Попов Л. Д.

620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН

К МЕТОДАМ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛЯХ ЭРРОУ—ДЕБРЕ*

Предложены методы нахождения равновесных цен в моделях Эрроу—Дебре, сходящиеся при слабых начальных предположениях. Методы имеют содержательную экономическую интерпретацию. Представлены соответствующие теоремы сходимости.

1. Модель обмена Эрроу—Дебре

Приведем простейшую формулировку модели рыночного обмена Эрроу—Дебре [1]. Пусть m — число участников (субъектов) экономики обмена; n — число различных типов товаров и услуг, предназначенных для обмена; $b_{ij} \geqslant 0$ — начальные запасы товара j-го вида у i-го участника экономики ($i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}$); $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}) = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ — вектор спроса на все товары со стороны i-го участника как функция от заданного уровня цен $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ на них.

Определение. Вектор цен $\bar{\mathbf{p}} > 0$ называется точкой равновесия в модели Эрроу—Дебре, если

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{c}, \tag{1}$$

где $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор суммарных товарных запасов участников рынка. Обычно предполагается, что все $c_j = b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{mj} > 0$. Вектор спроса i-го участника на товары часто представляют как (единственное) решение оптимизационной задачи

$$\max \left\{ \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{b}_i \rangle, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \right\},$$

где $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ — вектор товарных запасов i-го участника, $\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$ — его функция полезности, описывающая его предпочтения

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07–01–00399) и Программы поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-5595.2006.1).

в пространстве товаров и услуг, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов. Предполагается, что каждый участник продает на рынке свои товары в соответствии с установившимися ценами на них и на вырученные деньги приобретает новые товары, стремясь максимизировать значение своей функции полезности. Различные предположения относительно начального распределения товаров и услуг и свойств функций полезности, при которых равновесные цены существуют, можно найти в [1–10] и др.

2. Мультипликативные функции полезности

Пусть функции полезности участников экономики обмена имеют мультипликативный вид $\mathcal{U}_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}$, где все $\alpha_{ij} \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$. Рассмотрим определяемые ими функции спроса

$$x_{ij}(\mathbf{p}) = \alpha_{ij}\, p_j^{-1} \sum_{s=1}^{n} p_s b_{is} = \alpha_{ij}\, p_j^{-1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{b}_i \rangle \quad (i \in \overline{1,m};\, j \in \overline{1,n}).$$

Их конкретный вид позволяет переписать условие равновесия цен (1) как задачу отыскания положительного решения системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ij}\, p_s b_{is} = c_j p_j \quad (j \in \overline{1,n}),$$

или, в матричной записи,

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{p} > 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{C} = \mathrm{diag}\,(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Будем предполагать систему (2) совместной. Заметим, что если система (2) имеет хотя бы одно положительное решение, то таких решений бесконечно много и их совокупность образует выпуклый конус (с «выколотой» вершиной).

Введенные матрицы удовлетворяют специфическим условиям

$$\mathbf{Ae} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{e}^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1)$ — вектор подходящей размерности, составленный из единиц. В соответствие с этими условиями

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} - \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = 0,$$

так что $\mathrm{rank}(\mathbf{C} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) < n$ и однородная квадратная система уравнений (2) является вырожденной.

Поскольку, как только что было показано, сумма строк матрицы коэффициентов системы (2) равна нулю, любое из уравнений системы можно удалить из нее без ущерба для ее решения. Удаляя лишнее (например, последнее) уравнение из системы (2), естественно попытаться заменить его тем или иным условием, которое, с одной стороны, было бы экономически содержательным, а с другой — сделало бы исследуемую математическую модель более регулярной.

Мы рассмотрим два возможных варианта.

В первом варианте заменим последнее соотношение системы (2) уравнением

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{p} \rangle = \gamma, \tag{3}$$

где $\gamma > 0$ — фиксированная совокупная стоимость всех товаров и услуг на рынке, определяемая, например, обращающейся на нем денежной массой. В этом случае система (2) примет следующий вид

$$(\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) \quad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{h}}, \quad \mathbf{p} > 0, \tag{4}$$

где

$$\bar{\mathbf{C}} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & c_{n-1} & 0 \\ \hline c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{array}\right), \quad \bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n-1} & 0 \\ \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,n-1} & 0 \end{array}\right), \quad \bar{\mathbf{h}} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \gamma \end{array}\right).$$

Во втором варианте будем предполагать, что последний товар является своего рода стоимостным эталоном (играет роль денег) и потому имеет постоянную номинальную цену $\omega > 0$, т. е. заменим последнее уравнение соотношением

$$p_n = \omega.$$

Соответственно, модифицированная система примет вид

$$(\bar{\bar{\mathbf{C}}} - \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})\, \mathbf{p} = \bar{\bar{\mathbf{h}}}, \quad \mathbf{p} > 0, \tag{5}$$

где

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\mathbf{A}}, \quad \bar{\bar{\mathbf{C}}} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & c_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \bar{\bar{\mathbf{h}}} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \omega \end{array}\right).$$

Обе выписанные системы разрешимы одновременно с системой (2). Для их численного решения попробуем адаптировать классический метод расщепления [11], который в этой ситуации имеет примечательную экономическую интерпретацию.

3. Алгоритм с фиксированной суммарной стоимостью благ

Для решения системы (4) рассмотрим итерационный процесс

$$\mathbf{C}\,\mathbf{p}^{t+1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\mathbf{p}^{t}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где начальное приближение $\mathbf{p}^0 > 0, \gamma = \langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^0 \rangle$. Прежде чем перейти к обоснованию сходимости выписанного процесса, заметим, что уравнение (3) не учтено в нем явно. Однако, умножая обе части соотношений (6) слева на $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$ и замечая, что $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$, получаем

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^{t+1} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\mathbf{p}^{t} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\mathbf{p}^{t} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^{t},$$

т. е.

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^{t+1} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^{t} \rangle = \ldots = \langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^{0} \rangle = \gamma. \tag{7}$$

Следовательно, любая предельная точка $\bar{\mathbf{p}}$ процесса (6) также будет удовлетворять условию $\langle \mathbf{c}, \bar{\mathbf{p}} \rangle = \gamma$.

Пусть $\bar{\mathbf{p}}_\gamma > 0$ — искомое решение системы (4). Тогда последовательность отклонений $\zeta^t = \mathbf{p}^t - \bar{\mathbf{p}}_\gamma$ лежит в подпространстве $\mathcal{L}_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0\}$, удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{C}\,\zeta^{t+1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\zeta^{t}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

и сходится к нулю тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\widehat{\varrho}$ матрицы $\mathbf{N} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ относительно подпространства $\mathcal{L}_0$ меньше 1. Нам, однако, удобнее, сделав замену переменных $\xi = \mathbf{C}\zeta$, свести вопрос о сходимости процесса (8) к вопросу о сходимости промасштабированного процесса

$$\xi^{t+1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\,\xi^{t}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

и тем самым заменить исследование спектрального радиуса $\widehat{\varrho}$ матрицы $\mathbf{N}$ относительно подпространства $\mathcal{L}_0$ исследованием спектрального радиуса ϱ матрицы $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$ относительно подпространства $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} : \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0\}$.

Чтобы оценить ϱ, изучим структуру расположения ненулевых элементов матрицы $\mathbf{M}$, или, что то же, матрицы $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = (\mu_{ij})$. Поскольку элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не отрицательны, то $\mu_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один участник рынка владеет товаром j и нуждается в товаре i, т. е. $\exists\, s : (b_{sj} > 0) \& (\alpha_{si} > 0)$. Назовем такую пару товаров непосредственно обмениваемыми и будем говорить, что товары i и j обмениваемы опосредовано, если существует цепочка номеров $j_1, j_2, \ldots, j_r$ такая, что $i = j_1$, $j_r = j$ и товары в промежуточных парах (j_{q-1}, j_q) обмениваемы непосредственно.

Предположение 1. В рассматриваемой экономике любая пара товаров обмениваема (опосредовано или непосредственно).

Выдвинутое предположение есть экономическая перефразировка математического условия связности ориентированного графа $\Gamma = (U, V)$, вершины $u \in U$ которого отвечают номерам товаров и услуг, обращающихся внутри экономики, причем пара вершин i, j связана дугой, т. е. $(i, j) \in V$, тогда и только тогда, когда $\mu_{ij} > 0$.

Теорема 1. *В предположении* 1 *спектральный радиус матрицы* $\mathbf{M}$ *относительно подпространства* $\mathcal{L}$ *меньше* 1.

Доказательство. Во-первых, как уже отмечалось выше, подпространство $\mathcal{L}$ переводится линейным оператором $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ в себя. Поэтому спектральный радиус этого оператора относительно подпространства $\mathcal{L}$ не превосходит его глобального спектрального радиуса. Последний же оценивается произвольной матричной нормой матрицы $\mathbf{M}$, например, столбцовой, которая ввиду соотношений

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}$$

равна

$$||\mathbf{M}|| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\mu_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} = 1.$$

Во-вторых, если $|\lambda| = 1$ и $\mathbf{x}$ — ненулевой собственный вектор оператора $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ относительно подпространства $\mathcal{L}$, отвечающий собственному значению λ, т. е. если

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j \quad (\forall\, i),$$

то все неравенства-следствия

$$|\lambda||x_i| = |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} |x_j| \quad (\forall\, i) \tag{9}$$

должны на самом деле выполнять как равенства. В противном случае, складывая их вместе, получаем противоречие

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Но выполнимость (9) в виде равенств возможна только при очень специфических условиях. Так, если хотя бы один $|x_i| = 0$, то, в первую очередь, равны нулю все $|x_j|$, отвечающие ненулевым коэффициентам i-й строки матрицы $\mathbf{M}$. Каждый такой $|x_j|$, в свою очередь, обуславливает равенство нулю следующей серии компонент вектора $\mathbf{x}$, отвечающих ненулевым коэффициентам μ_{js} той же самой матрицы, так что все новые и новые $|x_s| = 0$. В виду связности графа Γ это приводит нас к заключению, что абсолютно все компоненты вектора $\mathbf{x}$ нулевые, что, однако, противоречит понятию собственного вектора линейного оператора. Следовательно, вектор $\mathbf{x}$ вовсе не имеет нулевых компонент, и все $|x_i| > 0$. Но тогда выполнимость (9) в виде равенств и связность графа Γ влекут «сонаправленность» всех (вообще говоря, комплексных) компонент x_j, т. е. существуют такие положительные вещественные множители θ_{ij}, что

$$x_j = \theta_{ij}\, x_i, \quad \theta_{ij} > 0 \quad (\forall\, i, j).$$

Это делает равенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

невозможным и следовательно $\mathbf{x} \notin \mathcal{L}$. Таким образом собственные числа λ сужения оператора $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ на подпространство $\mathcal{L}$ не могут иметь модуль, равный 1. Остается единственная возможность $|\lambda| < 1$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *В предположении* 1 *и при условии разрешимости системы* (2) *итерационный процесс* (6) *при любом начальном* $\mathbf{p}^0 > 0$ *сходится к* (*единственному*) *решению* $\bar{\mathbf{p}}_\gamma > 0$ *системы* (4), *отвечающему* $\gamma = \langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^0 \rangle$.

Остановимся на экономической интерпретации процесса (6). Последний имитирует работу рыночных посредников, скупающих товары у производителей и перепродающих их потребителям (прибыль с продаж игнорируется). Посредники непосредственно отслеживают интенсивность финансовых потоков, направляемых потребителями на приобретение товаров каждой категории, и на интенсивность поступления этих товаров от их производителей в натуральном выражении. Стремясь к некоторой усредненной заполненности своих складских помещений товарами, предназначенными для обмена, посредники так устанавливают розничные цены на них, чтобы выровнять интенсивности входящих и исходящих товарных потоков.

4. Алгоритм с фиксированной ценой одного из товаров

Обратимся теперь к системе (5). Еще раз сосредоточим внимание на блочном строении входящих в нее матриц и векторов. Введем множество индексов $\Xi = \{1, \ldots, n-1\}$ и обозначим:
$\mathbf{C}_\Xi$ — матрица, составленная из первых $n-1$ строк и столбцов матрицы $\mathbf{C}$;
$\mathbf{c}_\Xi$ — вектор из диагональных элементов матрицы $\mathbf{C}_N$;
$\mathbf{A}_\Xi$ — матрица, составленная из первых $n-1$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$;
$\mathbf{B}_\Xi$ — матрица, составленная из первых $n-1$ столбцов матрицы $\mathbf{B}$;
$\mathbf{p}_\Xi$ — вектор, составленный из первых $n-1$ компонент вектора $\mathbf{p}$.

Используя новые обозначения, можно переписать систему (5) в виде

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\Xi \mathbf{p}_\Xi = \mathbf{A}_\Xi^{\mathrm{T}}\, \mathbf{B}_\Xi\, \mathbf{p}_\Xi + \mathbf{h}, \\ p_n \equiv \omega > 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{A}_\Xi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_n\omega$, $\mathbf{B}_n$ — n-й столбец матрицы $\mathbf{B}$. Ниже приведена наглядная иллюстрация структуры исходных данных нашей задачи:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{C}_\Xi & 0 \\ \hline 0 & c_n \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{A}_\Xi & \mathbf{A}_n \\ \hline \end{array},$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{B}_\Xi & \mathbf{B}_n \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{p} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{p}_\Xi \\ \hline p_n \\ \hline \end{array}.$$

Нам понадобится

Предположение 2. Элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{A}$ (столбца, отвечающего товару с фиксированной стоимостью) положительны.

Предположение 2 в экономическом плане означает заинтересованность каждого участника экономики в данном товаре, а в математическом — обеспечивает выполнение следующих соотношений

$$0 \leqslant \mathbf{A}_\Xi\,\mathbf{e} < \mathbf{A}\,\mathbf{e} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_\Xi = \mathbf{c}_\Xi^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_\Xi\,\mathbf{C}_\Xi^{-1} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{cases} \mathbf{C}_\Xi\,\mathbf{p}_\Xi^{t+1} = \mathbf{A}_\Xi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_\Xi\,\mathbf{p}_\Xi^{t} + \mathbf{h}, \quad (t = 0, 1, \ldots), \\ p_n^t \equiv \omega > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Этот процесс является полным аналогом итерационного процесса (6) и имеет ту же самую экономическую интерпретацию с той лишь разницей, что теперь один из товаров (последний) выступает в роли стоимостного эталона (денег).

Теорема 2. *Пусть система* (2) *совместна и выполнено предположение* 2. *Тогда процесс* (12) *при любом начальном* $\mathbf{p}_\Xi^0 > 0$ *сходится к* (*единственному*) *решению* $\bar{\mathbf{p}}_\omega > 0$ *системы* (10).

Доказательство. Перейдя к вспомогательным переменным $\mathbf{y} = \mathbf{C}_\Xi\mathbf{p}_\Xi$, получим эквивалентный по сходимости итерационный процесс

$$\mathbf{y}^{t+1} = \mathbf{A}_\Xi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_\Xi\,\mathbf{C}_\Xi^{-1}\mathbf{y}^t + \mathbf{h} \quad (t = 0, 1, \ldots).$$

Покажем, что последние соотношения генерируют сходящуюся последовательность. В самом деле, пусть $\bar{\mathbf{p}}_\Xi$ — вектор из первых $n-1$ компонент искомого решения. Для того, чтобы отклонение $\zeta^t = \mathbf{y}^t - \mathbf{C}_\Xi\bar{\mathbf{p}}_\Xi$ стремилось к нулю при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус $\bar{\varrho}$ матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{A}_\Xi^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_\Xi\,\mathbf{C}_\Xi^{-1} = (h_{ij})$ был меньше 1. Как известно, последний оценивается произвольной матричной нормой, например, столбцовой $\|\mathbf{H}\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}$. Поскольку все матрицы неотрицательны, то в силу (11)

$$0 \leqslant \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\Xi}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}_{\Xi}\,\mathbf{C}_{\Xi}^{-1} < \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\Xi}\mathbf{C}_{\Xi}^{-1} = \mathbf{c}_{\Xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\Xi}^{-1} == \mathbf{e}^{\mathrm{T}},$$

и потому $\|\mathbf{H}\| < 1$. Обоснование сходимости рассматриваемого процесса завершено. □

5. Заключение

Предложены методы численного анализа моделей типа Эрроу—Дебре с мультипликативными функциями полезности участников, сходящиеся при слабых начальных предположениях, имеющих содержательную экономическую интерпретацию. Подчеркнута необходимость привлечения дополнительных регуляризирующих условий и исследования роли рыночных посредников и торговых институтов в установлении равновесных цен.

Автор признателен проф. А. А. Антипину за внимание к работе и полезное обсуждение ее результатов.

Литература

1. *Arrow K. J.*, *Debreu G.* Existence of Equilibrium for a Competitive Economy // Econometrica. 1954. V. 25. 265–290.
2. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
3. *Никайдо X.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
4. *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972.
5. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и математическая экономика. М.: Прогресс, 1975.
6. *Shafer W. J.*, *Sonnenschein H. F.* Some theorems on the existence of competitive equilibrium // J. Economic Theory. 1975. V. 11. P. 83–93.
7. *Макаров В. Л.*, *Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
8. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
9. *Aliprantis C. D.*, *Brown D. J.*, *Burkinshaw O.* Existence and Optimality of Competitive Equilibtia. Berlin, Springer, 1990.
10. *Полтерович В. М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.
11. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1989.
12. *Хорн Р.*, *Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.