Якушкин Н. А.

Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, г. Обнинск

ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ШВАРЦА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В данной работе изложена и пояснена на примерах методика применения обобщенной производной Шварца для решения задач о мягкости или жесткости бифуркаций Андронова—Хопфа, удвоения периода предельного цикла, рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла для семейств векторных полей. В качестве примеров применения обобщенной производной Шварца в данной работе рассмотрено решение задач о мягкости или жесткости бифуркации Андронова—Хопфа для модели рыночной экономики, бифуркаций Андронова—Хопфа и удвоения периода предельного цикла для системы Лоренца, а также бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла для системы из двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Введение

Производная Шварца (шварциан), определенная для функции комплексного переменного $\varphi(z)$, имеет вид [5]

$$S_\varphi(z) = \frac{\varphi'''(z)}{\varphi'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right)^2.$$

Производная Шварца обладает следующими основными свойствами:

1) $S_\varphi(z) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z)$ — дробно-линейная функция.
2) Для произвольных функций: $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ справедливо равенство

$$S_{\varphi_2\circ\varphi_1}(z) = S_{\varphi_2}(\varphi_1(z))(\varphi_1'(z))^2 + S_{\varphi_1}(z).$$

В последней четверти прошлого века был получен ряд результатов касающихся приложения производной Шварца к изучению динамики отображений отрезков [4, 9, 16]. Применение производной Шварца к исследованию бифуркаций отображений отрезка обусловлено следующими простыми соображениями. Пусть $I, I_1 \subset \mathbb{R}$ — ограниченные интервалы $g_a\colon I \to I$ — однопараметрическое семейство отображений, обладающих при $a \in I_1$ неподвижной точкой $u_a(a) \in I$. Если существует значение $a_0 \in I_1$, такое что

$$g'_{a_0}(u_0(a_0)) = -1,\ \frac{\partial}{\partial a}\left|g'_{a_0}(u_0(a_0))\right| > 0,$$

тогда при $a = a_0$ происходит бифуркация удвоения периода неподвижной точки $u_0(a)$ семейства отображений g_a [4, 9, 16]. Хорошо известно, что заменой переменных

$$y = \rho(u),\, u, y \in \mathbb{R},$$

такой что $\rho(u_0(a_0)) = 0$ в окрестности бифурцирующей неподвижной точки $u_0(a_0)$, отображение g_{a_0} приводится к нормальной форме вида [1, 4, 9]

$$q(y) = -y(1 + c_1 y^2) + o(y^3),$$

где коэффициент c_1 — называется первой ляпуновской величиной. В невырожденном случае, когда $c_1 \neq 0$, мягкость или жесткость рассматриваемой бифуркации определяется значением первой ляпуновской величины. Т. е., если $c_1 < 0$ рассматриваемая бифуркация мягкая, если $c_1 > 0$ — жесткая.

Пусть $g(u) = g_{a_0}(u)$, $\eta(y) = \rho^{-1}(y)$, тогда из

$$g'(u_0(a_0)) = q'(0) = q(\rho(u_0(a_0)))' = q'(\rho((u_0(a_0)))\rho'((u_0(a_0)) = -1$$

следует, что

$$(\rho'(u_0(a_0)))^2 = (g'(u_0(a_0)))^2 = (\eta'(0))^2 = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_q(0) = 6c_1 = S_{\rho \circ g \circ \eta}(0) = \\ &= S_\rho(u_0(a_0))(g'(u_0(a_0)))^2(\eta'(0))^2 + S_g(u_0(a_0))(\eta'(0))^2 + S_\eta(0) = \\ &= S_\rho(u_0(a_0)) + S_\eta(0) + S_g(u_0(a_0)) = S_{\rho \circ \eta}(0) + S_g(u_0(a_0)) = S_g(u_0(a_0)). \end{aligned}$$

Следовательно, вычисление значения первой ляпуновской величины c_1 может быть сведено к вычислению значения производной Шварца $S_g(u_0(a_0))$.

Таким образом, в невырожденных случаях решение задачи о мягкости или жесткости бифуркации удвоения периода неподвижной точки или периодической орбиты однопараметрического семейства отображений отрезка может быть сведено к вычислению соответствующего значения производной Шварца.

Рассмотрим следующий простейший пример.

Пусть $I = [-1, 1]$, $x \in I, a > 0$, $\varphi_a(x) = 1 - ax^2$ — однопараметрическое семейство отображений интервала I в себя и степени отображения φ_a определены по индукции как $\varphi_a^0 = id$, $\varphi_a^{n+1} = \varphi_a \circ \varphi_a^{n}$.

Покажем, что $\forall\, n \in 1, 2, 3, \ldots,\ x \in I/\{0\},\ S_{\varphi n_a}(x) < 0$. Очевидно, $S_{\varphi_a}(x) = -3/(2x^2) < 0$. Если для некоторого натурального k $S_{\varphi_a^k}(x) < 0$, тогда

$$S_{\varphi_a^{k+1}} = S_{\varphi_a}\big(S_{\varphi_a^k}(x)\big)\big((\varphi_a^k(x))'\big)^2 + S_{\varphi_a}(x) < 0.$$

Таким образом, все бифуркации удвоения периода неподвижных точек и периодических орбит данного семейства отображений — мягкие.

Как известно, решение задач о мягкости или жесткости бифуркаций неподвижных точек и периодических орбит семейств диффеоморфизмов, а также неподвижных точек и предельных циклов семейств векторных полей сводится к вычислению значений соответствующих ляпуновских величин [1, 3, 4, 9, 10].

Е. А. Сатаев [9] построил обобщенную производную Шварца для диффеоморфизмов и векторных полей, определенных в $\mathbb{R}^n$. Значения обобщенной производной Шварца, вычисленные для бифурцирующих неподвижных точек и периодических орбит семейств диффеоморфизмов, а также для бифурцирующих неподвижных точек и предельных циклов семейств векторных полей с точностью до некоторого, в общем случае, положительного множителя, совпадают со значениями соответствующих первых ляпуновских величин. Таким образом, в невырожденных случаях, т. е., когда соответствующие первые ляпуновские отличны от нуля, решение задач о мягкости или жесткости бифуркаций удвоения периода неподвижной точки, рождения инвариантной окружности из неустойчивой неподвижной точки для семейств диффеоморфизмов, а также бифуркаций Андронова—Хопфа, удвоения периода предельного цикла и рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла для семейств векторных полей может быть сведено к вычислению соответствующего значения обобщенной производной Шварца.

Данная работа имеет следующую структуру:

1) Сведения о величинах тензорного вида и струях, используемые в работе.
2) Описание обобщенной производной Шварца для векторных полей и ее свойств.
3) Примеры применения обобщенной производной Шварца для решения задач о мягкости или жесткости бифуркаций Андронова—Хопфа, удвоения периода предельного цикла, рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла для семейств векторных полей.

1. Величины тензорного вида и струи

1.1. Величины тензорного вида

Набор вещественных чисел $\{T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\}$, занумерованных индексами $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, определяет в $\mathbb{R}^n$ величину тензорного вида (в. т. в.) типа (m, k) [9]. Обычно для в. т. в. используется обозначение $T = \{T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\}$. Числа $\{T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\}$ называются координатами в. т. в. Вещественные векторы можно считать величинами тензорного вида типа $(1, 0)$ или $(0, 1)$, вещественные матрицы — величинами тензорного вида типа $(1, 1)$.

Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ введены две произвольные, в общем случае, криволинейные системы координат $(u^1, \ldots, u^n)$, $(w^1, \ldots, w^n)$. Величина тензорного вида T, координаты которой $\{T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\}$, $\{T^{i'_1,\ldots,i'_m}_{j'_1,\ldots,j'_k}\}$ в координатных системах $(u^1, \ldots, u^n)$, $(w^1, \ldots, w^n)$ соответственно, связаны соотношением

$$T^{i'_1,\ldots,i'_m}_{j'_1,\ldots,j'_k} = \frac{\partial w^{i'_1}}{\partial u^{i_1}} \cdots \frac{\partial w^{i'_1}}{\partial u^{i_m}} \cdot \frac{\partial u^{j_1}}{\partial w^{j'_1}} \cdots \frac{\partial u^{j_k}}{\partial w^{j'_k}} T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}, \tag{1}$$

называется тензором [7].

Пусть f — определенное в $\mathbb{R}^n$, векторное поле. Тогда первая, вторая и третья производные векторного поля f, определенные в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ как

$$f'(x_0) = \{f'^i_j(x_0)\} = \left\{\frac{\partial f^i(x_0)}{\partial x_j}\right\}, \quad f''(x_0) = \{f''^i_{j,k}(x_0)\} = \left\{\frac{\partial^2 f^i(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}\right\},$$

$$f'''(x_0) = \{f'''^i_{j,k,m}(x_0)\} = \left\{\frac{\partial^3 f^i(x_0)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m}\right\}$$

являются примерами в. т. в. При этом f' представляет собой тензор, а f'', f''' тензорами не являются, так как для данных в. т. в. соотношение (1) справедливо лишь при линейной замене координат.

Для в. т. в. определены операции: сложения, умножения на число, тензорного произведения и свертки.

Сумма в. т. в. S, T типа (m, k), определена как

$$(S+T)^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k} = S^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k} + T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}.$$

Произведение в. т. в. T типа (m, k) и числа a определено как

$$(aT)^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k} = a\big(T^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\big).$$

Тензорное произведение в. т. в. P — типа (m, k) и в. т. в. Q типа (s, p) определено как

$$(P \otimes Q)^{i_1,\ldots,i_{m+s}}_{j_1,\ldots,j_{k+p}} = \big(P^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_k}\big)\big(Q^{i_{m+1},\ldots,i_{m+s}}_{j_{k+1},\ldots,j_{k+p}}\big).$$

Свертка в. т. в. P, Q типа (m, k), (k, n) соответственно, определена как

$$(P * Q)^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{s_1,\ldots,s_k} \big(P^{i_1,\ldots,i_m}_{s_1,\ldots,s_k}\big)\big(Q^{s_1,\ldots,s_k}_{j_1,\ldots,j_n}\big).$$

1.2. Струи

Пусть $u, u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность точки u_0, такая что $u_0 \in \Omega$, и определены некоторые функции $g_1(u), g_2(u), \ldots$ класса $C^k(\Omega)$, такие что $\forall\, i\ g_i(u_0) = 0$. Две функции $g_i(u)$, $g_j(u)$ принадлежат одной k-струе в точке u_0, если k первых членов тэйлоровских разложений $g_i(u_0)$, $g_j(u_0)$ совпадают [1,4,9]. В данной работе рассматриваются только 2-струи (далее струи).

Так как в точке u_0 тэйлоровское разложение любой функции

$$g(u) \in C^2(\Omega) |\, g(u_0) = 0,$$

имеет вид

$$g(u_0 + v) = L(v) + \frac{1}{2} B(v) + o\big(\|v\|^3\big), \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$L(v) = \sum_i \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^i} v^i, \quad B(v) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g(u_0)}{\partial u^i \partial u^j} v^i v^j$$

— соответственно линейный и квадратичный функционалы, действующие в $\mathbb{R}^n$, струя определяется парой $J = (L, B)$.

Пусть $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности точек u_0, u_1 соответственно и $u_0 \in \Omega_0$, $u_1 \in \Omega_1$. Если Ψ локальный диффеоморфизм отображающий Ω_0 в Ω_1, такой что $\Psi(u_0) = u_1$ и в точке u_0 определена произвольная струя $J = (L, B)$, тогда в точке u_1 может быть определена струя $\widetilde{J} = \Psi \circ J$, являющаяся композицией диффеоморфизма Ψ и струи J. Струи J, $\widetilde{J}$ связаны соотношением [9]

$$L = \widetilde{L} * \Psi'(u_0), \quad B = \widetilde{L} * \Psi''(u_0) + \widetilde{B} * \big(\Psi'(u_0) \otimes \Psi'(u_0)\big)\,.$$

Если для определенной в точке $u_0 \in \mathbb{R}^n$ струи $J = (L, B)$, диффеоморфизма $\Psi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и числа λ справедливо равенство

$$\Psi \circ J = \lambda J = (\lambda L, \lambda B)$$

тогда струя $J = (L, B)$ называется собственной струей диффеоморфизма Ψ в точке u_0, соответствующей собственному значению λ.

Если для определенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ струи $J = (L, B)$, векторного поля f, порождающего в $\mathbb{R}^n$ фазовый поток φ^t, и числа κ верно соотношение $\forall\, t \geqslant 0$, $\quad \varphi^t \circ J = e^{\kappa t} J$, то струя $J = (L, B)$ называется собственной струей векторного поля f в точке x_0, соответствующей собственному значению κ.

2. Обобщенная производная Шварца для векторных полей и ее свойства

2.1. Вычисление обобщенной производной Шварца для векторного поля

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, f — определенное в $\mathbb{R}^n$, векторное поле. Обобщенная производная Шварца векторного поля f в произвольной точке x_0 вычисляется следующим образом:

1) Из соотношений:
$$Lf'(x_0) = \kappa L, \quad f'(x_0)v = \kappa v, \quad (L, v) = 1 \tag{2}$$
находятся и нормируются левый и правый собственные векторы матрицы $f'(x_0)$, соответствующие некоторому собственному значению данной матрицы.

2) Из системы линейных уравнений:
$$\kappa B = L * f''(x_0) + \big(B * f'(x_0) + f'(x_0) * B\big) \tag{3}$$
находятся коэффициенты квадратичной формы B.

3) Пусть
$$U_f = (L \otimes L) * (f'''(x_0) \otimes \delta), \quad V_f = 3(B \otimes L - L \otimes B) * (f''(x_0) \otimes \delta \otimes \delta),$$
$$T(v) = w \otimes v \otimes v \otimes v + v \otimes w \otimes v \otimes v + v \otimes v \otimes w \otimes v + v \otimes v \otimes v \otimes w,$$
$$v^* = w, \quad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
тогда обобщенная производная Шварца векторного поля f, вычисленная в точке x_0 относительно струи $J = (L, B)$ и вектора v имеет вид
$$\mathrm{Sh}\,(f(x_0), J, v) = (U_f + V_f) * T(v) \tag{4}$$

2.2. Вычисление обобщенной производной Шварца для периодической траектории векторного поля

Пусть f — определенное в $\mathbb{R}^n$ векторное поле, обладающие периодической траекторией x_t периода τ, такой что $x(0) = x_0$. Обобщенная производная Шварца для периодической траектории вычисляется следующим образом:

1) Из системы обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = f'(x(t))\Phi(t), \quad x(0) = x_0, \quad \Phi(0) = E \tag{5}$$
для периодической траектории $x(t)$ строится фундаментальная матрица $\Phi = \Phi(\tau)$.

2) Из соотношений

$$L^{(0)}\Phi = \mu L^{(0)}, \quad \Phi v^{(0)} = \mu v^{(0)}, \quad (L^{(0)}, v^{(0)}) = 1, \tag{6}$$

где μ — один из мультипликаторов периодической траектории $x(t)$, $\chi = Ln\mu/\tau$ — соответствующий характеристический показатель, находятся и нормируются левый и правый собственные векторы матрицы Φ.

3) Из системы линейных уравнений

$$\chi \cdot B^{(0)} = L(0) * f''(x_0) + \left(B^{(0)} * f'(x_0) + f'(x_0) * B^{(0)}\right) \tag{7}$$

находятся коэффициенты квадратичной формы $B^{(0)}$.

4) Из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}B(t) = B(t) - B(t) * \left(f(x(t)) \otimes \delta - \delta \otimes f(x(t))\right), \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = f'(x(t))v(t), \\ \dfrac{dL(t)}{dt} = -L(t)f'(x(t)), \quad L(0) = L^{(0)}, \quad v(0) = v^{(0)}, \quad B(0) = B^{(0)} \end{cases} \tag{8}$$

строятся струя и вектор $J(t) = \left(L(t), B(t)\right)$, $v(t)$, $t \in [0;\tau]$. Тогда обобщенная производная Шварца для периодической траектории $x(t)$, вычисленная относительно струи $J(t)$ и вектора $v(t)$, имеет вид

$$\operatorname{Sh}\left(x(t), J(t), v(t)\right) = \int\limits_0^\tau \operatorname{Sh}\left(f(x(t), J(t), v(t))\right) dt. \tag{9}$$

2.3. Свойства обобщенной производной Шварца

Основные свойства обобщенной производной Шварца могут быть сформулированы в виде следующих теорем и утверждений [9].

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^3(D)$ векторное поле, имеющее неподвижную точку $x_0 \in D$ такую что*:

1) *Спектр матрицы $f'(x_0)$ содержит чисто мнимое собственное значение κ кратности* 1.
2) *v — собственный вектор матрицы $f'(x_0)$, $J = (L, B)$ — собственная струя поля f в точке x_0, вычисленные относительно собственного значения κ.*
3) $(L, v) = 1$.

Тогда значение обобщенной производной Шварца $\operatorname{Sh}(f(x_0), J, v)$ *не зависит от системы координат.*

Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $\beta \in I$, f_β — однопараметрическое семейство, определенных в $\mathbb{R}^n$, векторных полей, обладающих неподвижной точкой $x_0(\beta)$. Пусть существует значение $\beta_0 \in I$, такое что спектр $\kappa_1(\beta), \dots, \kappa_n(\beta)$ матрицы $f'_\beta(x_0(\beta))$ обладает следующими свойствами: $\operatorname{Re}\kappa_1(\beta_0) = 0$, $\partial/\partial\beta \operatorname{Re}\kappa_1(\beta_0) > 0$, $\kappa_1(\beta) = \kappa_2^*(\beta)$, $\operatorname{Re}\kappa_3(\beta)$, $\dots$, $\operatorname{Re}\kappa_n(\beta) < 0$.

В данном случае при $\beta = \beta_0$ в неподвижной точке $x_0(\beta_0)$ происходит бифуркация Андронова—Хопфа [1, 4, 6, 9, 10, 13]. В окрестности бифурцирующей неподвижной точки $x_0(\beta_0)$ векторное поле сводится к нормальной форме вида [1, 4, 9]

$$\widetilde{f}_{\beta_0}(v, z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 z(1 + \nu_1|z|^2) + o(\|v\|^2) + o(|z|^3) \\ g(z, v) \end{pmatrix},$$

$$v \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

где ν_1 — первая ляпуновская величина. В невырожденном случае, т. е., когда $\nu_1 \neq 0$, мягкость или жесткость рассматриваемой бифуркации определяется значением первой ляпуновской величины ν_1. Если $\operatorname{Re}\nu_1 < 0$ — рассматриваемая бифуркация мягкая, если $\operatorname{Re}\nu_1 > 0$ — жесткая [1, 3, 4, 9, 10].

В силу теоремы 2 вычисление значения первой ляпуновской величины ν_1 может быть сведено к вычислению обобщенной производной Шварца $\operatorname{Sh}(f_{\beta_0}(x_0(\beta_0)), J, v)$.

Теорема 2. *Пусть g — определенное в $\mathbb{R}^n$ векторное поле, обладающие неподвижной точкой $y \in \mathbb{R}^n$,такой что спектр матрицы $g'(y_0)$ содержит чисто мнимое собственное значение κ кратности* 1. *Пусть $J = (L, B)$ — собственная струя векторного поля g в точке y_0 и v — собственный вектор матрицы $g'(y_0)$, соответствующие собственному значению κ.*

Если $(L, v) = 1$, тогда $\operatorname{Sh}(g(y_0), J, v) = 18\nu_1$, где ν_1 — первая ляпуновская величина векторного поля g в точке y_0. Пусть g — определенное в $\mathbb{R}^n$ векторное поле, обладающее периодической траекторией $y(t)$ периода τ, для которой из (6), (7), (8), (9) построены вектор и струя $\bar{v}(t)$, $\bar{J}(t) = \left(\bar{L}(t), \bar{B}(t)\right)$, $t \in [0; \tau]$, тогда обобщенная производная Шварца для периодической траектории $y(t)$, вычисленная относительно струи $\bar{J}(t) = \left(\bar{L}(t), \bar{B}(t)\right)$ и вектора $\bar{v}(t)$, обладает следующим свойством $\forall\, \tau_1, \tau_2 > 0$,

$$\operatorname{Sh}\left(y(t), \bar{J}(t), \bar{v}(t)\right) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau+\tau_1} \operatorname{Sh}\left(g(y(t)), \bar{J}(t)), \bar{v}(t))\right) dt =$$

$$= \int\limits_{\tau_2}^{\tau+\tau_2} \operatorname{Sh}\left(g(y(t)), \bar{J}(t)), \bar{v}(t))\right) dt.$$

Пусть при каждом $\beta \in I$ семейство векторных полей f_β обладает предельным циклом $x(\beta, t)$ периода $\tau(\beta)$. Если существует значение $\beta_1 \in I$, такое что для мультипликаторов $\mu_1(\beta), \ldots, \mu_n(\beta)$ предельного цикла $x(\beta, t)$ верны соотношения:

$$\mu_1(\beta_1) = -1, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}|\mu_1(\beta_1)| > 0, \quad |\mu_2(\beta)|, \ldots, |\mu_n(\beta)| < 1,$$

тогда при $\beta = \beta_1$ происходит бифуркация удвоения периода предельного цикла $x(\beta_1, t)$ [1, 3, 4, 9, 10].

Пусть из (6), (7), (8) для бифурцирующего предельного цикла $x_1(\beta_1, t)$ векторного поля f_{β_1} построены вектор и струя $v(t)$, $J(t) = \big(L(t), B(t)\big)$, $t \in \lfloor 0; \tau(\beta_1) \rfloor$, соответствующие мультипликатору $\mu_1(\beta_1)$ и характеристическому показателю $\chi_1(\beta_1) = Ln(\mu_1(\beta_1))/\tau(\beta_1)$, а также вычислено значение обобщенной производной Шварца $\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_1, t), J(t), v(t)\big)$. В невырожденном случае, т. е., когда

$$\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_1, t), J(t), v(t)\big) \neq 0,$$

решение задачи о мягкости или жесткости данной бифуркации может быть сведено к вычислению значения обобщенной производной Шварца

$$\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_1, t), J(t), v(t)\big) \neq 0.$$

Если

$$\mathrm{Re\ Sh}\,\big(x(\beta_1, t), J(t), v(t)\big) < 0$$

— данная бифуркация мягкая, если

$$\mathrm{Re\ Sh}\,\big(x(\beta_1, t), J(t), v(t)\big) > 0$$

— жесткая.

Если существует значение $\beta_2 \in I$, такое что для мультипликаторов $\mu_1(\beta), \ldots, \mu_n(\beta)$ предельного цикла $x_2(\beta, t)$ семейства векторных полей f_β верны соотношения:

$$|\mu_1(\beta_2)| = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}|\mu_1(\beta_2)| > 0, \quad \mu_1(\beta) = \mu_2^*(\beta), \quad |\mu_3(\beta)|, \ldots, |\mu_n(\beta)| < 1,$$

тогда при $\beta = \beta_2$ происходит бифуркация рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла $x_2(\beta_2, t)$ [1, 3, 4, 10].

Пусть из (6), (7), (8) для бифурцирующего предельного цикла $x_2(\beta_2, t)$ векторного поля f_{β_2} построены вектор и струя $v(t)$, $J(t) = \big(L(t), B(t)\big)$, $t \in \lfloor 0; \tau(\beta_2) \rfloor$, соответствующие мультипликатору $\mu_1(\beta_2)$ и *характерическому показателю $\chi_1(\beta_2) = Ln(\mu_1(\beta_2))/\tau(\beta_2)$, а также вычислено значение обобщенной производной Шварца $\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_2, t), J(t), v(t)\big)$.

В невырожденном случае, т. е., когда $\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_2, t), J(t), v(t)\big) \neq 0$, решение задачи о мягкости или жесткости данной бифуркации может быть сведено к вычислению значения обобщенной производной Шварца $\mathrm{Sh}\,\big(x(\beta_2, t), J(t), v(t)\big)$. Если $\mathrm{Re\ Sh}\,\big(x(\beta_2, t), J(t), v(t)\big) < 0$ — данная бифуркация мягкая, если $\mathrm{Re\ Sh}\,\big(x(\beta_2, t), J(t), v(t)\big) > 0$ — жесткая.

3. Примеры применения обобщенной производной Шварца

3.1. Исследование бифуркационной границы в модели рыночной экономики

Н. А. Магницким и С. В. Сидоровым была предложенная упрощенная модель процесса капитализации рыночной экономики, состоящая из трех обыкновенных дифференциальных уравнений [6]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = bx((1-s)z - py), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1-(1-p)y - sz), \\ \dfrac{dz}{dt} = a(y - cx), \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad a = 7,\ b = 0{,}4,\ c = 1{,}17. \end{cases} \tag{10}$$

При $p \in [0; 0{,}8]$, $s < 1-p$ система (10) обладает неподвижной точкой

$$\left(x_0 = \frac{1-s}{c(1-s-p)}, \quad y_0 = \frac{1-s}{1-s-p}, \quad z_0 = \frac{p}{1-s-p} \right).$$

Пусть f — векторное поле, порождающее фазовый поток системы (10). Тогда первая производная векторного поля f имеет вид

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} b((1-s)z - py) & -bpx & b1-s)x \\ 1-(1-p)y + sz & (p-1)x & sx \\ -aca & 0; & \end{pmatrix}.$$

Для краткости введем обозначение: $f = f(x_0, y_0, z_0)$.

Характеристическое уравнение для матрицы f' имеет вид

$$\varkappa^3 + (1-p)x_0\varkappa^2 + a(bc(1-s) - s)x_0\varkappa + ab(1-s)x_0 = 0. \tag{11}$$

При $p \in [0; p_1]$, $s = 0$, где $p_1 \approx 0{,}688$, корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ уравнения (11) обладают следующими свойствами:

$$\varkappa_1 < 0, \quad \varkappa_2 = \varkappa_3^*, \quad \mathrm{Re}\,\varkappa_2 = 0, \quad \frac{\partial\, \mathrm{Re}\,(\varkappa_2(0))}{\partial s} > 0.$$

Следовательно, при $p \in [0; p_1]$, $s = 0$ в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) системы (10) происходит бифуркация Андронова—Хопфа. Данная бифуркация является жесткой [6], а бифуркационная граница $p \in [0; p_1]$, $s = 0$ является опасной.

Для подтверждения данного факта следует вычислить значения обобщенной производной Шварца векторного поля f в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) при значениях параметров p_i, $i \in \{1, \ldots, 10000\}$, $s = 0$ равномерно распределенных вдоль исследуемой бифуркационной границы. Все вычисленные таким образом значения обобщенной производной Шварца, некоторые из которых приведены в таблице ниже, обладают положительными вещественными частями.

p	κ	Re (Sh)
0,1	1,65i	0,76
0,2	1,74i	0,73
0,3	1,85i	0,66
0,4	1,97i	0,59
0,6	2,136i	0,52
0,65	2,343i	0,44

Следовательно, исследуемая бифуркационная граница является опасной. Обобщенная производная Шварца векторного поля f в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) вычисляется следующим образом:

Пусть $p = p_0$, $p_0 \in [0; p_1]$.

1) Из соотношений $Lf' = \kappa_2 L$, $f'v = \kappa_2 v$, $(L, v) = 1$ вычисляются и нормируются левый и правый собственные векторы матрицы f'.
2) Из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 2f'_{1,1} - \kappa_2 & 2f'_{2,1} & 2f'_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ f'_{1,2} & f'_{1,1} + f'_{2,2} - \kappa_2 & f'_{3,2} & f'_{2,1} & f'_{3,1} & 0 \\ f'_{1,3} & f'_{2,3} & f'_{1,1} + f'_{3,3} - \kappa_2 & 0 & f'_{2,1} & f'_{3,1} \\ 0 & 2f'_{1,2} & 0 & 2f'_{2,2} - \kappa_2 & 2f'_{3,2} & 0 \\ 0 & f'_{1,3} & f'_{1,2} & f'_{2,3} & f'_{2,2} - \kappa_2 & f'_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2f'_{2,3} & -\kappa_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{1,2} \\ B_{1,3} \\ B_{2,2} \\ B_{2,3} \\ B_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -bpL_1 + (p-1)L_2 \\ b(1-s)L_1 + sL_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

являющейся конкретизацией (3) для (10), вычисляются коэффициенты квадратичной формы B.

3) Пусть

$$S(i,j,k) = 3\sum_{i_1,i_2}(B_{i,i_1}L_{i_2} - L_iB_{i_1,i_2})T^{j,k,i_1,i_2}(v).$$

Согласно (4) обобщенная производная Шварца векторного поля f, вычисленная в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) относительно струи $J = (L, B)$ и вектора v, имеет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh}(f(x_0,y_0,z_0),J,v) = {}& -bpS(1,1,2) + b(1-s)S(1,1,3) + \\ & + bpS(1,2,1) + b(1-s)S(1,3,1) + \\ & + (p-1)S(2,1,2) + sS(2,1,3) + \\ & + (p-1)S(2,2,1) + sS(2,3,1).\end{aligned}$$

3.2. Исследование типа бифуркации Андронова—Хопфа для системы Лоренца

Сальцман [15] предложил следующую упрощенную модель конвекции в идеальной жидкости, состоящую из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dy} = \sigma(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz, \\ x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r > 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Обнаруженные Лоренцем [14] некоторые сложные свойства системы (12) обусловили то, что данная система до настоящего момента остается предметом многочисленных исследований [4, 6, 8, 10, 17, 18]. В [10] приведены исследования условий устойчивости неподвижной

$$x_0 = \sqrt{b(r-1)}, \quad y_0 = \sqrt{b(r-1)}, \quad z_0 = r - 1$$

системы (12).

Первая производная векторного поля f, порождающего фазовый поток системы (12) имеет вид

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Для краткости обозначим $f' = f'(x_0, y_0, z_0)$. Характеристическое уравнение для матрицы f' имеет вид

$$\kappa^3 + (\sigma + b + 1)\kappa^2 + b(r+\sigma)\kappa + 2\sigma b(r-1) = 0. \tag{13}$$

При $r \geqslant 1$ уравнение (13) обладает тремя корнями $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, такими что $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_3^* = \varkappa_2$, $\operatorname{Re}\varkappa_2(r_0) = 0$, $\partial/\partial r \operatorname{Re}(\varkappa_2(r_0)) > 0$, где

$$r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} = \frac{470}{19} \approx 24{,}7368.$$

Следовательно, при $r = r_0$ в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) системы (12) происходит бифуркация Андронова—Хопфа. Данная бифуркация является жесткой [3, 8, 10]. Для подтверждения данного факта следует вычислить соответствующее значение обобщенной производной Шварца. Обобщенная производная Шварца векторного поля f в неподвижной точке (x_0, y_0, z_0) вычисляется следующим образом:

1) Из соотношений: $\varkappa_2 L = Lf'$, $\varkappa_2 v = f'v$, $(L, v) = 1$ находятся и нормируются левый и правый собственные векторы матрицы f'.

$$L \approx \begin{pmatrix} -0{,}177 - 0{,}282i \\ -0{,}748 - 0{,}069i \\ 0{,}212 - 0{,}56i \end{pmatrix}^T, \quad v \approx \begin{pmatrix} 0{,}21 \;\; - 0{,}356i \\ 0{,}553 - 0{,}153i \\ -0{,}228 - 0{,}694i \end{pmatrix}.$$

2) Из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 2f'_{1,1} - \varkappa_2 & 2f'_{2,1} & 2f'_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ f'_{1,2} & f'_{1,1} + f'_{2,2} - \varkappa_2 & f'_{3,2} & f'_{2,1} & f'_{3,1} & 0 \\ f'_{1,3} & f'_{2,3} & f'_{1,1} + f'_{3,3} - \varkappa_2 & 0 & f'_{2,1} & f'_{3,1} \\ 0 & 2f'_{1,2} & 0 & 2f'_{2,2} - \varkappa_2 & 2f'_{3,2} & 0 \\ 0 & f'_{1,3} & f'_{1,2} & f'_{2,3} & f'_{2,2} + f'_{3,3} - \varkappa_2 & f'_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2f'_{2,3} & 2f'_{3,3} - \varkappa_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{1,2} \\ B_{1,3} \\ B_{2,2} \\ B_{2,3} \\ B_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L_3 \\ L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

являющейся конкретизацией (3) для системы (12), находятся коэффициенты квадратичной формы B.

$$\begin{cases} B_{1,1} \approx 0{,}003 - 0{,}022i,\ B_{1,2} \approx 0{,}015 - 0{,}004i,\ B_{1,3} \approx 0{,}007 - 0{,}03i, \\ B_{2,2} \approx 0{,}028 - 0{,}071i,\ B_{2,3} \approx 0{,}046 - 0{,}008i,\ B_{3,3} \approx 0{,}03 + 0{,}026i. \end{cases}$$

3) Пусть

$$S(i, j, k) = 3 \sum_{i_1, i_2} (B_{i,i_1} L_{i_2} - L_i B_{i_1,i_2}) T^{j,k,i_1,i_2}(v).$$

Тогда в силу (4) обобщенная производная Шварца векторного поля f, вычисленная в точке (x_0, y_0, z_0) относительно струи $J = (L, B)$ и вектора v, имеет вид

$$\mathrm{Sh}\,(f(x_0, y_0, z_0), J, v) = S(3,1,2) + S(3,2,1) - S(2,1,3) - S(2,3,1) \approx \\ \approx 0{,}737 + 0{,}017i.$$

Таким образом, рассматриваемая бифуркация жесткая.

3.3. Исследование бифуркации удвоения периода предельного цикла для системы Лоренца

При изменении значения параметра r в границах системы из нескольких ограниченных интервалов происходит каскад бифуркаций удвоения периодов предельных циклов системы (12) [17]. В частности, при $r = r_1 \approx 148{,}677$ происходит бифуркация удвоения периода предельного цикла, состоящая в том, что предельный цикл $(x(t), y(t), z(t))$ системы (12), имеющий период $\tau \approx 1{,}2$, такой что $x(0) = x_0 = 0$, $y(0) = y_0 \approx 37{,}18$, $z(0) = z_0 \approx 137{,}56$, теряет устойчивость, и рождается устойчивый предельный цикл $(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t), \widetilde{z}(t))$, имеющий период 2τ.

Для решения задачи о мягкости или жесткости рассматриваемой бифуркации следует вычислить значение обобщенной производной Шварца для бифурцирующего предельного цикла $(x(t), y(t), z(t))$. Обобщенная производная Шварца для предельного цикла $(x(t), y(t), z(t))$ вычисляется следующим образом:

Пусть $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, где f — векторное поле, порождающее фазовый поток системы (12).

1) Из уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z(t) & -1 & -x(t) \\ y(t) & x(t) & -b \end{pmatrix} \Phi(t),$$

являющегося конкретизацией (5) для системы (12), строится фундаментальная матрица $\Phi = \Phi(\tau)$ для предельного цикла $(x(t), y(t), z(t))$. Решая последнее уравнение методом Рунге—Кутта первого порядка [2] с шагом $\triangle t{=}10^{-5}$ получаем

$$\Phi = \Phi(\tau) = \begin{pmatrix} -8{,}1955 & 5{,}8782 & -9{,}9203 \\ 9{,}2063 & -5{,}1054 & 9{,}9514 \\ 11{,}3428 & -7{,}5491 & 13{,}2631 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, предельный цикл $(x(t), y(t), z(t))$ обладает следующими мультипликаторами:

$$\mu_1 \approx 10^{-8}, \quad \mu_2 \approx -1{,}03, \quad \mu_3 \approx 0{,}99$$

и характеристическими показателями:

$$\chi_1 \approx -15{,}3, \quad \chi_2 \approx 0{,}02 + 2{,}6i, \quad \chi_3 \approx 0{,}008.$$

2) Из соотношений $L^0\Phi = \mu_2 L^0$, $\Phi v^0 = \mu_2 v^0$, $(L^0, v^0) = 1$ вычисляются и нормируются левый и правый собственные векторы матрицы Φ:

$$L^0 = \begin{pmatrix} 3{,}22 \\ -1{,}74 \\ 3{,}45 \end{pmatrix}^T, \quad v^0 = \begin{pmatrix} -2{,}48 \\ 2{,}75 \\ 3{,}42 \end{pmatrix}.$$

3) Из системы линейных уравнений, являющейся конкретизацией (7) для системы (12), находятся коэффициенты квадратичной формы B^0:

$$\begin{cases} B^0_{1,1} \approx -0{,}96 + 0{,}21i, & B^0_{1,2} \approx -1{,}12 + 2{,}56i, \quad B^0_{1,3} \approx -0{,}254 + 0{,}09i, \\ B^0_{2,2} \approx 0, & B^0_{2,3} \approx -0{,}338 + 0{,}488i, \quad B^0_{3,3} \approx 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2g'(0)_{1,1} - \chi_2 & 2g'(0)_{2,1} & 2g'(0)_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ g'(0)_{1,2} & g'(0)_{1,1} + g'(0)_{2,1} - \chi_2 & g'(0)_{3,1} & g'(0)_{2,1} & g'(0)_{3,2} & 0 \\ g'(0)_{1,3} & g'(0)_{2,1} & g'(0)_{1,1} + g'(0)_{3,1} - \chi_2 & 0 & g'(0)_{2,1} & g'(0)_{3,1} \\ 0 & g'(0)_{1,2} & 0 & 2g'(0)_{2,2} - \chi_2 & 2g'(0)_{2,3} & 0 \\ 0 & g'(0)_{1,2} & g'(0)_{1,2} & g'(0)_{2,2} & g'(0)_{2,2} + g'(0)_{3,2} - \chi_2 & g'(0)_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2g'(0)_{2,3} & 2g'(0)_{2,3} - \chi_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} B^0_{1,1} \\ B^0_{1,2} \\ B^0_{1,3} \\ B^0_{2,2} \\ B^0_{2,3} \\ B^0_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L^0_3 \\ L^0_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

являющейся конкретизацией (7) для системы (12), находятся коэффициенты квадратичной формы B^0:

$$\begin{cases} B^0_{1,1} \approx -0{,}96 + 0{,}21i, & B^0_{1,2} \approx -1{,}12 + 2{,}56i, \quad B^0_{1,3} \approx -0{,}25 + 0{,}09i, \\ B^0_{2,2} \approx 0, & B^0_{2,3} \approx 0{,}33 + 0{,}48i, \quad B^0_{3,3} \approx 0. \end{cases}$$

Таким образом построена струя $J^0 = (L^0, B^0)$.

4) Из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} B_{1,1}(t) \\ B_{1,2}(t) \\ B_{1,3}(t) \\ B_{2,2}(t) \\ B_{2,3}(t) \\ B_{3,3}(t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}
\chi_2 - 2g'_{1,1}(t) & -2g'_{2,1}(t) & -2g'_{3,1}(t) & 0 & -g'_{3,1}(t) & 0 \\
0 & \chi_2 - g'_{1,1}(t) - g'_{1,2}(t) + g'_{2,2}(t) & -g'_{3,2}(t) & g'_{2,1}(t) & g'_{3,1}(t) & 0 \\
0 & g'_{2,3}(t) & \chi_2 - g'_{1,1}(t) + g'_{3,3}(t) & 0 & g'_{1,1}(t) & g'_{3,1}(t) \\
0 & -2g'_{1,2}(t) & 0 & \chi_2 - 2g'_{2,2}(t) & -2g'_{3,2}(t) & 0 \\
0 & 0 & -g'_{1,2}(t) & -g'_{2,3}(t) & \chi_2 - g'_{3,3}(t) - g'_{3,2}(t) & g'_{3,2}(t) \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2g'_{3,3}(t) & \chi_2 - 2g'_{3,3}(t)
\end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} B_{1,1}(t) \\ B_{1,2}(t) \\ B_{1,3}(t) \\ B_{2,2}(t) \\ B_{2,3}(t) \\ B_{3,3}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt} L(t) = -L(t)g'(t), \quad \frac{d}{dt} v(t) = g'(t)v(t), \quad B(0) = B^0, \quad , L(0) = L^0, \quad v(0) = v^0,
\end{aligned}
\right.
$$

являющихся конкретизацией (8) для системы (12), строится струя $J(t) = \big(L(t), B(t)\big)$, а также вектор при $t \in [0; \tau]$.

5) Обобщенная производная Шварца для бифурцирующего предельного цикла $(x(t), y(t), z(t))$ имеет вид

$$\mathrm{Sh}\,(x(t), y(t), z(t), J(t), v(t)) = \int\limits_0^\tau \mathrm{Sh}\,(f(x(t), y(t), z(t)), J(t), v(t))\, dt.$$

Для приближенного вычисления значения обобщенной производной Шварца следует воспользоваться тем, что

$$\int\limits_0^\tau \mathrm{Sh}\,(f(x(t), y(t), z(t)), J(t), v(t))\, dt \approx$$
$$\approx \frac{\tau}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Sh}\,(x(t_k), y(t_k), z(t_k), J(t_k), v(t_k)) \approx -2{,}63 + 5{,}49i,$$

где

$$\operatorname{Sh}\left(x(t_k), y(t_k), z(t_k), J(t_k), v(t_k)\right) = S(t_k, 3, 1, 2) + S(t_k, 3, 2, 1) - \\ - S(t_k, 2, 1, 3) - S(t_k, 2, 3, 1),$$

$$S(t_k, i, j, k) = 2 \sum_{i_1, i_2} \left(B_{i,i_1}(t_k) L_{i_2}(t_k) - L_i(t_k) B_{i_1,i_2}(t_k)\right) T^{j,k,i_1,i_2}(v(t_k)).$$

Таким образом, исследуемая бифуркация мягкая.

3.4. Исследование бифуркации рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла в системе из двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля

В [11] рассмотрена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = z - 2x + au(1 - x^2), \quad \dfrac{dw}{dt} = z - 2y + aw(1 - y^2), \\ \dfrac{dx}{dt} = u, \quad \dfrac{dy}{dt} = w, \quad \dfrac{dz}{dt} = x + y - 2, \end{cases} \tag{14}$$

описывающая динамику колебательной системы, состоящей из двух Ван-дер-Полевских осцилляторов. Установлено, что при $k = 1$, $a \approx 1{,}07$ происходит бифуркация рождения инвариантного тора из неустойчивого предельного цикла системы (14). Для решения задачи о мягкости или жесткости данной бифуркации следует вычислить обобщенную производную Шварца бифурцирующего предельного цикла системы (14). Пусть $(u(t), w(t), x(t), y(t), z(t))$ — бифурцирующий предельный цикл, периода $\tau \approx 5{,}7$, такой что:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \approx -0{,}51, \quad w(0) = w_0 \approx -0{,}633, \quad x(0) = x_0 \approx 1{,}611, \\ y(0) = y_0 \approx 1{,}268, \quad z(0) = z_0 \approx 1{,}34. \end{cases}$$

1) Из уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \\ = \begin{pmatrix} a\left(1 - x^2(t)\right) & 0 & -2\left(1 + 2au(t)x(t)\right) & 0 & -1 \\ 0 & a\left(1 - y^2(t)\right) & 0 & -2\left(1 + 2aw(t)y(t)\right) & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Phi(t),$$

являющегося конкретизацией уравнения (5) для системы (14), строится фундаментальная матрица $\Phi = \Phi(t)$ бифурцирующего предельного цикла $(u(t), w(t), x(t), y(t), z(t))$

$$\Phi = \Phi(t) \approx \begin{pmatrix} 0{,}389 & 0{,}233 & 0{,}561 & 0{,}482 & 0{,}178 \\ -0{,}095 & 0{,}888 & 0{,}134 & 0{,}38 & 0{,}259 \\ 0{,}412 & -0{,}273 & 0{,}542 & 0{,}002 & 0{,}045 \\ 0{,}433 & 1{,}056 & -0{,}43 & 0{,}659 & 0{,}17 \\ -0{,}167 & -0{,}023 & -0{,}263 & -0{,}041 & -0{,}065 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, предельный цикл $(u(t), w(t), x(t), y(t), z(t))$ обладает следующими мультипликаторами:

$$\mu_1 \approx 1{,}047 + 0{,}026i, \quad \mu_2 \approx 1{,}047 - 0{,}026i, \quad \mu_3 \approx 0{,}315,$$
$$\mu_4 \approx 0{,}003, \quad \mu_5 \approx 0{,}0004;$$

и характеристическими показателями:

$$\chi_1 \approx 0{,}008 + 0{,}004i, \quad \chi_2 \approx 0{,}008 - 0{,}004i, \quad \chi_3 \approx -0{,}203,$$
$$\chi_4 \approx -1{,}019, \quad \chi_5 \approx -1{,}373.$$

2) Из соотношений $\mu_1 L^0 = L^0\Phi$, $\mu_1 v^0 = \Phi v^0$, $(L^0, v^0) = 1$ находятся левый и правый собственные векторы матрицы Φ.

3) Из системы линейных уравнений, являющейся конкретизацией (7) для системы (14), следует вычислить коэффициенты квадратичной формы B^0.

$$\begin{cases} B^0_{1,1} = 0,\ B^0_{1,2} = 0,\ B^0_{1,3} = 0,\ B^0_{1,4} \approx 2 - 0{,}046i,\ B^0_{1,5} = 0,\ B^0_{2,5} = 0, \\ B^0_{2,3} = 0,\ B^0_{2,4} = 0,\ B^0_{2,5} = 1{,}186 - 0{,}21i, \\ B^0_{3,3} = 0,\ B^0_{3,4} = 0,\ B^0_{3,5} = 0,\ B^0_{4,4} = 0,\ B^0_{4,5} = 0,\ B^0_{5,5} = 0. \end{cases}$$

Из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся конкретизацией (8) для системы (13), строится вектор $v(t)$ и струя $J(t) = \big(L(t), B(t)\big)$ при $t \in [0; \tau]$.

Для численного решения последней системы, её следует дополнить начальными условиями $L(0) = L^0$, $v(0) = v^0$, $B(0) = B^0$ и уравнениями (13). Решая полученную систему методом Рунге—Кутта первого порядка с шагом $\triangle\, t = 10^{-5}$, следует вычислить приближенные значения

$$\{J(t_k) = (L(t_k), B(t_k))\}, \quad \{v(t_k)\}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}, \quad n \triangle t = \tau.$$

Обобщенная производная Шварца для бифурцирующего предельного цикла $(u(t), w(t), x(t), y(t), z(t))$ вычисленная относительно струи $J(t)$

и вектора $v(t)$ имеет вид

$$\mathrm{Sh}\,(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t), J(t), v(t)) =$$

$$= \int_0^T \mathrm{Sh}\,(f(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)), J(t), v(t))\,dt \approx -5{,}12 - 8{,}41i,$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sh}\,(f(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)), J(t), v(t)) = x(t)V(t, 1, 1, 3) + \\
&\quad + V(t, 1, 3, 1) + u(t)V(1, 1, 3) + V(t, 1, 3, 1) + u(t)V(t, 1, 3, 3) + \\
&\quad + y(t)V(t, 2, 2, 4) + V(t, 2, 4, 2) + w(t)V(t, 2, 4, 4) + \\
&\quad + U(t, 1, 1, 3, 3) + U(t, 1, 3, 1, 3) + U(t, 1, 3, 3, 1) + \\
&\quad + U(t, 2, 2, 4, 4) + U(t, 2, 4, 2, 4) + U(t, 2, 4, 4, 2) + \\
&\quad + V(t, 1, 3, 3) + y(t)V(t, 2, 2, 4) + V(t, 2, 4, 2) + \\
&\quad + w(t)V(t, 2, 4, 4) + U(t, 1, 1, 3, 3) + U(t, 1, 3, 1, 3) + \\
&\quad + U(t, 1, 3, 3, 1) + U(t, 2, 2, 4, 4) + U(t, 2, 4, 2, 4) + \\
&\quad + U(t, 2, 4, 4, 2) + U(t, i, j, k, m) = \sum_l L_k(t)L_l(t)T(v(t))^{j,k,m,l},
\end{aligned}$$

$$V(i, m, n) = -6\sum_k \big(B_{i,j}(t)L_k(t) - L_i(t)B_{j,k}(t)\big)T(v(t))^{i,j,m,n}.$$

Таким образом, исследуемая бифуркация мягкая.

Благодарности

Выражаю благодарность Е. А. Сатаеву за постановку задачи, решение которой легло в основу данной работы, а также Н. А. Магницкому, обратившему мое внимание на задачу, рассмотренную в п. 3.1. настоящей работы.

Литература

1. *Арнольд В. И.*, *Афраймович В. С.*, *Ильяшенко Ю. С.*, *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Динамические системы-5. ВИНИТИ, 1986.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
3. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1983.
4. *Гукенхеймер Дж.*, *Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М., Ижевск, ИКИ, 2002.

5. *Гурвиц А.*, *Курант Г.* Теория функций. М.: Мир, 1965.
6. *Магницкий Н. А.*, *Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004.
7. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: URSS, 2003.
8. *Рощин Н. В.* Опасные границы устойчивости в модели Лоренца // Прикл. матем. и мех. 1978. Вып. 5. С. 950–952.
9. *Сатаев Е. А.* Производная Шварца для многомерных отображений и потоков // Мат. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 139–160.
10. *Марсден Д.*, *Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1982.
11. *Camacho E.*, *Rand R.*, *Howland W.* Dynamics of two Van der Pol oscilatolrs coupled via a bath // International Journal of solids and structures. V. 41(2044) P. 2132–2142.
12. *Guckenheimer J.* Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps // Comm. Math. Phys. 1979. 70. P. 165–179.
13. *Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differential systems // Ber. Math-Phys. sachsische Academie der Wissenschaften. Leipzig. 1942. 94. P. 1–22.
14. *Lorenz E.* Deterministic non-periodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. 20. P. 130–141.
15. *Saltzman B.* Finite amplitude-free convection as a initial value problem // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19. P. 329–343.
16. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // Slam journal of applied math. 1978. V. 35. P. 260–268.
17. *Sparrow C.* The Lorenz equations. Springer-Verlag. 1982.
18. *Viana M.* What's new on Lorenz strange attractors? // Math. Intelligencer. 2000. 22-3. P. 6–19.