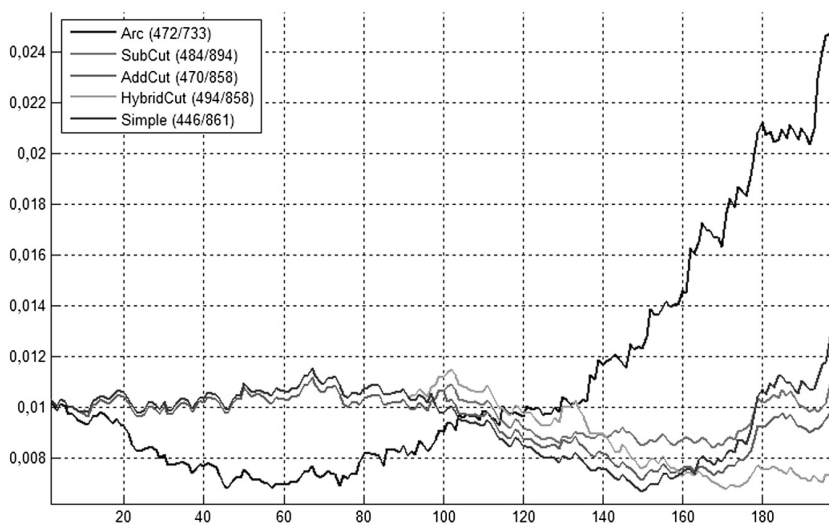
Для определения динамики заполнения сетей на каждом шаге для каждого алгоритма были рассчитаны следующие параметры:

- minArc — минимальная величина пропускной способности дуг в сети;
- maxArc — максимальная величина пропускной способности дуг в сети;
- mArc — средняя величина пропускной способности дуг в сети;

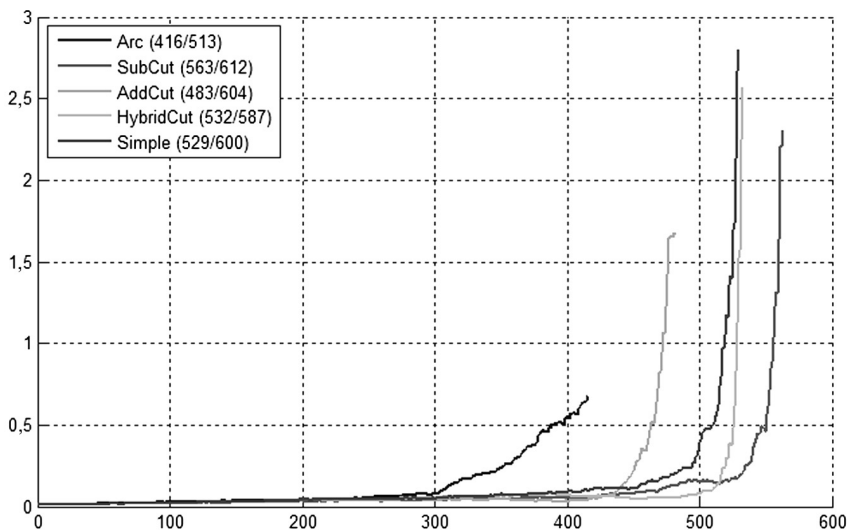
- $\text{stdArc}$  — стандартное отклонение пропускной способности дуг в сети;
- $\text{numArc}$  — количество ненулевых дуг в сети;
- $\text{steadyNullArc}$  — мера неравномерности для дуг (среднеквадратичное отклонение);
- $\text{minCut}$  — минимальная величина по множеству минимальных разрезов;
- $\text{maxCut}$  — максимальная величина по множеству минимальных разрезов;
- $\text{mCut}$  — средняя величина по множеству минимальных разрезов;
- $\text{stdCut}$  — стандартное отклонение по множеству минимальных разрезов;
- $\text{numCut}$  — количество ненулевых минимальных разрезов (количество связных пар полюсов);
- $\text{steadyNullCut}$  — мера неравномерности по минимальным разрезам (среднеквадратичное отклонение).

## Результаты эксперимента

### Динамика заполнения сети № 82 до 1-го отказа (начальный участок)



### Динамика заполнения сети № 83 до 1-го отказа



### Динамика заполнения сети № 83 до полного отказа

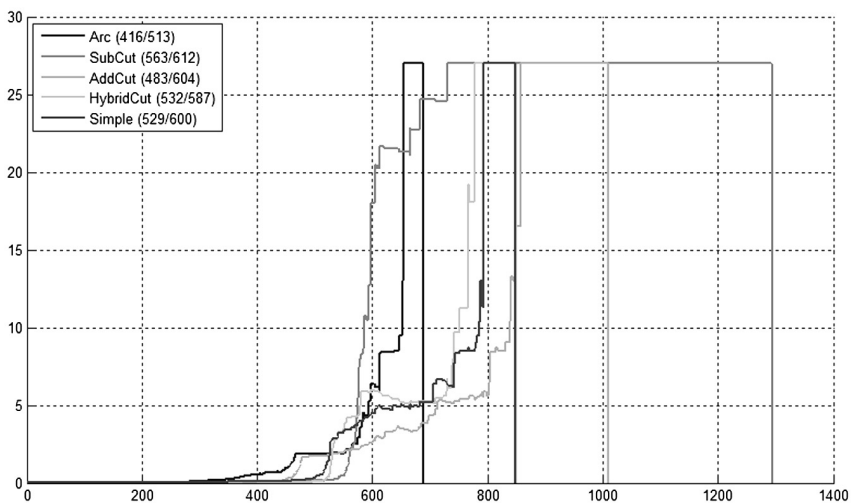




Таблица № 2

## Результаты заполнения множества сетей

№	Тип	Нач. ИИ по МР	Проведенный поток до 1-го отказа					Проведенный поток до полного отказа					Превышение потока до 1-го отказа				Превышение потока до полного отказа			
			П	Д	С	А	Г	П	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г
1	1	0.288	52	52	52	52	52	492	454	505	473	487	0%	0%	0%	0%	-8%	3%	-4%	-1%
2	1	0.059	256	244	256	256	256	540	497	553	545	548	-5%	0%	0%	0%	-8%	2%	1%	1%
3	1	0.189	121	126	126	121	126	343	322	346	337	346	4%	4%	0%	4%	-6%	1%	-2%	1%
4	1	0.403	141	141	141	141	141	490	467	490	490	490	0%	0%	0%	0%	-5%	0%	0%	0%
5	1	0.342	46	46	46	46	46	326	291	346	324	325	0%	0%	0%	0%	-11%	6%	-1%	0%
6	1	0.167	183	174	183	183	183	350	309	347	342	337	-5%	0%	0%	0%	-12%	-1%	-2%	-4%
7	1	0.262	150	150	150	150	150	409	371	418	405	407	0%	0%	0%	0%	-9%	2%	-1%	0%
8	1	0.258	105	105	105	105	105	385	369	387	387	385	0%	0%	0%	0%	-4%	1%	1%	0%
9	1	0.544	45	45	45	45	45	265	263	273	267	270	0%	0%	0%	0%	-1%	3%	1%	2%
10	1	0.284	86	86	86	86	86	248	235	249	252	248	0%	0%	0%	0%	-5%	0%	2%	0%
11	1	0.517	25	25	25	25	25	338	265	332	338	338	0%	0%	0%	0%	-22%	-2%	0%	0%
12	1	0.189	222	222	222	222	222	479	463	513	473	479	0%	0%	0%	0%	-3%	7%	-1%	0%
13	1	0.316	31	31	31	31	31	284	202	284	274	284	0%	0%	0%	0%	-29%	0%	-4%	0%
14	1	0.989	39	39	39	39	39	376	372	385	381	391	0%	0%	0%	0%	-1%	2%	1%	4%
15	1	0.110	240	229	240	240	240	357	380	388	376	372	-5%	0%	0%	0%	6%	9%	5%	4%
16	1	0.408	118	118	118	118	118	329	326	329	329	329	0%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%
17	1	0.226	99	99	99	99	99	236	236	236	236	236	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
18	1	0.152	97	97	97	97	97	241	219	240	237	227	0%	0%	0%	0%	-9%	0%	-2%	-6%
19	1	0.366	52	52	52	52	52	195	195	195	195	195	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
20	1	0.127	162	162	162	162	162	274	285	292	274	274	0%	0%	0%	0%	4%	7%	0%	0%
21	6	0.035	282	331	391	358	388	509	428	526	506	509	17%	39%	27%	38%	-16%	3%	-1%	0%
22	6	0.059	350	539	570	532	570	687	570	737	655	700	54%	63%	52%	63%	-17%	7%	-5%	2%
23	6	0.114	453	428	453	453	453	594	552	635	580	608	-6%	0%	0%	0%	-7%	7%	-2%	2%
24	6	0.118	510	464	535	517	520	711	611	773	720	718	-9%	5%	1%	2%	-14%	9%	1%	1%
25	6	0.073	128	132	143	143	143	323	316	343	330	335	3%	12%	12%	12%	-2%	6%	2%	4%
26	6	0.232	132	132	132	132	132	461	479	499	463	444	0%	0%	0%	0%	4%	8%	0%	-4%
27	6	0.202	159	159	159	159	159	443	414	460	421	445	0%	0%	0%	0%	-7%	4%	-5%	0%
28	6	0.330	83	83	83	83	83	483	440	488	482	488	0%	0%	0%	0%	-9%	1%	0%	1%
29	6	0.406	148	148	148	148	148	391	336	398	394	404	0%	0%	0%	0%	-14%	2%	1%	3%
30	6	0.016	329	318	327	302	324	406	377	442	436	447	-3%	-1%	-8%	-2%	-7%	9%	7%	10%
31	6	0.377	82	82	82	82	82	289	296	299	275	293	0%	0%	0%	0%	2%	3%	-5%	1%
32	6	0.744	10	10	10	10	10	445	456	467	455	445	0%	0%	0%	0%	2%	5%	2%	0%
33	6	0.176	211	211	211	211	211	401	389	426	426	426	0%	0%	0%	0%	-3%	6%	6%	6%
34	6	0.076	277	277	277	277	277	427	371	424	426	429	0%	0%	0%	0%	-13%	-1%	0%	0%
35	6	0.243	108	108	108	108	108	296	288	302	295	302	0%	0%	0%	0%	-3%	2%	0%	2%
36	6	0.310	129	129	129	129	129	410	387	418	390	414	0%	0%	0%	0%	-6%	2%	-5%	1%
37	6	0.042	82	133	133	126	133	228	218	239	235	239	62%	62%	54%	62%	-4%	5%	3%	5%
38	6	0.305	69	69	69	69	69	340	324	340	340	340	0%	0%	0%	0%	-5%	0%	0%	0%
39	6	0.526	49	49	49	49	49	364	306	356	364	364	0%	0%	0%	0%	-16%	-2%	0%	0%

Продолжение Таблицы 2

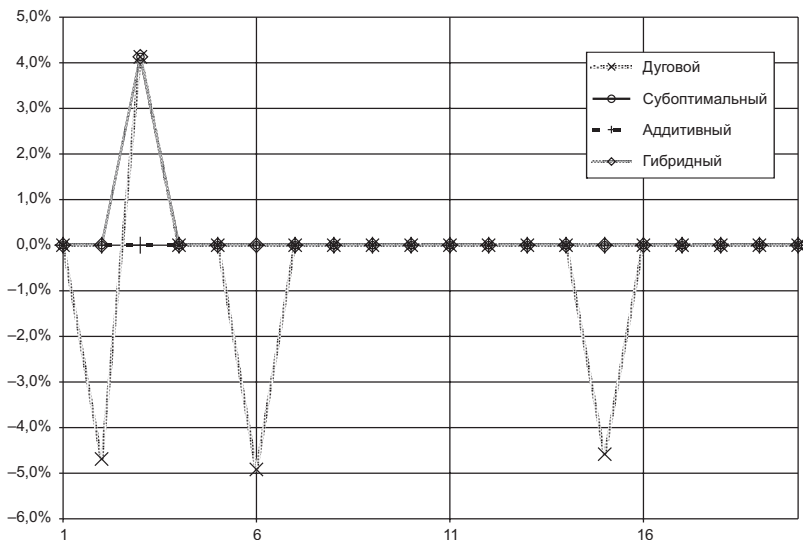
№	Тип	Нач. МН по МР	Проведенный поток до 1-го отказа					Проведенный поток до полного отказа					Превышение потока до 1-го отказа				Превышение потока до полного отказа			
			П	Д	С	А	Г	П	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г
40	6	0.837	9	9	9	9	9	292	287	291	291	291	0 %	0 %	0 %	0 %	-2 %	0 %	0 %	0 %
41	4	0.117	345	345	345	345	345	536	496	560	540	559	0 %	0 %	0 %	0 %	-7 %	4 %	1 %	4 %
42	4	0.038	545	545	545	545	545	756	634	806	731	770	0 %	0 %	0 %	0 %	-16 %	7 %	-3 %	2 %
43	4	0.065	407	407	407	407	407	691	582	724	651	672	0 %	0 %	0 %	0 %	-16 %	5 %	-6 %	-3 %
44	4	0.084	368	368	368	368	368	576	495	617	573	586	0 %	0 %	0 %	0 %	-14 %	7 %	-1 %	2 %
45	4	0.076	169	149	169	169	169	375	362	413	373	391	-12 %	0 %	0 %	0 %	-3 %	10 %	-1 %	4 %
46	4	0.243	160	160	160	160	160	552	457	585	542	567	0 %	0 %	0 %	0 %	-17 %	6 %	-2 %	3 %
47	4	0.116	284	300	330	328	330	456	452	504	458	481	6 %	16 %	15 %	16 %	-1 %	11 %	0 %	5 %
48	4	0.392	105	105	105	105	105	372	368	384	373	371	0 %	0 %	0 %	0 %	-1 %	3 %	0 %	0 %
49	4	0.094	309	293	315	335	346	475	407	500	465	432	-5 %	2 %	8 %	12 %	-14 %	5 %	-2 %	-9 %
50	4	0.242	139	139	139	139	139	495	406	504	495	485	0 %	0 %	0 %	0 %	-18 %	2 %	0 %	-2 %
51	4	0.400	44	44	44	44	44	442	457	488	452	456	0 %	0 %	0 %	0 %	3 %	10 %	2 %	3 %
52	4	0.063	279	318	325	325	325	490	355	503	483	501	14 %	16 %	16 %	16 %	-28 %	3 %	-1 %	2 %
53	4	1.618	6	6	6	6	6	366	369	378	381	383	0 %	0 %	0 %	0 %	1 %	3 %	4 %	5 %
54	4	0.346	83	83	83	83	83	421	394	424	393	427	0 %	0 %	0 %	0 %	-6 %	1 %	-7 %	1 %
55	4	0.115	93	93	93	93	93	337	327	365	337	341	0 %	0 %	0 %	0 %	-3 %	8 %	0 %	1 %
56	4	0.814	10	10	10	10	10	279	253	280	265	280	0 %	0 %	0 %	0 %	-9 %	0 %	-5 %	0 %
57	4	0.266	68	68	68	68	68	274	280	282	274	278	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %	3 %	0 %	1 %
58	4	0.217	105	105	105	105	105	407	377	409	404	409	0 %	0 %	0 %	0 %	-7 %	0 %	-1 %	0 %
59	4	0.946	13	13	13	13	13	205	205	205	205	205	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
60	4	0.435	51	51	51	51	51	241	241	241	241	241	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
61	5	0.127	134	134	134	134	134	316	260	332	284	318	0 %	0 %	0 %	0 %	-18 %	5 %	-10 %	1 %
62	5	0.100	161	129	161	161	161	393	346	398	383	400	-20 %	0 %	0 %	0 %	-12 %	1 %	-3 %	2 %
63	5	0.312	103	70	139	108	139	358	353	406	344	354	-32 %	35 %	5 %	35 %	-1 %	13 %	-4 %	-1 %
64	5	0.230	122	122	122	122	122	391	400	419	414	410	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %	7 %	6 %	5 %
65	5	0.172	94	85	107	94	113	303	301	310	303	303	-10 %	14 %	0 %	20 %	-1 %	2 %	0 %	0 %
66	5	0.535	20	20	20	20	20	305	248	302	300	312	0 %	0 %	0 %	0 %	-19 %	-1 %	-2 %	2 %
67	5	0.068	299	273	316	305	316	480	436	485	443	469	-9 %	6 %	2 %	6 %	-9 %	1 %	-8 %	-2 %
68	5	0.320	148	148	148	148	148	416	368	454	429	427	0 %	0 %	0 %	0 %	-12 %	9 %	3 %	3 %
69	5	0.311	38	38	38	38	38	417	403	455	444	424	0 %	0 %	0 %	0 %	-3 %	9 %	6 %	2 %
70	5	0.311	56	56	56	56	56	238	218	253	226	239	0 %	0 %	0 %	0 %	-8 %	6 %	-5 %	0 %
71	5	0.088	129	118	120	129	129	236	230	242	236	238	-9 %	-7 %	0 %	0 %	-3 %	3 %	0 %	1 %
72	5	0.083	191	249	257	240	257	368	336	407	373	381	30 %	35 %	26 %	35 %	-9 %	11 %	1 %	4 %
73	5	0.197	63	63	63	63	63	264	247	261	257	257	0 %	0 %	0 %	0 %	-6 %	-1 %	-3 %	-3 %
74	5	0.757	25	25	25	25	25	136	136	136	136	136	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
75	5	0.048	162	185	185	185	185	307	312	351	329	365	14 %	14 %	14 %	14 %	2 %	14 %	7 %	19 %
76	5	0.103	163	163	163	163	163	322	291	319	322	320	0 %	0 %	0 %	0 %	-10 %	-1 %	0 %	-1 %
77	5	0.400	41	37	41	41	41	251	248	259	244	259	-10 %	0 %	0 %	0 %	-1 %	3 %	-3 %	3 %
78	5	0.888	50	50	50	50	50	280	236	285	272	275	0 %	0 %	0 %	0 %	-16 %	2 %	-3 %	-2 %
79	5	0.928	51	51	51	51	51	227	174	249	234	227	0 %	0 %	0 %	0 %	-23 %	10 %	3 %	0 %
80	5	0.184	75	75	75	75	75	246	238	246	246	246	0 %	0 %	0 %	0 %	-3 %	0 %	0 %	0 %

Окончание Таблицы 2

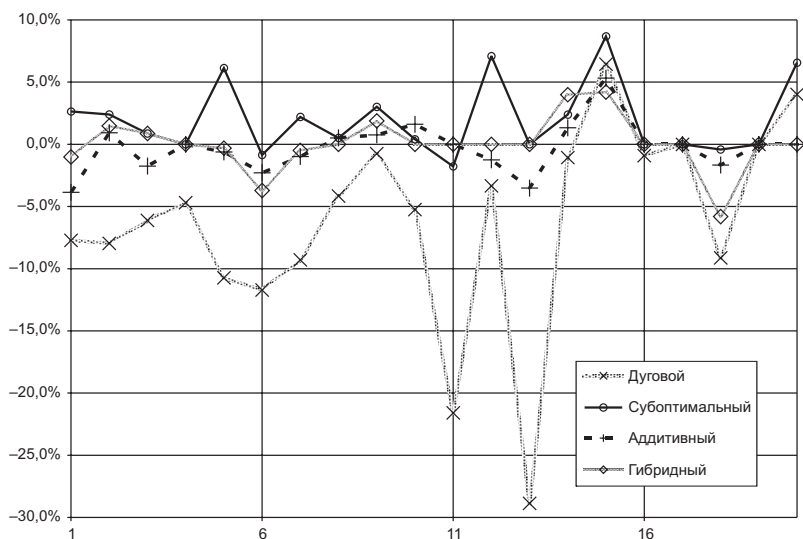
№	Тип	Нач. МН по МР	Проведенный поток до 1-го отказа					Проведенный поток до полного отказа					Превышение потока до 1-го отказа				Превышение потока до полного отказа			
			П	Д	С	А	Г	П	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г	Д	С	А	Г
81	2	0.0105	477	489	489	484	467	667	520	652	678	676	3%	3%	1%	-2%	-22%	-2%	2%	1%
82	2	0.0105	446	472	484	470	494	861	733	894	858	858	6%	9%	5%	11%	-15%	4%	0%	0%
83	2	0.011	529	416	563	483	532	600	513	612	604	587	-21%	6%	-9%	1%	-15%	2%	1%	-2%
84	2	0.0115	301	301	301	301	301	514	457	533	507	518	0%	0%	0%	0%	-11%	4%	-1%	1%
85	2	0.0129	398	433	465	465	465	609	578	612	605	625	9%	17%	17%	17%	-5%	0%	-1%	3%
86	2	0.0129	642	574	654	642	634	823	688	841	825	839	-11%	2%	0%	-1%	-16%	2%	0%	2%
87	2	0.0138	527	395	530	515	527	607	587	648	616	632	-25%	1%	-2%	0%	-3%	7%	1%	4%
88	2	0.0154	518	521	518	524	518	731	685	723	727	730	1%	0%	1%	0%	-6%	-1%	-1%	0%
89	2	0.0154	487	514	518	498	518	788	736	792	791	792	6%	6%	2%	6%	-7%	1%	0%	1%
90	2	0.0155	551	553	602	614	590	828	719	832	821	837	0%	9%	11%	7%	-13%	0%	-1%	1%
91	2	0.0157	463	441	473	469	463	879	737	857	859	831	-5%	2%	1%	0%	-16%	-3%	-2%	-5%
92	2	0.0183	593	581	599	587	594	823	666	825	834	810	-2%	1%	-1%	0%	-19%	0%	1%	-2%
93	2	0.0195	485	476	485	485	485	607	553	618	630	619	-2%	0%	0%	0%	-9%	2%	4%	2%
94	2	0.0235	400	403	407	407	407	636	531	691	683	654	1%	2%	2%	2%	-17%	9%	7%	3%
95	2	0.0243	472	376	585	590	585	700	640	716	708	718	-20%	24%	25%	24%	-9%	2%	1%	3%
96	2	0.0255	298	286	298	298	298	593	493	593	561	589	-4%	0%	0%	0%	-17%	0%	-5%	-1%
97	2	0.0257	327	278	345	345	345	535	507	584	557	567	-15%	6%	6%	6%	-5%	9%	4%	6%
98	2	0.0272	353	364	353	366	341	615	553	632	617	628	3%	0%	4%	-3%	-10%	3%	0%	2%
99	2	0.0291	389	402	404	381	392	671	575	653	670	643	3%	4%	-2%	1%	-14%	-3%	0%	-4%
100	2	0.0328	548	578	578	578	578	813	783	879	835	859	5%	5%	5%	5%	-4%	8%	3%	6%
101	3	0.077	323	323	323	310	313	465	421	465	474	472	0%	0%	-4%	-3%	-9%	0%	2%	2%
102	3	0.114	205	205	205	205	205	540	514	540	539	540	0%	0%	0%	0%	-5%	0%	0%	0%
103	3	0.063	293	290	293	290	293	566	481	571	567	564	-1%	0%	-1%	0%	-15%	1%	0%	0%
104	3	0.090	178	174	188	188	188	330	324	351	350	345	-2%	6%	6%	6%	-2%	6%	6%	5%
105	3	0.183	103	185	172	103	185	359	354	393	362	386	80%	67%	0%	80%	-1%	9%	1%	8%
106	3	0.425	60	60	60	60	60	393	385	393	393	393	0%	0%	0%	0%	-2%	0%	0%	0%
107	3	0.115	293	287	293	293	293	521	474	528	520	509	-2%	0%	0%	0%	-9%	1%	0%	-2%
108	3	0.203	124	124	124	124	124	395	355	403	402	401	0%	0%	0%	0%	-10%	2%	2%	2%
109	3	0.074	126	126	126	126	126	298	303	303	298	300	0%	0%	0%	0%	2%	2%	0%	1%
110	3	0.037	148	173	178	162	186	373	345	382	380	367	17%	20%	9%	26%	-8%	2%	2%	-2%
111	3	0.126	259	259	259	259	259	434	393	445	422	433	0%	0%	0%	0%	-9%	3%	-3%	0%
112	3	0.399	22	22	22	22	22	318	326	327	327	327	0%	0%	0%	0%	3%	3%	3%	3%
113	3	1.111	3	3	3	3	3	249	249	249	249	249	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
114	3	0.024	170	170	170	170	170	329	321	329	329	329	0%	0%	0%	0%	-2%	0%	0%	0%
115	3	0.195	142	142	142	142	142	388	365	396	388	388	0%	0%	0%	0%	-6%	2%	0%	0%
116	3	0.167	117	117	117	117	117	262	246	262	262	262	0%	0%	0%	0%	-6%	0%	0%	0%
117	3	0.714	32	32	32	32	32	178	176	175	178	178	0%	0%	0%	0%	-1%	-2%	0%	0%
118	3	0.574	51	51	51	51	51	187	187	188	187	187	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	0%
119	3	0.351	82	82	82	82	82	210	210	210	210	210	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
120	3	0.084	153	169	178	153	178	333	299	326	324	322	10%	16%	0%	16%	-10%	-2%	-3%	-3%

### Простое колесо (1). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:

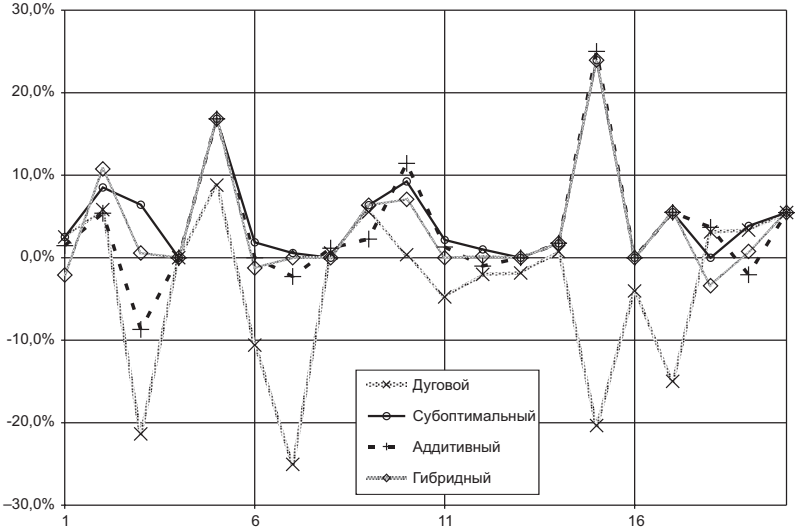


Процент превышения проведенного потока до полного отказа:

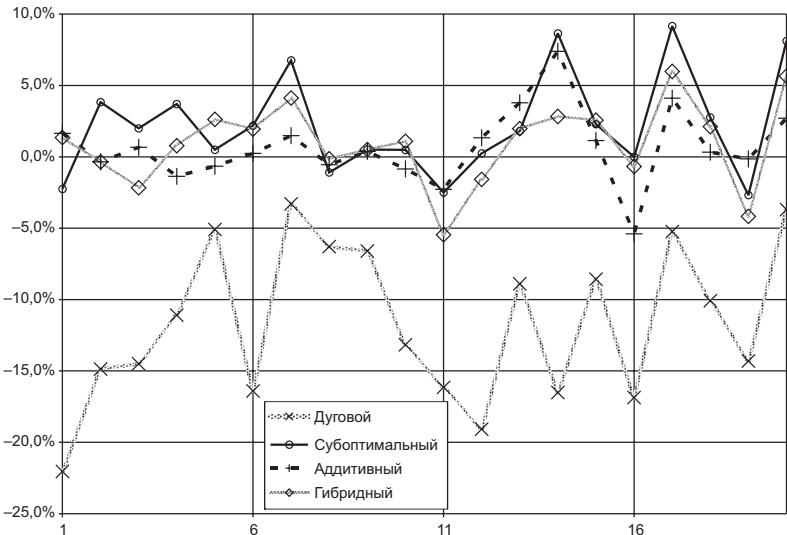


## Колесо с хордами (2). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:

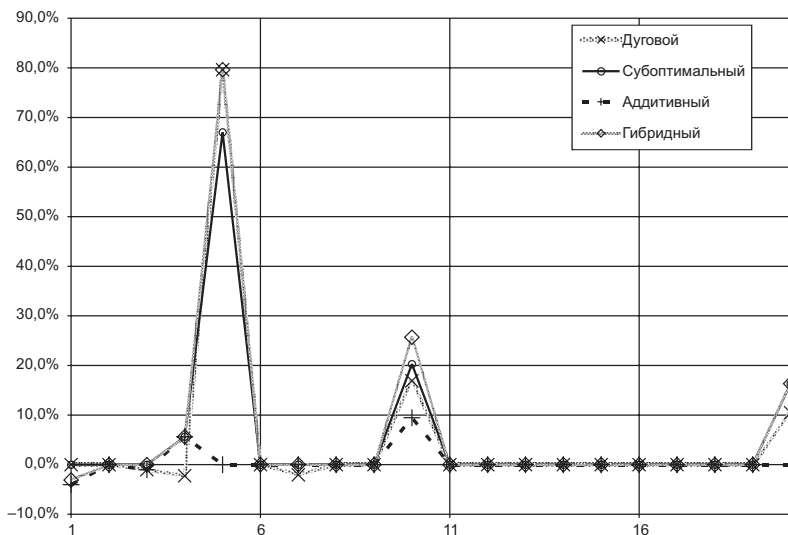


Процент превышения проведенного потока до полного отказа:

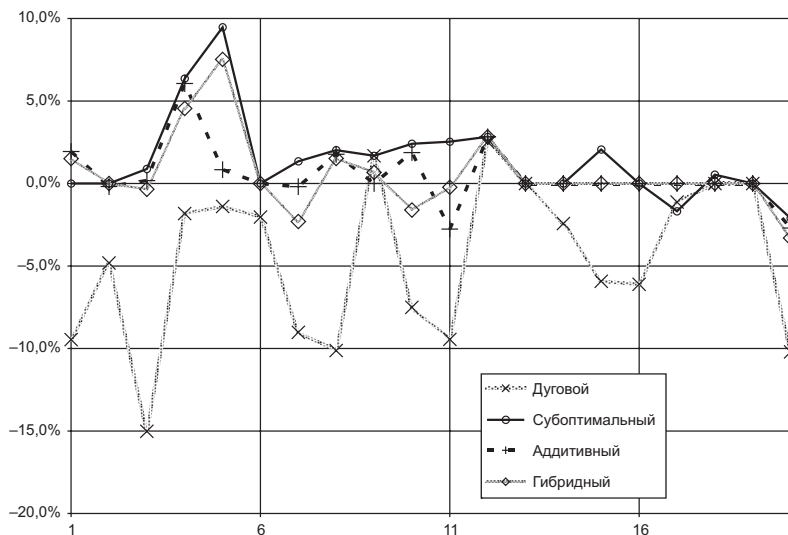


### Двойное колесо (3). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:

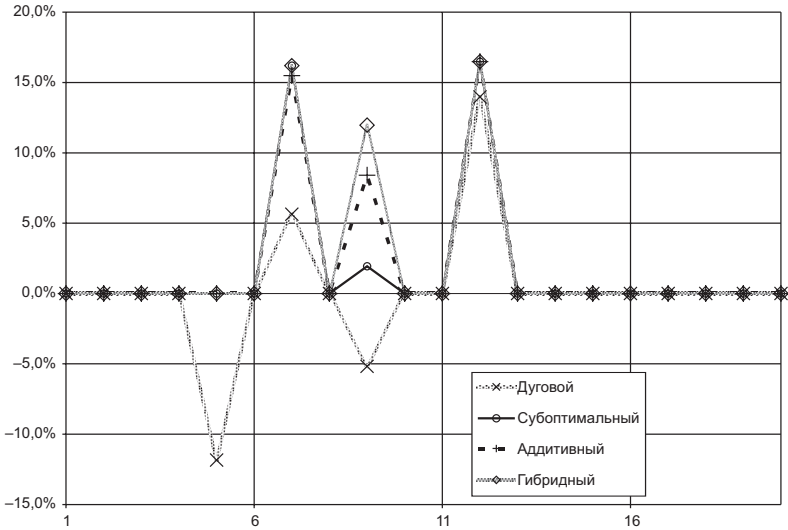


Процент превышения проведенного потока до полного отказа:

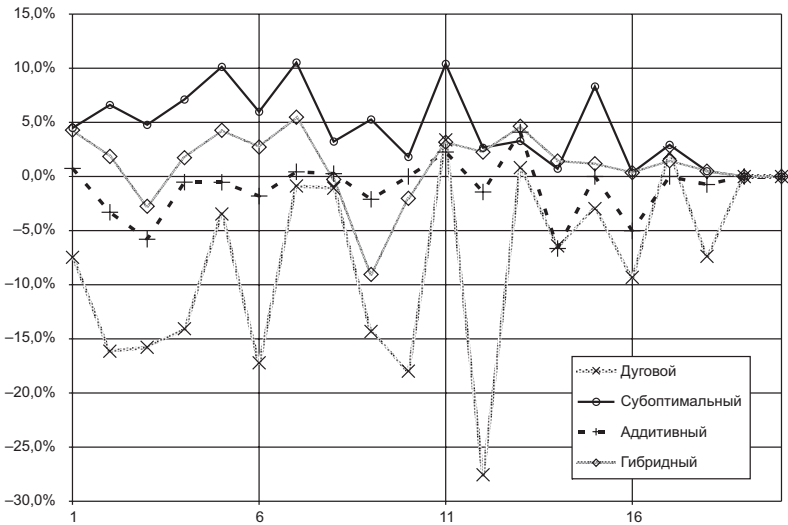


### Двойное колесо с хордами (4). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:

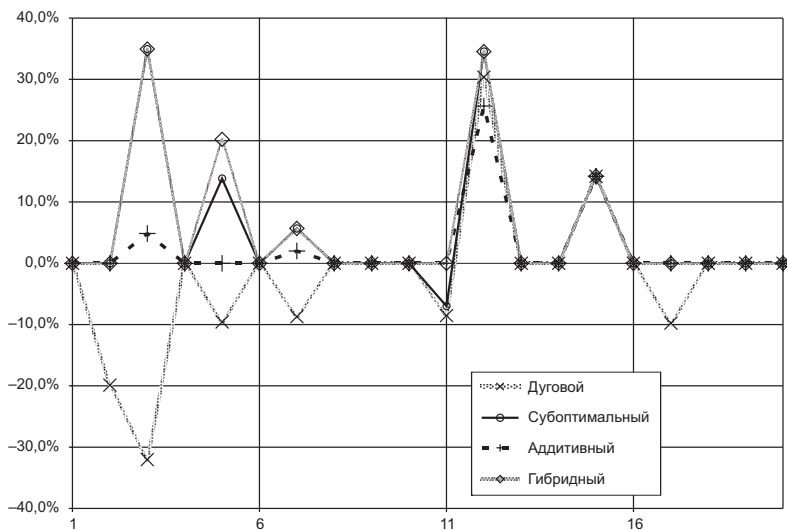


Процент превышения проведенного потока до полного отказа:

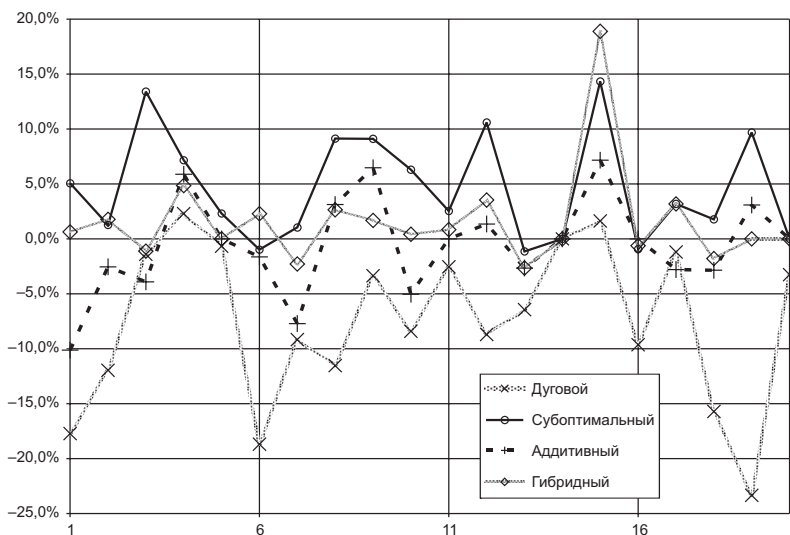


### Периферическое двойное колесо (5). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:



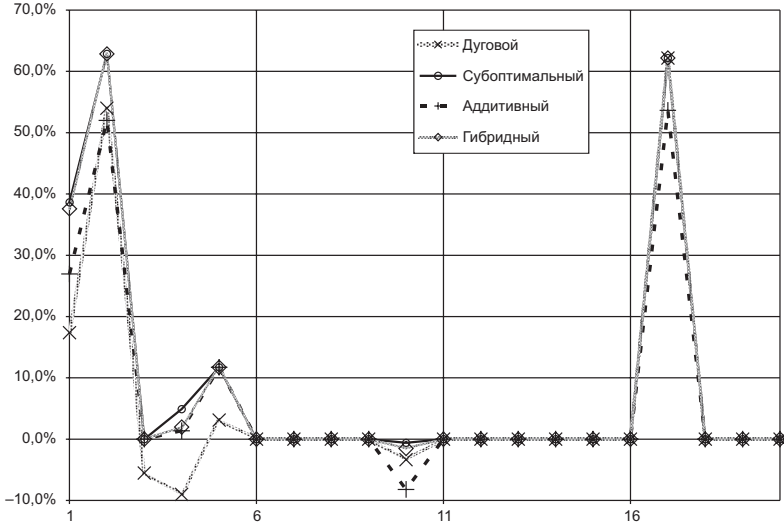
Процент превышения проведенного потока до полного отказа:



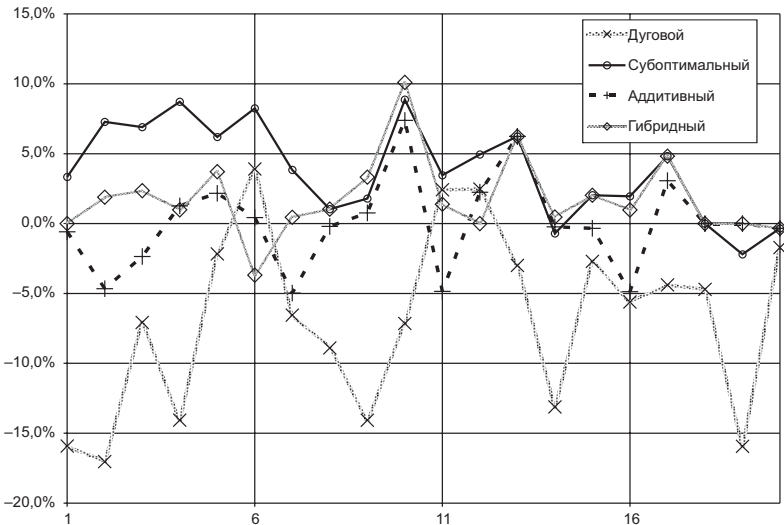


### Сильносвязное двойное колесо (6). Результаты

Процент превышения проведенного потока до 1-го отказа:



Процент превышения проведенного потока до полного отказа:



## Выводы

В результате проведения эксперимента было выявлено несколько особенностей:

- В подтипе (1) рациональные алгоритмы мало отличаются от простого. Это связано с небольшим числом узлов и дуг сети, что влечет за собой малое количество альтернативных путей. Тем не менее, даже в этом случае процентное превышение над простым алгоритмом достигает 4 % по критерию первого отказа и 8 % по критерию полного отказа.
- Эксперимент показал, что при увеличении количества узлов и при небольшом проценте нулевых дуг (5–15 %) во всех подтипах сетей данной топологии рациональные алгоритмы эффективнее простого.
- Лучшими алгоритмами являются субоптимальный и гибридный алгоритмы. Для некоторых сетей превышение общего проведенного потока по сравнению с простым алгоритмом достигает 70–80 % по критерию 1-го отказа и 20 % по критерию полного отказа, хотя в среднем это превышение лежит в пределах 5–15 %.
- По результатам эксперимента дуговой алгоритм показал худшие результаты, даже по сравнению с простым алгоритмом. Однако есть исключения, когда дуговой алгоритм был лучшим (см. заполнение «простого колеса» по критерию 1-го отказа).

## Литература

1. Афанасьев А. П., Гринберг Я. Р., Курочкин И. И. Равномерное заполнение телекоммуникационной сети каналами связи // Прикладные проблемы управления макросистемами (Апатиты, 5–9 апреля 2004 года). Сборник докладов. (Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Т. 8.) М.: URSS, 2004. С. 118–123.
2. Афанасьев А. П., Гринберг Я. Р., Курочкин И. И. Алгоритм, реализующий критерий уменьшения неравномерности при заполнении сети многопродуктовым потоком // Тезисы докладов 2-й московской конференции. Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Москва, Россия (21–24 июня 2004 г.). М.: Вычислительный центр имени А. А. Дородницына, 2004. С. 12–14.
3. Афанасьев А. П., Гринберг Я. Р., Курочкин И. И. «Равномерные» алгоритмы последовательного заполнения потоковой сети потоками продуктов // Проблемы вычислений в распределенной среде. Модели обработки и представления данных. Динамические системы. (Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Т. 14.) М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 118–140.

4. *Афанасьев А. П., Гринберг Я. Р., Курочкин И. И.* Сравнительный анализ двух последовательных алгоритмов заполнения сети потоками продуктов // Первая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2005 (12–16 сентября 2005 года, Переславль-Залесский, Россия). Труды конференции в 2 т. Т. 2. М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 136–140.
5. *Гринберг Я. Р., Курочкин И. И.* Анализ результатов численного эксперимента по последовательному заполнению сетей со стохастической топологией // Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические модели и оптимизация. (Труды Института Системного Анализа Российской Академии Наук (ИСА РАН). Т. 25.) М.: КомКнига/URSS, 2006. С. 99–128.