Рабовер В. И.

Институт системного анализа РАН, Москва

УСЛОВИЯ ТИПА ХЕЛЛИ И КОМБИНАТОРИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Введение

Эта работа продолжает начатое в [1] исследование локальных комбинаторных свойств гладких распределений и посвящена дуальной по отношению к описанной в [1] конструкции. В конце приводится также интерпретация этих результатов в терминах задачи редукции функциональных семейств.

Известная теорема Хелли из выпуклого анализа гласит: если в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задан набор выпуклых множеств $A_1, \ldots, A_k$ и каждые $n+1$ из них имеют общую точку, то и все множества $A_1, \ldots, A_k$ имеют общую точку. Вообще, если свойство верное для каждых q из k объектов с необходимостью верно и для всех k объектов, то говорят, что в этой ситуации выполняются «условия типа Хелли» (естественно интересно, каково наименьшее такое q).

Многочисленные ситуации такого рода (в основном связанные с выпуклым анализом, но не только) описаны в классической монографии [2]. Простейшие примеры на эту тему дает конечно линейная алгебра:

Если каждые $p+1$ из k плоскостей лежат в какой-то p-мерной плоскости, то и все k плоскостей лежат в какой-то p-мерной плоскости.

(Здесь плоскости это просто линейные подпространства в $\mathbb{R}^n$.) Вот дуальный факт:

Если каждые $n-p+1$ из k плоскостей содержат общую p-мерную плоскость, то и все k плоскостей содержат общую p-мерную плоскость.

Совершенно нетривиальный вопрос: можно ли в этих утверждениях заменить «плоскости» на «гладкие распределения» (гладкие поля плоскостей)? (Содержательно важнее даже чтобы это были не просто гладкие, а инволютивные распределения, хотя бы те из них, которые p-мерны.)

Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Контрпример к 1-му утверждению был приведен в [1]. (Это 4 гладких векторных поля, каждые 3 из которых лежат в 2-мерном гладком распределении, а все 4 не лежат ни в каком 2-мерном гладком распределении.) Контрпример ко 2-му утверждению (в инволютивной версии) будет приведен ниже. (Это 4 гладкие функции 3-х переменных, каждые 3 из которых гладкой заменой «выпрямляются» до функций 2-х переменных, а все 4 не допускают такого выпрямления; искомые распределения задаются касательными плоскостями к слоям функций.)

Тем не менее, положение можно исправить. Добавляя одно дополнительное ограничение, можно действительно получить пару дуальных друг другу комбинаторных утверждения о распределениях. (В первом случае это ограничение на ранг общего пересечения, во втором — ограничение на ранг общей суммы исходных распределений.)

Первое из этих 2-х утверждений было сформулировано и полностью доказано в [1]. Здесь мы для удобства формулируем обе теоремы (теоремы 4.1 и 4.2) и доказываем вторую из них. Этому посвящен раздел 4.

Несмотря на явную симметрию 2-х утверждений, получить второй факт из первого не удается. Принципиальное препятствие в том, что дополнительное к инволютивному распределению (т. е. поточечное ортогональное дополнение), вообще говоря, не является инволютивным. Тем не менее, второй факт верен, но для него требуется совершенно отдельное доказательство. Технически оно совсем не похоже на первое. В основе доказательства — геометрия слоев зависимых гладких функций (а не алгебра векторных полей, как в первом случае).

Необходимый геометрический аппарат подготавливается в разделе 3. Сведения общего характера (распределения, субмерсии, первые интегралы) кратко напоминаются в разделе 2 (подробности см., например, в [3,4]).

В последнем разделе 5 полученные результаты рассматриваются с точки зрения задачи редукции (задачи о локальной приводимости набора функций нескольких переменных к функциям меньшего числа переменных).

2. Субмерсии и гладкие распределения

Здесь напоминается и уточняется терминология, связанная с гладкими распределениями.

2.1. Гладкие отображения

Термин «гладкий» без указания класса далее означает «класса C^1». *Диффеоморфизм* $\varphi\colon U \to U'$ открытых множеств $U, U' \subset \mathbb{R}^n$ это биекция, гладкая вместе с обратной φ^{-1} (или, что то же самое, гладкая биекция, у которой производная $D\varphi$ есть изоморфизм в каждой точке). *Субмерсия* $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^m$ это гладкое отображение, у которого производная $D\sigma$ есть эпиморфизм в каждой точке. Диффеоморфизм $\varphi\colon U \to U'$ переводит функцию

$$\psi\colon U \to \mathbb{R}$$

в функцию

$$\psi' = \psi \circ \varphi^{-1}\colon\ U' \to \mathbb{R}$$

и субмерсию

$$\sigma\colon\ U \to \mathbb{R}^m$$

в субмерсию

$$\sigma' = \sigma \circ \varphi^{-1}\colon\ U' \to \mathbb{R}^m.$$

Обозначение

$$f\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^m$$

означает, что отображение f определено вблизи («вблизи» = «в некоторой окрестности») точки $a \in \mathbb{R}^n$ и принимает значения в $\mathbb{R}^m$.

Локальный диффеоморфизм в точке $a \in \mathbb{R}^n$ это гладкое отображение

$$\varphi\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n,$$

такое, что для некоторых окрестностей Ua, $U'\varphi(a)$, сужение φ на U есть диффеоморфизм U на U'.

Любую субмерсию

$$\sigma\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^m$$

подходящим локальным диффеоморфизмом в точке a можно «выпрямить» вблизи a, т. е. перевести в стандартную проекцию

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_m).$$

(Для этого нужно выбрать из n стандартных координатных функций в $\mathbb{R}^n$ подходящие $n - m$ функций, которые достраивают σ до локального диффеоморфизма в точке a.)

2.2. Распределения и интегралы

Распределение $\mathfrak{D}$ в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ это заданное в U поле плоскостей (поле линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$). *Ранг* (размерность) распределения в точке может зависеть от точки; если ранг постоянен, распределение называется *регулярным*. Гладкость распределения определяется по гладкости какого-нибудь семейства векторных полей, порождающего (поточечно) это распределение. Диффеоморфизм

$$\varphi\colon\ U \to U'$$

переводит распределение $\mathfrak{D}$ распределение $\mathfrak{D}'$ по правилу

$$\mathfrak{D}'(\varphi(x)) = D\varphi(x)\,(\mathfrak{D}(x)).$$

При этом, если $\varphi \in C^{r+1}$ и $\mathfrak{D} \in C^r$, то $\mathfrak{D}' \in C^r$. (Здесь и далее r — любое фиксированное целое число $\geqslant 1$.)

Распределение $\mathfrak{D}$ может порождаться гладким отображением $\Phi\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ по правилу (поточечно)

$$\mathfrak{D} = \operatorname{Ker} D\Phi.$$

Интегралом произвольного распределения $\mathfrak{D}$ называют любую гладкую функцию $\psi\colon U \to \mathbb{R}$, такую что

$$\mathfrak{D} \subset \operatorname{Ker} D\psi.$$

Мы будем также говорить, что распределение $\mathfrak{D}$ *порождено своими интегралами*, если $\mathfrak{D} = \operatorname{Ker} D\Phi$ для некоторого гладкого отображения Φ.

2.3. Теорема Фробениуса

Распределение $\mathfrak{D}$ называется *инволютивным*, если для любых гладких векторных полей F_1, F_2, поточечно принадлежащих $\mathfrak{D}$, их скобка (коммутатор) также принадлежит $\mathfrak{D}$,

$$[F_1, F_2] \in \mathfrak{D}.$$

Критерии инволютивности даются теоремой Фробениуса. Одну из возможных ее формулировок составляют, например, следующие 2 утверждения.

Распределение $\mathfrak{D} = \operatorname{Ker} D\sigma$, порожденное субмерсией σ класса C^{r+1}, инволютивно, регулярно и принадлежит классу C^r. Инволютивное регулярное распределение $\mathfrak{D}$ класса C^{r+1} вблизи каждой точки порождено некоторой субмерсией σ класса C^{r+1}, $\mathfrak{D} = \operatorname{Ker} D\sigma$. (Как следствие, такое распределение локально можно C^{r+1}-диффеоморфизмом «выпрямить» в постоянное: надо выпрямить порождающую субмерсию σ.)

3. Простые области и связки

В этом разделе развивается некоторый вспомогательный аппарат, применяемый потом при доказательстве теоремы 4.2. Мы будем заниматься свойствами слоев зависимых гладких отображений. Уточним, что под *слоем* мы всегда понимаем полный прообраз значения отображения. *Зависимость* отображения $f\colon A \to B$ от отображения $f'\colon A \to B'$ означает, что f постоянно на слоях f'.

3.1. Горизонтали и трансверсали

Зафиксируем целые числа $n > p > 0$ и обозначим стандартные проектирования

$$\begin{aligned} \pi&\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, & (t_1, \ldots, t_n) &\mapsto (t_1, \ldots, t_p),\\ \pi'&\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}, & (t_1, \ldots, t_n) &\mapsto (t_{p+1}, \ldots, t_n). \end{aligned}$$

Слои отображения π' будем называть *горизонталями* (а непустые следы горизонталей на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ — *горизонталями множества* A).

Пусть $\sigma\colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p$ — субмерсия. Будем говорить, что p-мерная (аффинная) плоскость La *трансверсальна* слою σ в точке a, если эта плоскость трансверсальна плоскости $\operatorname{Ker} D\sigma(a)$ (т. е. касательной плоскости к слою в этой точке). Ясно, что горизонталь трансверсальна слою, если и только если левый базисный минор в матрице $D\sigma(a)$ отличен от нуля.

3.2. Простая область

Пусть в области (открытом связном множестве) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана субмерсия $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$, причем в каждой точке слой σ трансверсален горизонтали. Назовем область Ω простойдля σ, если каждая горизонталь области Ω пересекает каждый слой σ в одной и только одной точке. Эквивалентное условие: отображение

$$\delta = (\sigma, \pi')\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^n$$

есть диффеоморфизм Ω на $Y \times Z$, где обозначено

$$Y = \sigma(\Omega), \quad Z = \pi'(\Omega).$$

(Диффеоморфизм δ «выпрямляет» субмерсию σ, переводя ее в субмерсию $\pi\colon\ Y \times Z \to Y$.)

Доказательство. Докажем эквивалентность 2-х определений.

Из 1-го определения следует, что:

(i) сужение σ на каждую горизонталь инъективно;

(ii) каждый слой Λ субмерсии σ в Ω имеет проекцию $\pi'(\Lambda) = Z$.

Отображение $\delta = (\sigma, \pi')\colon\ \Omega \to Y \times Z$ в силу (i) инъективно, а в силу (ii) сюръективно. Поэтому δ — биекция. Кроме того, матрица $D\delta$ всюду обратима (левый базисный минор в $D\sigma$ ненулевой). В итоге δ — диффеоморфизм.

Обратно, пусть $\delta = (\sigma, \pi')\colon\ \Omega \to Y \times Z$ — диффеоморфизм. Он переводит субмерсию σ в субмерсию π (поскольку $\pi \circ \delta = \sigma$). Но для субмерсии π в области $Y \times Z$ условия (i), (ii) очевидно выполнены. Поэтому они выполнены и для субмерсии σ в области Ω (ибо диффеоморфизм δ сохраняет старшие $n - p$ координат). А это значит, что σ и Ω удовлетворяют 1-му определению. □

3.3. Свойства слоев

Пусть $\sigma\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^p$ — субмерсия в своей простой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Применяя выпрямляющий диффеоморфизм $\delta = (\sigma, \pi')\colon\ \Omega \to Y \times Z$, легко проверить следующие элементарные факты.

Все слои субмерсии σ в простой области Ω и все горизонтали в Ω связны. (Слои гомеоморфны Z, а горизонтали гомеоморфны Y; оба множества Z, Y — непрерывные образы связного Ω.)

Каждый слой Λ субмерсии σ в простой области Ω есть график некоторого гладкого (класса C^r, если $\sigma \in C^r$) отображения (неявной функции)

$$\varphi\colon\ Z \to \mathbb{R}^p.$$

(Если значение σ на слое Λ равно y, то функция φ находится из равенства $(\varphi(z), z) = \delta^{-1}(y, z)$.)

Если гладкое отображение $\Phi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^m$ зависит от субмерсии σ в ее простой области Ω, то на каждом слое Λ субмерсии σ ранг Φ постоянен. (Диффеоморфизм δ переводит Φ в некоторое $\widetilde{\Phi}$, зависящее от π. Для пары $\widetilde{\Phi}, \pi$ утверждение очевидно, а диффеоморфизм сохраняет ранг отображения в каждой точке.)

Гладкое отображение $\Phi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^m$ зависит от субмерсии σ в ее простой области Ω, если и только если всюду в Ω

$$\operatorname{Ker} D\Phi \supset \operatorname{Ker} D\sigma.$$

(Выпрямление σ делает критерий очевидным.)

Отметим попутно еще один простой факт: всякий диффеоморфизм $\Omega \to \Omega'$, сохраняющий старшие $n-p$ координат (т. е. имеющий вид $(\ldots, \pi')$), сохраняет простоту области.

3.4. Эквивалентные субмерсии

Два отображения $f_1\colon\ A \to B_1$, $f_2\colon\ A \to B_2$, определенные в одном и том же множестве A, назовем *эквивалентными*, если они задают одно и то же разбиение A на слои (т. е. зависят друг от друга в A).

Пусть $\sigma\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^p$ — субмерсия в своей простой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $S \subset \Omega$ — какая-то горизонталь в Ω. Отображение $\sigma'\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^p$, эквивалентное субмерсии σ в Ω и совпадающее на горизонтали S с проекцией π, также есть субмерсия (класса C^r, если $\sigma \in C^r$).

Сужение σ на S, будучи инъективным, определяет биекцию, а тем самым и диффеоморфизм, $\Delta\colon\ \pi(S) \to \sigma(\Omega)$. Отображение σ' есть не что иное как $\sigma' = \Delta^{-1} \circ \sigma$.

3.5. Связка

Пару простых областей $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ для субмерсий $\sigma_1\colon\ \Omega_1 \to \mathbb{R}^p$, $\sigma_2\colon\ \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ назовем связкой, если они имеют общую проекцию

$$\pi'(\Omega_1) = \pi'(\Omega_2) = Z$$

и (хотя бы одну) общую горизонталь

$$S = L \cap \Omega_1 = L \cap \Omega_2,$$

где L — какая-то горизонталь в $\mathbb{R}^n$, задевающая обе области.

Субмерсии σ_1, σ_2 в связке с точностью до эквивалентности можно считать совпадающими на общей горизонтали S (например, равными проекции π или равными одному из σ_i). Общий класс гладкости при этом сохраняется.

Доказательство. Если Δ_i — диффеоморфизм из 3.4, отвечающий субмерсии σ_i, то искомая субмерсия σ_1', эквивалентная σ_1 и равная σ_2 на S, есть $\sigma_1' = \Delta_2 \circ \Delta_1^{-1} \circ \sigma_1$. $\square$

Совершенно аналогично можно говорить о связке любого конечного набора простых областей.

3.6. Связка окрестностей

Для любых субмерсий

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p$$

со слоями в a, трансверсальными горизонтали, в любой окрестности точки a можно выделить связку простых окрестностей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ с общей горизонталью Sa.

Доказательство. Для одной субмерсии σ_i простая окрестность это, например, прообраз кубической окрестности при локальном диффеоморфизме $\delta_i = (\sigma_i, \pi')$ в точке a. В силу 3.4, можно, не умаляя общности, считать, что все $\sigma_i = \pi$ на горизонтали La. Но тогда диффеоморфизмы δ_i сохраняют точки из L (в том числе и точку a), и искомые окрестности Ω_i — это прообразы $\delta_i^{-1}(K)$ одного и того же куба Ka. □

3.7. Общая трансверсаль к слоям

Для любых субмерсий

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p$$

существует проходящая через a p-мерная (аффинная) плоскость L, трансверсальная слоям всех субмерсий σ_i в точке a. При этом вблизи a, с точностью до эквивалентности, субмерсии σ_i можно считать совпадающими на L (например, равными σ_1 на L); общий класс гладкости при этом сохраняется.

Доказательство. Можно считать, не умаляя общности, что $a = 0$. Все «плоскости» и «прямые» предполагаем проходящими через 0 (т. е. это линейные подпространства в $\mathbb{R}^n$). Нам нужно построить $(n-q)$-мерную плоскость $L \subset \mathbb{R}^n$, трансверсальную заданным q-мерным плоскостям $L_1, \dots, L_k \subset \mathbb{R}^n$. Дополнение к объединению $L_1 \cup \ldots \cup L_k$ очевидно не пусто (оно даже всюду плотно), поэтому найдется прямая l^1, не лежащая ни в одном L_i. Образуем $(q+1)$-мерные плоскости $L_i^1 = l^1 + L_i$, $i = 1, \dots, k$. Возьмем теперь прямую l^2, не лежащую ни в одном L_i^1, и образуем $(q+2)$-мерные плоскости $L_i^2 = l^2 + L_i^1$, $i = 1, \dots, k$, и.т.д. до прямой l^{n-q}. Искомое $L = l^1 + \cdots + l^{n-q}$.

Для завершения доказательства линейной заменой переведем L в горизонталь и, пользуясь 3.6, 3.5, уравняем на ней субмерсии с первой из них. Сделав обратную замену, получим требуемую ситуацию. □

3.8.

Предположение. *Пусть пара простых областей $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ для субмерсий $\sigma_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^p, \sigma_2\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ образует связку с общей горизонталью S. И пусть гладкие отображения $\Phi_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^{m_1}, \Phi_2\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^{m_2}$ таковы, что Φ_1 зависит от σ_1, Φ_2 зависит от σ_2, и при этом всюду в $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ранг отображения*

$$(\Phi_1, \Phi_2)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

не превосходит p. Тогда, если субмерсии σ_1, σ_2 совпадают на горизонтали S, то они совпадают и на множестве $W \subset \Omega$ тех точек, где оба ранга Φ_1 и Φ_2 равны p.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in W$. Достаточно показать, что слои Λ_1, Λ_2 субмерсий σ_1, σ_2, проходящие через точку x, совпадают (ибо из совпадения σ_1,σ_2 на S тогда будет следовать равенство $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$).

Множество $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ замкнуто в Λ_i. В самом деле, пусть

$$\varphi_1,\ \varphi_2\colon\ Z \to \mathbb{R}^p$$

— неявные функции с графиками Λ_1, Λ_2. Множество $X \subset Z$ тех точек, где $\varphi_1 = \varphi_2$, очевидно замкнуто в Z (ввиду непрерывности φ_i). Множество Λ есть прообраз множества X при гомеоморфизме $\pi'\colon\ \Lambda_i \to Z$, и значит Λ замкнуто в Λ_i.

С другой стороны, Λ открыто в Λ_i. Покажем это. Ввиду зависимости Φ_i от σ_i, ранг Φ_i на всем слое Λ_i тот же, что в точке $x \in \Lambda_i$ (см. 3.3), т. е. равен p. Следовательно, $\Lambda \subset W$. Но W открыто, и значит вблизи произвольной точки $y \in \Lambda$ все три ранга Φ_1, Φ_2 и (Φ_1, Φ_2) равны p. Поэтому, учитывая критерий зависимости Φ_i от σ_i (см. 3.3), и обозначая символом Δf плоскость на строках матрицы Df, мы получаем вблизи y

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \Delta\sigma_2.$$

Равенство $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2$ означает, что вблизи y субмерсии σ_1, σ_2 зависят друг от друга, т. е. эквивалентны. Другими словами, вблизи y совпадают слои этих субмерсий. В частности, вблизи y совпадают слои Λ_1, Λ_2. А это и означает что Λ открыто в Λ_i.

Открыто-замкнутое подмножество Λ (непустое, ибо Λx) связного множества Λ_i с необходимостью совпадает с Λ_i, откуда $\Lambda_1 = \Lambda_2$, что и требовалось. Предложение доказано. $\square$

4. Теорема о пересечении распределений

Здесь формулируются две в некотором смысле дуальные друг другу теоремы 4.1, 4.2 («о сумме» и «о пересечении» распределений). Первая из них доказана в [1]. Доказательству второй посвящен этот раздел.

4.1.

Теорема 1. *Теорема Пусть C^r-распределения $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_k$, определенные вблизи $a \in \mathbb{R}^n$, таковы, что*

$$\cap \mathfrak{D}_i \supset \mathfrak{D}_0, \quad \mathfrak{D}_i + \mathfrak{D}_j \subset \mathfrak{D}_{ij},$$

где $\mathfrak{D}_0$ – $(p-1)$-мерное инволютивное C^{r+1}-распределение, а $\mathfrak{D}_{ij}$ – p-мерные инволютивные C^r-распределения. Тогда вблизи a

$$\sum \mathfrak{D}_i \subset \mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{D}$ — некоторое p-мерное инволютивное C^r-распределение.

4.2.

Теорема 2. *Пусть распределения $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_k$, порожденные своими интегралами и определенные вблизи $a \in \mathbb{R}^n$, таковы, что*

$$\sum \mathfrak{D}_i \subset \mathfrak{D}_0, \quad \mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_j \supset \mathfrak{D}_{ij},$$

где $\mathfrak{D}_0$ – $(q+1)$-мерное инволютивное C^{r+1}-распределение, а $\mathfrak{D}_{ij}$ – q-мерные инволютивные C^{r+1}-распределения. Тогда вблизи a

$$\bigcap \mathfrak{D}_i \supset \mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{D}$ — некоторое q-мерное инволютивное C^r-распределение.

Вместо 4.2 мы на самом деле будем доказывать следующее ключевое утверждение.

4.3.

Предположение. Пусть гладкие отображения

$$\Psi_i \colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

таковы, что вблизи a для всех i, j,

$$\operatorname{Ker} D\Psi_i \subset \operatorname{Ker} D\sigma_0, \quad \operatorname{Ker} D(\Psi_i, \Psi_j) \supset \operatorname{Ker} D\sigma_{ij},$$

где $\sigma_0 \colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^{p-1}, \sigma_{ij} \colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p$ — *некоторые* C^r-субмерсии. Тогда вблизи a

$$\operatorname{Ker} D(\Psi_1, \ldots, \Psi_k) \supset \operatorname{Ker} D\sigma,$$

где $\sigma \colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p$ — некоторая C^r-субмерсия.

(С учетом теоремы Фробениуса отсюда прямо вытекает теорема 4.2 в силу равенств

$$\mathfrak{D}_i = \operatorname{Ker} D\Psi_i, \quad \mathfrak{D}_0 = \operatorname{Ker} D\sigma_0, \quad \mathfrak{D}_{ij} = \operatorname{Ker} D\sigma_{ij}, \quad \mathfrak{D} = \operatorname{Ker} D\sigma).$$

4.4.

Следствие. *Если из заданных вблизи $a \in \mathbb{R}^n$ вещественных C^{r+1}-функций $\psi_1, \ldots, \psi_k$ какие-то $p-1$ независимы (имеют общий ранг $p-1$), а каждые $p+1$ служат интегралами для некоторого $(n-p)$-мерного инволютивного C^{r+1} распределения, то и все k функций служат интегралами для некоторого $(n-p)$-мерного инволютивного C^r-распределения (вблизи a).*

(С учетом теоремы Фробениуса, это прямо вытекает из 4.3: если независимыми являются, например, функции $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$, то надо взять $\Psi_i = (\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}, \psi_i)$, $i \geqslant p$, и $\sigma_0 = (\psi_1, \ldots, \psi_{p-1})$.)

4.5. Доказательство предложения 4.3

Общая идея доказательства состоит в следующем. Если субмерсии σ_{ij} уравнять на некоторой общей трансверсали к слоям, то в каждой точке, где общий ранг $(\Psi_1, \ldots, \Psi_k)$ равен p (т. е. максимальный), какие-то 2 из этих субмерсий будут касаться. Если теперь построить субмерсию σ, которая участвует во всех этих касаниях, то она и будет искомой. Полное доказательство составляют пп. 4.6–4.11.

4.6.

Через Δf условимся обозначать плоскость на строках якобиевой матрицы Df. По условию, вблизи a выполнены включения (для всех i, j)

$$\Delta\sigma_0 \subset \Delta\Psi_i \subset \Delta(\Psi_i, \Psi_j) \subset \Delta\sigma_{ij},$$

где плоскость $\Delta\sigma_0$ – $(p-1)$-мерна, а плоскость $\Delta\sigma_{ij}$ – p-мерна. И требуется указать субмерсию σ, такую что $\Delta(\Psi_1, \ldots, \Psi_k) \subset \Delta\sigma$ (вблизи a).

4.7.

Не умаляя общности, можно считать, что субмерсии σ_{ij} имеют вид

$$\sigma_{ij} = (\sigma_0, s_{ij})$$

(где s_{ij} — вещественные функции вблизи a) и кроме того совпадают на некоторой общей p-мерной трансверсали к слоям в точке a. Покажем, что такой выбор всегда возможен.

У каждой субмерсии σ_{ij} выберем какую-то компоненту $\widehat{s}_{ij}$, которая вблизи a дополняет σ_0 до субмерсии $(\sigma_0, \widehat{s}_{ij})$. (Надо взять такую компоненту $\widehat{s}_{ij}$, у которой градиент $\nabla\widehat{s}_{ij}$ в точке a не лежит в плоскости $\Delta\sigma_0$.) Заметим, что субмерсия $(\sigma_0, \widehat{s}_{ij})$ вблизи a эквивалентна σ_{ij} (ибо зависит от σ_{ij}). Для полученных субмерсий $(\sigma_0, \widehat{s}_{ij})$ возьмем какую-то общую трансверсаль La к слоям в точке a (см. 3.7). Трансверсаль L сразу будем считать горизонталью (этого можно добиться линейным преобразованием). Вблизи a выделим для субмерсий $(\sigma_0, \widehat{s}_{ij})$ связку простых окрестностей Ω_{ij} с общей горизонталью $S = L \cap \Omega_{ij}a$ (см. 3.6). Наконец, еще раз заменим все субмерсии $(\sigma_0, \widehat{s}_{ij})$ (в их простых областях Ω_{ij}) на эквивалентные, уравняв на S с какой-то одной из них (см. 3.5). Полученные субмерсии снова будут иметь вид (σ_0, s_{ij}), ибо такой вид субмерсия уже имеет на S, а вдоль ее слоев отображение σ_0 постоянно (оно зависит от субмерсии).

4.8.

Зафиксируем открытый куб Va, в котором выполнены включения 4.6 и в котором каждое Ψ_i зависит от σ_{ij} (зависимости вблизи a вытекают из включений). Для разных i, j обозначим через $V_{ij} \subset V$ множество тех точек, где ранг (Ψ_i, Ψ_j) равен p (т. е. где $\Delta(\Psi_i, \Psi_j) = \Delta\sigma_{ij}$).

Покажем, что семейство множеств V_{ij} обладает свойством *перекрытости* (т. е. любые 2 точки из объединения множеств покрыты каким-то из множеств). В точке $b \in V_{ij}$ хотя бы одна из двух функций Ψ_i, Ψ_j, скажем Ψ_i, имеет ранг p. Аналогично, в точке $b' \in V_{i'j'}$, скажем функция $\Psi_{i'}$ имеет ранг p. Но тогда обе точки b, b' лежат в множестве $V_{ii'}$ (а если $i = i'$, то $b, b' \in V_{ij}$), что и требуется.

4.9.

Лемма. *Пусть C^r-субмерсии*

$$\sigma_i\colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p, \quad i = 1, 2,$$

совпадают на некоторой общей p-мерной трансверсали к слоям в точке a, и пусть гладкие функции

$$\Phi_i\colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 1, 2,$$

таковы, что каждое Φ_i зависит от σ_i и при этом общий ранг (Φ_1, Φ_2) всюду $\leqslant p$. Тогда вблизи a во всех точках, где оба ранга Φ_1 и Φ_2 равны p, субмерсии σ_1, σ_2 r-касаются (т. е. имеют одинаковые частные производные порядков $0, \ldots, r$).

Доказательство. Множество точек, где оба ранга равны p, очевидно открыто, поэтому касание субмерсий вытекает просто из их совпадения в этих точках. В свою очередь, совпадение следует из предложения 3.8, нужно лишь линейным преобразованием перевести общую трансверсаль в горизонталь, а затем, пользуясь 3.6, выделить вблизи a связку простых окрестностей Ω_1, Ω_2 для субмерсий σ_1, σ_2. □

4.10.

Из леммы следует, что если куб V выбран достаточно малым, то на пересечении каждой пары множеств V_{ij} пары субмерсий σ_{ij} с теми же номерами r-касаются. (Роль функций Φ_1, Φ_2 из леммы здесь играют подходящие пары функций Ψ_i: в точке из V_{ij} хотя бы одна из двух функций Ψ_i, Ψ_j имеет ранг p.) В частности, на пересечениях r-касаются последние компоненты этих субмерсий — функции s_{ij}.

4.11.

Итак у нас имеется конечный набор множеств $V_{ij} \subset V$ со свойством перекрытости и конечный набор C^r-функций $s_{ij}\colon V \to \mathbb{R}$, таких что на пересечении каждой пары множеств пара функций с теми же номерами r-касается. В этих условиях, согласно общей теореме из [5], существует C^r-функция $s\colon V \to \mathbb{R}$, которая на каждом множестве V_{ij} r-касается функции s_{ij}. Положим

$$\sigma = (\sigma_0, s)\colon\ V \to \mathbb{R}^p,$$

тогда на каждом V_{ij} выполнено $D\sigma = D\sigma_{ij}$. Отсюда в частности видно, что $D\sigma(a)$ — эпиморфизм (в нетривиальной ситуации, когда хотя бы одно из замыканий $\overline{V_{ij}}$ покрывает a). Таким образом, вблизи a, σ — субмерсия. При этом в любой точке выполнено $\Delta\Psi_i \subset \Delta\sigma$. (Здесь либо $\Delta\Psi_i = \Delta\sigma_0 \subset \Delta\sigma$, либо $\Delta\Psi_i = \Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma$.) В итоге

$$\Delta(\Psi_1, \dots, \Psi_k) \subset \Delta\sigma.$$

Предложение доказано.

5. Редукция семейств гладких функций

Зависимость гладкой функции от субмерсии означает, что локально (подходящим локальным диффеоморфизмом) эту функцию можно привести к функции меньшего числа переменных (надо просто «выпрямить» субмерсию). В этих терминах, результаты предыдущего раздела (предложение 4.3) по существу можно рассматривать как некоторые условия типа Хелли локальной приводимости функционального семейства к функциям меньшего числа переменных. Такая интерпретация отражена в настоящем разделе (излагаемые здесь результаты частично анонсировались в [6]).

5.1. Приводимость семейства

Пусть вблизи точки $a \in \mathbb{R}^n$ заданного семейство из k функций класса C^r от n переменных

$$\psi_1, \dots, \psi_k\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что это семейство C^r-*приводимо* (вблизи a) к функциям $p < n$ переменных, если существует локальный C^r-диффеоморфизм φ в точке a, «выпрямляющий» (вблизи a) каждое ψ_i до функции первых p переменных (другими словами, если существуют открытые множества U, $U' \subset \mathbb{R}^n$, $U a$, и C^r-диффеоморфизм $\varphi\colon U \to U'$, такие что каждая функция $\psi_i \circ \varphi^{-1}\colon U' \to \mathbb{R}$ не зависит от последних $n - p$ переменных). Равносильное условие: все функции ψ_i зависят (вблизи a) от некоторой C^r-субмерсии

$$\sigma\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^p.$$

(Чтобы получить σ из φ, надо просто взять первые p компонент диффеоморфизма φ, $\sigma = (\varphi^1, \dots, \varphi^p)$. Чтобы получить φ из σ, надо выбрать из n стандартных координатных функций в $\mathbb{R}^n$ подходящие $n-p$ функций, которые достраивают σ до локального диффеоморфизма в точке a.)

5.2.

Теорема. *Если ранг семейства C^r-функций*

$$\psi_1, \dots, \psi_k\colon\ (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}$$

в точке a не ниже чем $p-1$ и каждые $p+1$ из функций C^r-приводимы к функциям p переменных, то и все семейство C^r-приводимо. (Более того, если линейно независимые градиенты в точке a имеют, например, первые $p-1$ функций, то достаточно приводимости всех наборов $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}, \psi_i, \psi_j, \quad i, j \geqslant p$.)

(Это прямо следует из предложения 4.3: надо взять

$$\Psi_i = (\psi_1, \dots, \psi_{p-1}, \psi_i), \quad i \geqslant p, \quad \text{и} \quad \sigma_0 = (\psi_1, \dots, \psi_{p-1}).)$$

5.3. Критичность условий

Обсудим условия теоремы. Заметим, что ранг $\mathfrak{r}$ всего семейства (т. е. ранг отображения $(\psi_1, \dots, \psi_k)$ в точке a) очевидно не может превосходить p (при $\mathfrak{r} > p$ семейство неприводимо). И поскольку по условию $\mathfrak{r} \geqslant p-1$, то $\mathfrak{r}$ допускает лишь значения $p, p-1$. При этом само условие $\mathfrak{r} \geqslant p-1$ не может быть ослаблено ни на единицу. Это показывает приводимый ниже пример 5.5 (этот пример упоминался во Введении). Далее, по условию требуется приводимость каждых $p+1$ функций. Уменьшить число $p+1$ также невозможно. Это показывает пример 5.4. Наконец, нельзя ослабить и требование о приводимости каждой пары функций ψ_i, ψ_j (совместно с $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$). Это видно из последнего примера 5.6.

5.4.

Пример. Укажем неприводимые $p+1$ гладких функций $(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$, каждые p из которых приводимы. При $\mathfrak{r} = p$ это функции (от переменных $x_1, \dots, x_n$)

$$x_1,\ \dots,\ x_p,\ x_{p+1}^2,$$

а при $\mathfrak{r} = p-1$ — функции

$$x_1,\ \dots,\ x_{p-1},\ x_p^2,\ x_{p+1}^2.$$

(При $\mathfrak{r} = p-1$ можно также указать неприводимые p функций, каждые $p-1$ из которых приводимы:

$$x_1,\ \dots,\ x_{p-1},\ x_p^2 + x_{p+1}^2.)$$

Причина неприводимости везде в том, что слой отображения

$$(\psi_1, \dots, \psi_k)\colon\ (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^k$$

в точке 0 есть плоскость $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p-1}$ (размерности $n-p-1$), в то время как этот слой (в случае приводимости) должен содержать слой субмерсии $(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ (подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности $n-p$).

5.5.

Пример. Укажем 4 гладкие функции $\psi_1, \dots, \psi_4\colon\ (\mathbb{R}^3, 0) \to \mathbb{R}$, каждые 3 из которых приводимы к функциям 2-х переменных, а все 4 неприводимы. Функции $\psi_1, \dots, \psi_4$ (от переменных x, y, z) при $x < 0$ равны

$$x^2(1+xy)^2,\ x^2,\ 0,\ 0,$$

а при $x \geqslant 0$, соответственно,

$$0,\ 0,\ x^2(1+xz)^2,\ x^2.$$

Четыре субмерсии $(\mathbb{R}^3, 0) \to \mathbb{R}^2$, от которых зависят тройки функций ψ_i, имеют следующий вид: при $x < 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x(1+xy) \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

а при $x \geqslant 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x(1+xz) \\ y \end{pmatrix}.$$

Субмерсии $\sigma\colon\ (\mathbb{R}^3, 0) \to \mathbb{R}^2$, от которой зависит вся четверка, не существует. Дело в том, что при $x < 0$ градиенты функций ψ_i порождают плоскость xy, а при $x > 0$ — плоскость xz. Но такими же должны быть плоскости на строках матрицы $D\sigma$, и значит (ввиду непрерывности $D\sigma$) строки в $D\sigma(0)$ линейно зависимы (т. е. σ — не субмерсия).

5.6.

Пример. Укажем тройку гладких функций, в которой две пары приводимы к функциям одной переменной, а третья пара — неприводима. Возьмем функции ψ_2, ψ_3, ψ_4 из примера 5.5. Пара ψ_2, ψ_3 зависит от субмерсии

$$(\mathbb{R}^3, 0) \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} x, & x < 0 \\ x(1+xz), & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Пара ψ_2, ψ_4 зависит от субмерсии $(x, y, z) \mapsto x$. Пара ψ_3, ψ_4 не может зависеть ни от какой субмерсии, поскольку при $x > 0$ градиенты $\nabla\psi_3$, $\nabla\psi_4$ линейно независимы.

5.7.

Замечание. Примеры 5.5, 5.6 ради простоты приведены в классе C^1, но их несложно модифицировать в любой класс C^r. Например, чтобы пример 5.5 перевести в класс C^2, надо в исходных функциях вместо вместо x^2, $x^2(1+xy)^2$, $x^2(1+xz)^2$, взять соответственно

$$x^3, \quad x^3(1+x^2y)^3, \quad x^3(1+x^2z)^3,$$

а в субмерсиях заменить $x(1+xy)$, $x(1+xz)$, соответственно на

$$x(1+x^2y), \quad x(1+x^2z). \quad \blacktriangleright$$

Литература

1. *Рабовер В. И.* О комбинаторике полей линейных подпространств // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. 2007. № 11.
2. *Данцер Л.*, *Грюнбаум Б.*, *Кли В.* Теорема Хелли и ее применения. М., 1968.
3. *Тамура И.* Топология слоений. М., 1979.
4. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1971.
5. *Рабовер В. И.* Комбинаторные конструкции продолжения струй. М.: URSS, 2002.
6. *Рабовер В. И.* О приводимости семейств гладких функций // Доклады РАН. 1999. Т. 364. № 6.