

---

# IV. Моделирование физических и динамических систем

---

**Агуреев И. Е.**

Институт системного анализа РАН, Москва

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФЕЙГЕНБАУМА—ШАРКОВСКОГО—МАГНИЦКОГО ДЛЯ АНАЛИЗА МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ АВТОМОБИЛЬНЫХ ПЕРЕВОЗЧИКОВ

В статье рассматривается вариант динамической модели конкуренции двух автомобильных перевозчиков в виде автономной диссипативной системы. Исследованы условия равновесия особых точек, приведены решения в виде предельных циклов и нерегулярных аттракторов. Рассмотрена экономическая интерпретация влияния параметров на условия равновесия и возможность существования оптимальных игровых стратегий.

Показано, что сценарии перехода к хаосу соответствуют классическим каскадам бифуркаций удвоения периода, а также субгармоническим и гомоклиническим каскадам.

Установлена связь между типом особых точек и структурой элементарных нерегулярных аттракторов типа Ресслера, описана их типология.

Найдены решения в виде контрастных структур, обладающих свойствами аттрактора и названных *контрастными аттракторами*, а также описан конкретный механизм их возникновения, обусловленный структурой фазового пространства. Предложено объяснение таких явлений как «жесткая турбулентность» и «переключающая перемежаемость» с помощью понятия контрастной структуры.

### 1. Постановка задачи

Динамическая модель конкуренции может быть сформулирована в виде:

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad \text{или} \quad \dot{x} = F(x, t, \mu),$$

где  $x \in M \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in L \subset \mathbb{R}^k$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Если в качестве переменных модели выбрать  $x$  — увеличение затрат перевозчика (игрока) «1» на организацию и повышение качества перевозочного процесса (реклама, информация, маркетинговые исследования, техническое состояние подвижного состава и др.),  $y$  — то же, для перевозчика «2»,  $z$  — увеличение количества груза, доставленного потребителю перевозчиком «1», то один из возможных вариантов модели конкуренции может быть записан в виде системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay(Z - z) - bz(x - X), \\ \dot{y} &= cxz - d(Z - z)(y - Y), \\ \dot{z} &= e(x - y).\end{aligned}\tag{1}$$

Система представляет собой выражение стратегий двух игроков рынка, записанное в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое из них является уравнением динамического баланса типа  $\dot{x} = P - R$ , где в общем случае  $P = P(t, x)$  — источник, а  $R = R(t, x)$  — потери изучаемой величины  $x$ .

Первое слагаемое  $ay(Z - z)$  выражает стремление игрока (перевозчика «1») увеличить затраты ресурсов (в итоге — увеличить объем своих рыночных предложений), если конкурент увеличивает свои. Поэтому слагаемое пропорционально переменной  $y$ . Множитель  $(Z - z)$  выражает запас спроса на услуги со стороны потребителя. Коэффициент  $a$  учитывает степень информированности игрока «1» о стратегии игрока «2» и о спросе на услуги перевозчиков. Параметр  $Z$  следует понимать как максимальную величину спроса потребителя.

Второе слагаемое  $bz(x - X)$  выражает стремление игрока «1» использовать свои ресурсы с максимальной отдачей. Величина  $X$  есть некоторый допустимый предел увеличения расходования ресурсов на повышение качества услуг и рекламу. Если  $x < X$  (есть возможность наращивать объем предложения), слагаемое при  $z > 0$  имеет знак «+» и смысл источника величины  $x$ . Если  $x > X$ , игрок вынужден сокращать использование ресурсов. Слагаемое пропорционально  $z$ , так как при высоком уровне  $z$  игрок «1» может позволить себе интенсивнее сокращать использование ресурсов на увеличение предложения. Коэффициент  $b$  отражает представление игрока «1» о необходимости такого сокращения.

Аналогично формулируется второе уравнение (1). Смысл третьего уравнения очевиден.

Рассматриваемая нами задача может интерпретироваться как разновидность динамического описания поведения рынка с тремя игроками. Одной из известных моделей динамики рынка являются уравнения Вальбраса—Маршалла. Согласно [1], уравнение Вальбраса, описывающее динамику рыночной цены товара  $P(t)$ , имеет вид линейного дифференциального уравнения первого порядка для функции  $P(t)$  с запаздывающим

аргументом. При этом возможен как аperiodический переход  $P(t)$  к равновесному значению, когда точка равновесия является устойчивым узлом, так и затухающие колебания, когда она оказывается устойчивым фокусом. Автор предлагает модифицированные модели Вальраса—Маршалла в виде двух- и трехмерных линейных систем, рассматривает возможности оптимального управления при переходе рынка к равновесию, показывает выгодность скорейшего установления равновесия для поставщиков товара.

Обычной математической основой при моделировании конкуренции является теория игр. В. В. Обуховский [2] рассматривает вопросы, связанные с существованием равновесных стратегий, используя для этого теорему Какутани о неподвижной точке многозначных отображений, а также показывает возможность применения этой теоремы для децентрализованных экономических систем, участники которых не обладают сведениями о поведении других игроков. При этом существующая система цен  $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ , согласно предположению Вальраса, приводит к ситуации конкурентного равновесия, если участники рынка выполняют определенные требования.

Известны и другие модели, например, задача о конкуренции видов транспорта, которая представляет собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. В монографии А. А. Смехова [4] приведены некоторые задачи о конкуренции автомобильного и железнодорожного видов транспорта, где фактором конкуренции являлись затраты игроков на рекламу и улучшение сервиса. Задачи формулировались в стационарной постановке. В работе [5] предложена динамическая модель конкуренции двух фирм, производящих взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Фазовыми координатами являются оборотные средства конкурентов. В модели (1) в качестве переменных использованы затраты. На наш взгляд, последние более точно соответствуют понятию «игровая стратегия», так как непосредственно связаны с управляющими действиями (принимаемыми решениями). Модель можно отнести к классу поведенческих.

Запишем условие диссипативности системы (1), которое представляет собой неравенство

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = z(d - b) - dZ < 0. \quad (2)$$

Таким образом, рассматриваемая система, подобно модели Ресслера [6], не является всюду диссипативной в фазовом пространстве. Неравенство (2) означает, что точка фазовой траектории принадлежит области диссипативности, если ее координата  $z < dZ/(d-b)$  при  $d > b$  и  $z > dZ/(d-b)$  при  $d < b$ .

Перепишем уравнения (1) в явном виде относительно переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 y + k_2 z - k_3 x z - k_4 y z, \\ \dot{y} &= -k_5 y - k_6 z + k_7 x z + k_8 y z + k_9, \\ \dot{z} &= k_{10} x - k_{11} y. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_1 &= aZ, & k_6 &= dY, \\ k_2 &= bX, & k_7 &= c, \\ k_3 &= b, & k_8 &= d, \\ k_4 &= a, & k_9 &= dYZ, \\ k_5 &= dZ, & k_{10} &= k_{11} = e. \end{aligned}$$

При этом все координаты параметрического пространства  $\mu$  считаем неотрицательными, за исключением  $e$ . Отрицательные значения  $e$  могут означать такое поведение клиента (потребителя перевозок), выражаемое динамической переменной  $z$ , когда принимаемые им решения противоположны реальной разнице  $x$  и  $y$ .

Две особые точки системы (3) существуют при условии  $\delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ :

$$x_{1,2}^* = y_{1,2}^* = -\frac{(Bz_{1,2}^* + k_9)}{A}; \quad z_{1,2}^* = \left( -\beta \pm \frac{\sqrt{\delta}}{2\alpha} \right), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= k_1C - k_5, & \alpha &= \frac{(k_3 + k_4)B}{A}, \\ B &= k_2C - k_6, & \beta &= \frac{k_2 - k_1B}{A} + k_9 \frac{(k_3 + k_4)}{A}, \\ C &= \frac{(k_7 + k_8)}{(k_3 + k_4)}, & \gamma &= -\frac{k_1k_9}{A}. \end{aligned}$$

Очевидно, должны выполняться условия  $A \neq 0$  и  $B \neq 0$ . Случаи  $\delta \leq 0$ ,  $A = 0$ ,  $B = 0$  требуют отдельного рассмотрения и в настоящей статье не исследуются.

Состояние равновесия особых точек определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 - (\eta + \nu)\lambda^2 + (\eta\nu - \kappa\xi + e\chi - e\rho)\lambda + e(\kappa\rho - \nu\chi - \xi\chi + \eta\rho) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta &= k_8z^* - k_5, & \xi &= k_1 - k_4z^*, \\ \nu &= -k_3z^*, & \rho &= k_2 - k_3x^* - k_4y^*, \\ \kappa &= k_7z^*, & \chi &= k_7x^* + k_8y^* - k_6. \end{aligned}$$

Устойчивость особых точек (4) определяем из условия Рауса—Гурвица для многочлена (5):

$$-(\eta + \nu) > 0; \quad -(\eta + \nu)(\eta\nu - \kappa\xi + e\chi - e\rho) > e(\kappa\rho - \nu\chi - \xi\chi + \eta\rho) > 0. \quad (6)$$

Отметим, что уравнения (3) обладают симметрией относительно преобразования  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$ ,  $z \rightarrow (Z - z)$ . При этом для получения

полностью симметричного решения достаточно сделать перестановку коэффициентов  $\{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ ,  $X \rightarrow Y$ . С точки зрения смысла задачи такая симметрия является необходимой, так как не вводилось специального предпочтения при выборе перевозчика «1» или «2».

Кроме этого, преобразование растяжения  $x = pu$ ,  $y = qv$ ,  $z = rw$ , где  $p = (eb)^{-1}$ ,  $q = (ea)^{-1}$ ,  $r = b^{-1}$ , позволяет привести систему (1) к эквивалентной

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v(\tilde{Z} - w) - w(u - \tilde{X}), \\ \dot{v} &= \tilde{c}uw - \tilde{d}(\tilde{Z} - w)(v - \tilde{Y}), \\ \dot{w} &= u - \tilde{f}v, \end{aligned} \quad (7)$$

которая имеет размерность параметрического пространства  $\tilde{k} = 6$  против  $k = 8$  у исходной. Это существенно упрощает анализ системы (1). Формулы для расчета параметров системы (7) имеют вид:

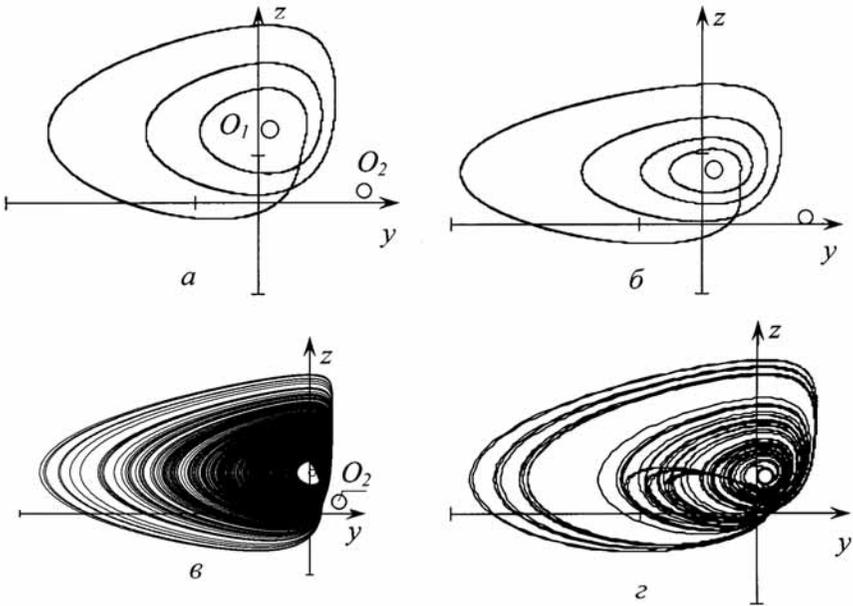
$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \frac{ca}{b^2}; & \tilde{f} &= \frac{b}{a}; & \tilde{Y} &= Yea; \\ \tilde{d} &= \frac{d}{b}; & \tilde{X} &= Xeb; & \tilde{Z} &= Zb. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее мы будем работать с системой (1) просто полагая  $a = 1$ ,  $e = 1$  или  $a = 1$ ,  $e = -1$ , поскольку согласно формулам (8) два параметра можно выбрать произвольно. Таким образом, одному варианту набора параметров системы (7) соответствует бесконечное число наборов параметров системы (1), дающих пропорциональные решения.

## 2. Исследование модели конкуренции

Вследствие достаточно высокой размерности параметрического пространства говорить в настоящее время о законченном исследовании системы не представляется возможным. Более перспективным является получение всех возможных видов аттракторов и выяснение связи корней уравнения (5) со структурой аттракторов.

В основе подхода при исследовании системы лежат результаты, полученные Н. А. Магницким и С. В. Сидоровым [6], представляющие собой развитие теорий Фейгенбаума и Шарковского, названное как ФШМ-теория [7]. Исследование выполнялось численно методом Рунге—Кутты 4-го порядка с точностью  $1 \cdot 10^{-6}$ . Рассмотрим вариант 1 системы (1), приняв параметры в соответствие с табл. 1. Здесь наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, если в качестве бифуркационного выбрать параметр  $d$ . Например, при  $d = 0,625$  имеем устойчивый предельный цикл (окно периодичности  $d \in (0,190101; 1,331)$ ), при  $d \in (1,331; 1,881)$  — цикл периода 2, при  $d \in (1,881; 1,947)$  — цикл периода 4 и т. д. Последующий субгармонический каскад бифуркаций аттрактора Фейгенбаума



**Рис. 1.** Проекция аттрактора системы (1) на фазовую плоскость ( $yOz$ ):  
 а)  $d = 2,115121$ ; б)  $d = 2,214354$ ; в)  $d = 2,293421$ ; г)  $b = 6,2$  (вариант 2)

приводит в соответствии с порядком Шарковского к циклу периода 3 при  $d = 2,115121$  (рис. 1 а).

Дальнейшее увеличение  $d$  ведет к гомоклиническому каскаду (по терминологии Н. А. Магницкого [6] гомоклиническим называется каскад бифуркаций, являющийся продолжением порядка Шарковского и заключающийся в многостадийном появлении устойчивых циклов типа  $C_n$ , где  $n$  — номер стадии, приближающихся к гомоклиническому контуру и претерпевающих собственные субгармонические каскады бифуркаций). На рис. 1 б приведено решение в виде цикла  $C_4$  гомоклинического каскада. При  $d \approx 2,293421$  «глаз» аттрактора закрывается не полностью (рис. 1 в), а затем аттрактор теряет устойчивость и разрушается. Таким образом, в системе наблюдается неполный гомоклинический каскад. В варианте 2 (см. табл. 1) реализуется полный гомоклинический каскад, происходит изменение структуры аттрактора, усложнение траектории, совершающей затухающие колебания вокруг некоторой осевой линии и затем входящей в «глаз» аттрактора (см. рис. 1 г), который располагается на многолистной поверхности. Это легко заметить с помощью сечений Пуанкаре, например, плоскостью  $y = -100$  при  $b = 4$  (рис. 2 а) и плоскостью  $y = -200$  при  $b = 6,2$  (рис. 2 б). Полный набор проекций полученного для варианта 2 решения приведен на рис. 3.

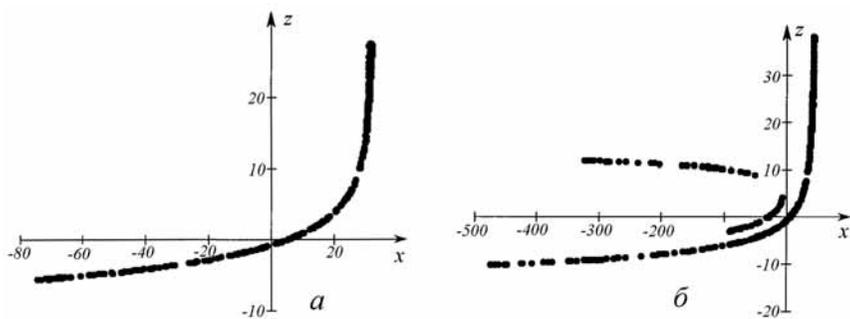


Рис. 2. Сечения Пуанкаре для варианта 2

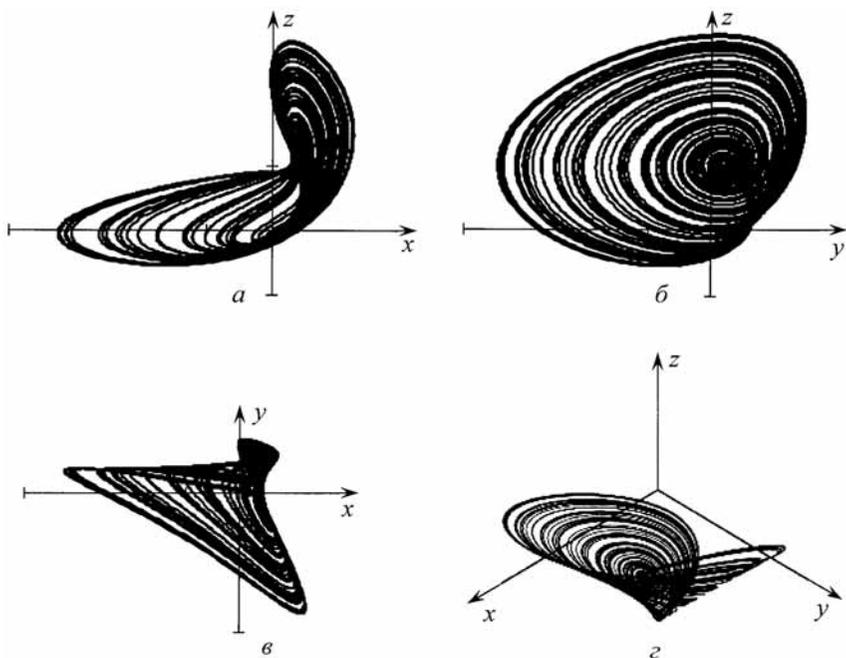


Рис. 3. Проекция аттрактора типа 1 на фазовые плоскости (вариант 2)

Если параметры системы выбрать согласно варианту 3 (см. табл. 1), то получим аттрактор, симметричный по отношению к аттрактору 1-го варианта (предельный цикл). Аналогично расположено в пространстве и решение варианта 4 (рис. 4 *a–г*), являющееся результатом соответствующей последовательности бифуркаций сингулярного цикла. Сингулярным

Таблица 1

Параметры модели (1)

№ вар.	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$X$	$Y$	$Z$	тип
1	1	2	0,5	0,625	-1	48	448	28	1
2	1	4	2,6	1,4	-1	20	160	7,5	1
3	0,5	0,625	1	2	-1	448	48	28	2
4	1	3,75	11,25	3,125	-1	168	24	14,4	2
5	1	1,2	2	0,8	-1	100	420	10	3
6	1	0,32	0,4	0,08	-1	168	700	10	3
7	2	0,8	1	1,2	-1	420	100	10	4
8	1	4	1,5	3	1	10	20	50	-
9	0,2	1,6	36	2	-45	7	0,2	20	2 + 4

авторы [6] называют такой цикл, который при изменении параметров совершает бифуркацию удвоения периода; при этом траектория цикла с удвоенным периодом лежит на замыкании двумерного неустойчивого многообразия сингулярного цикла.

Варианты 1–4 имеют следующие типы особых точек:  $O_1$  — седло-фокус с одномерным устойчивым  $W^s$  и двумерным неустойчивым многообразием  $W^u$ ,  $O_2$  — седло-узел с одномерным неустойчивым  $W^u$  и двумерным устойчивым многообразием  $W^s$ . Аттрактор развивается вокруг точки  $O_1$ .

В системе имеется иной тип решений, приводящих к нерегулярным аттракторам. В случае вариантов 5–7 аттрактор развивается уже вблизи точки  $O_2$ , которая является седло-фокусом с одномерным устойчивым  $W^s$  и двумерным неустойчивым многообразием  $W^u$ . Точка  $O_1$  представляет собой седло-фокус с одномерным неустойчивым  $W^u$  и двумерным устойчивым многообразием  $W^s$ . На рис. 5 *a-g* показаны проекции решений, соответствующих варианту 5. Вариант 7 дает симметричное решение. Пока в системе обнаружено 4 вида отличающихся по расположению в фазовом пространстве элементарных нерегулярных аттракторов типа аттрактора Ресслера, являющихся результатом каскадов бифуркаций соответствующих сингулярных циклов.

Эволюция аттракторов в рассматриваемой системе может быть более развитой и приводить к решениям, которые подходят, согласно [8], под понятие «контрастных структур». Контрастными структурами называются такие режимы скачков медленных переменных  $x$  в сингулярно возмущен-

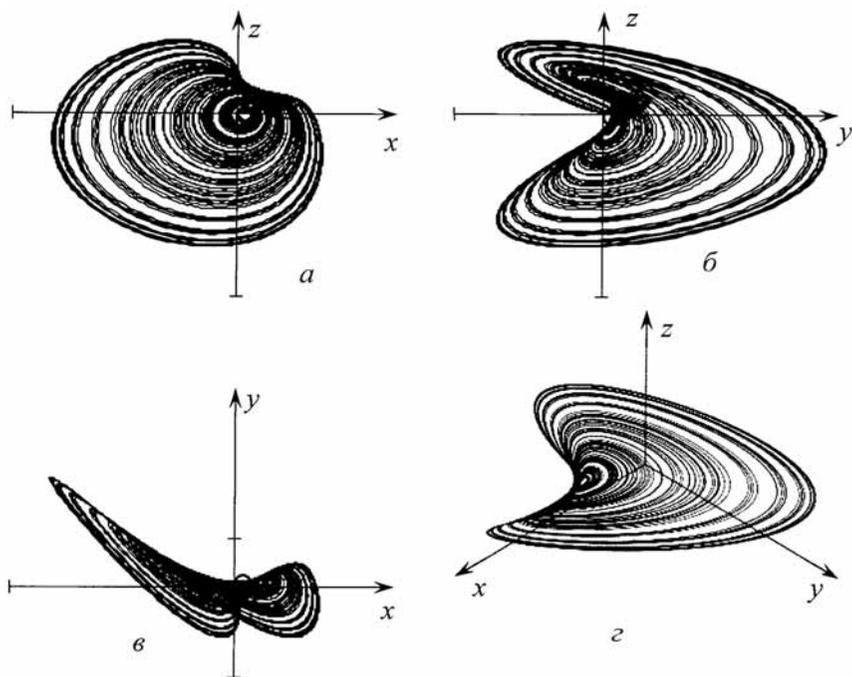


Рис. 4. Проекция аттрактора типа 2 на фазовые плоскости (вариант 4)

ной задаче Коши вида  $\dot{x} = A(x, y)$ ,  $\tau \dot{y} = B(x, y)$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , когда выполняются следующие условия:

- 1) существует по крайней мере два многообразия медленных движений, из которых только одно устойчиво;
- 2) существует область начальных значений, при которых возможен уход фазовой траектории в бесконечность при  $\tau \rightarrow 0$ ;
- 3) существует особенность структуры, которая обеспечивает возврат фазовых траекторий из бесконечности;
- 4) в фазовом пространстве существует механизм срыва фазовой точки с устойчивого многообразия.

Рассмотрим вариант 5, используя в качестве бифуркационного параметра  $c$ . Начальные условия равны  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ . Бифуркации проходят последовательно, начиная с удвоения периода предельного цикла, затем субгармонический и гомоклинический каскады, а далее — более сложный каскад, приводящий к «контрастным структурам». Например, при  $c = 1,959$  в системе существует устойчивый предельный цикл. На рис. 6 представлены проекции, показывающие довольно сложную форму этого цикла. Для выяснения структуры фазового пространства

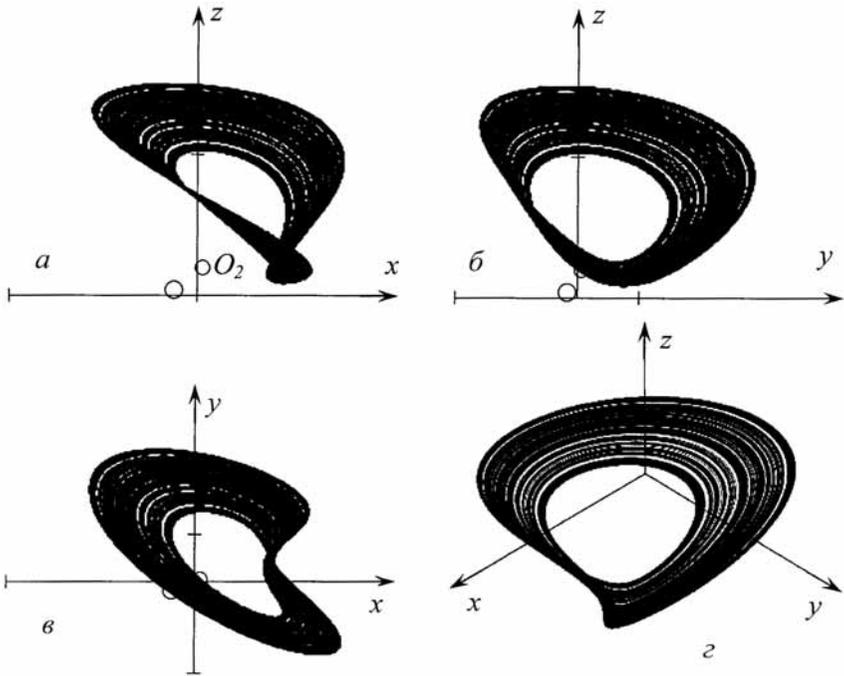


Рис. 5. Проекции аттрактора типа 3 на фазовые плоскости (вариант 5)

выполним построение следующих траекторий  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 7 и 8). Траектория  $L_1$  выпущена из точки  $O_2$  (малой ее окрестности) в системе (1) с обращенным временем  $t \rightarrow -t$  и стремится к двумерному многообразию точки  $O_1$ , которое в обращенной системе является неустойчивым. Траектория  $L_2$  выпущена из точки  $O_1$  (малой ее окрестности) в необращенной системе и стремится вдоль многообразия  $W_1^u$  точки  $O_1$  и  $W_1^s$  точки  $O_2$  к сепаратрисе, образованной многообразием  $W_2^u$  точки  $O_2$ . Нижние индексы в обозначениях  $W_i^{s,u}$  соответствуют размерности многообразия.

Можно предположить следующее объяснение формы цикла  $C$ . Его траектория совершает  $n = 8$  витков вокруг точки  $O_2$  и удаляется от нее вдоль сепаратрисной поверхности  $W_2^u$ , затем, «притягиваясь» к многообразию  $W_2^s(O_1)$ , переходит в полупространство  $z > 0$ , где попадает в область притяжения многообразия  $W_1^s(O_2)$  и замыкается. Структура фазового пространства в этом случае (как и при других значениях  $\epsilon$ , когда наблюдаются контрастные структуры) удовлетворяет условиям 1–4, описанным выше. Исследуемый пример представляет собой гладкую автономную диссипативную систему, в которой наблюдаются скачки, всплески и пограничный слой. Рис. 9 иллюстрирует схему расположения сепара-

трис, а также возможность существования сложного сепаратрисного контура, содержащего как гомоклинические, так и гетероклинические участки, и соответственно необходимость постановки задачи о поиске таких контуров.

На рис. 10 представлена общая эволюция динамических режимов с контрастными структурами при различных  $c \in (1,037; 2,177461)$  для варианта 5. При  $c_1 \approx 2,177461$  в результате бифуркации Андронова—Хопфа рождается предельный цикл, который существует в интервале  $c \in (2,022; 2,177461)$ . Цикл является сингулярным, и при  $c_2 \approx 2,022$  начинается каскад Фейгенбаума, ведущий к субгармоническому и гомоклиническому каскадам. Развитие гомоклинического каскада при  $c \in (1,981313; 1,983737)$  приводит к появлению решений в виде контрастных структур. С другой границы интервала при  $c \in (1,037; 1,3005)$  в системе наблюдаются автоколебания в виде контрастных структур  $CC_2$ , а в интервале  $c \in (1,3005; 1,55425)$  — в виде  $CC_1$ . Точка  $c_5 \approx 1,3005$  является границей, когда происходит бифуркация потери устойчивости контрастных циклов типа  $CC_2$  и рождается контрастный цикл типа  $CC_1$ . По сравнению с  $CC_2$  траектория цикла  $CC_1$  совершает на один оборот с последующим разворотом больше вокруг вертикальной оси аттрактора. В интервале  $c \in (1,55425; 1,981313)$  существуют автоколебания типа рассмотренного выше при  $c = 1,959$  цикла  $C$ , траектория которого состоит из участка цикла типа  $CC_1$  и участка, лежащего в пространстве существования сингулярных аттракторов. Подобные траектории, состоящие из участков разных циклов, названы циклами самоорганизации [6]. Внутри интервала  $c \in (1,55425; 1,981313)$  происходят сложные каскады бифуркаций, приводящие в том числе к хаотизации циклов самоорганизации, а также циклов самоорганизации, состоящие из участков траекторий циклов  $CC_1$ ,  $CC_2$  и сингулярных аттракторов.

Интерес представляют временные зависимости динамических переменных системы для случая «контрастных структур». На рис. 6 в приведена зависимость  $y(t)$  при  $c = 1,959$ . Решения подобного вида были получены и исследованы для многомерных и одномерных вариантов уравнений Гинзбурга—Ландау и Шредингера [9]. Режим, соответствующий таким решениям, был назван «жесткой турбулентностью» — хаотическим режимом с редкими, но исключительно высокими выбросами. Очевидно, что аналогичную картину демонстрирует и исследуемая система и, таким образом, понятия «жесткая турбулентность» или «переключающая перемежаемость» [9] вполне могут интерпретироваться с помощью контрастных структур, имеющих место в системах обыкновенных дифференциальных уравнений (и, очевидно, в системах уравнений в частных производных).

Решения в виде контрастных аттракторов появляются из сингулярных циклов типа 3 и симметричных им циклов типа 4. В настоящее время неизвестно, могут ли сингулярные аттракторы типа 1 и 2 породить контрастные структуры. Можно, однако, утверждать, что при одних и тех же

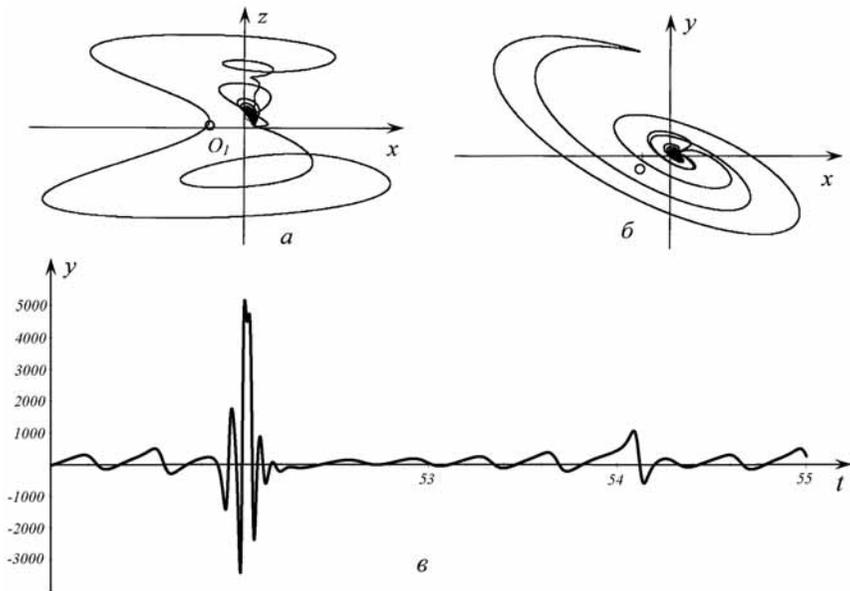


Рис. 6. Контрастный аттрактор в виде цикла  $C$  при  $c = 1,959$  (вариант 5)

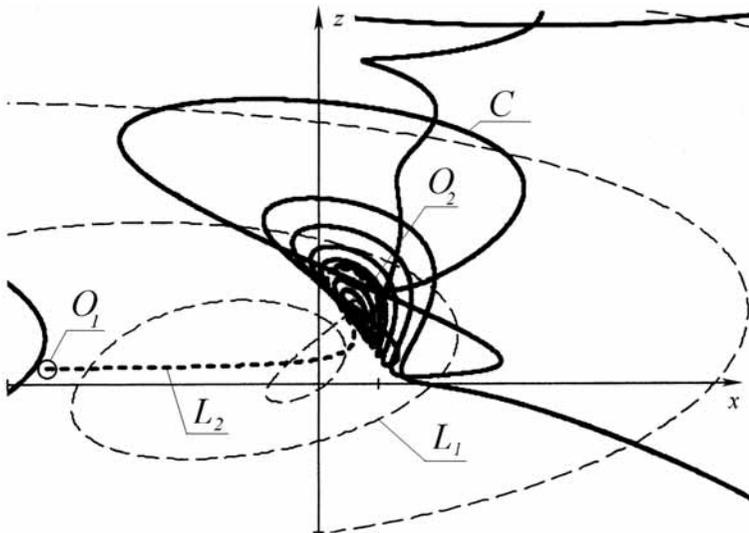


Рис. 7. Проекция цикла  $C$  на плоскость  $(xOz)$  (вариант 5 при  $c = 1,959$ )

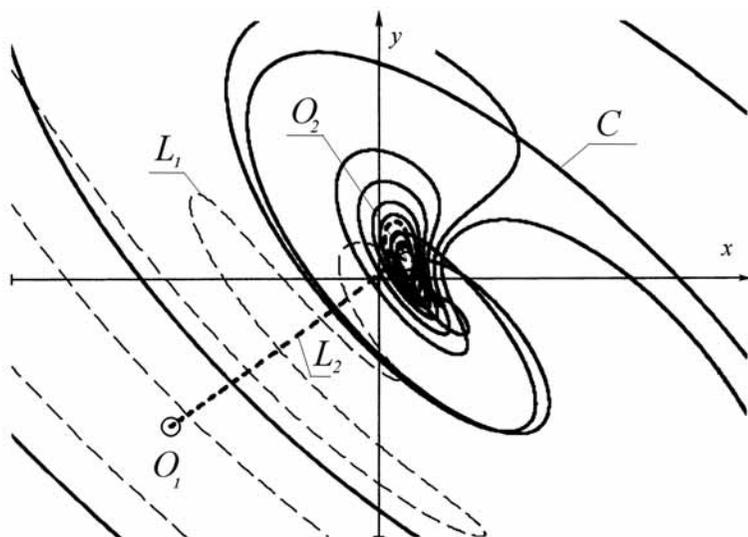


Рис. 8. Проекция цикла  $C$  на плоскость  $(xOy)$  (вариант 5 при  $c = 1,959$ )

значениях параметров в фазовом пространстве существуют области притяжения аттрактора типа 2 (см. например, вариант 9 при  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ ) и области притяжения контрастного аттрактора, соответствующего типу 4 (тот же вариант 9 при  $x_0 = y_0 = z_0 = 10$ ).

Система (1) не является единственной, где могут быть обнаружены контрастные структуры. Они были описаны также в работах [10–12], где исследовались трехмерные автономные диссипативные модели некоторых транспортных процессов и систем.

Кроме математических аспектов не меньший интерес представляет экономическая интерпретация модели (1). Наиболее важным с практической точки зрения является анализ состояний равновесий и их устойчивости. Рассмотрим вариант 8.

При выбранных параметрах точка  $O_2(25,224077; 25,224077; 14,644661)$  является устойчивым узлом, а точка  $O_1(9,061633; 9,061633; 85,355331)$  — седло-узлом с многообразиями  $W_1^u$  и  $W_2^s$ . Исследуем состояния равновесия в зависимости от выбора коэффициентов  $a$  и  $b$ , т. е. с точки зрения стратегий игры первого игрока.

Уточним экономический смысл данных коэффициентов. Выше было указано, что коэффициент  $a$  характеризует степень информированности игрока «1» о действиях игрока «2» и потребителя. Говоря более точно,  $a$  — это реакция игрока «1» на действия конкурента (или объединенных против него конкурентов) и на наличие спроса у потребителя (на рынке объединенных потребителей). Увеличение этого коэффициента должно

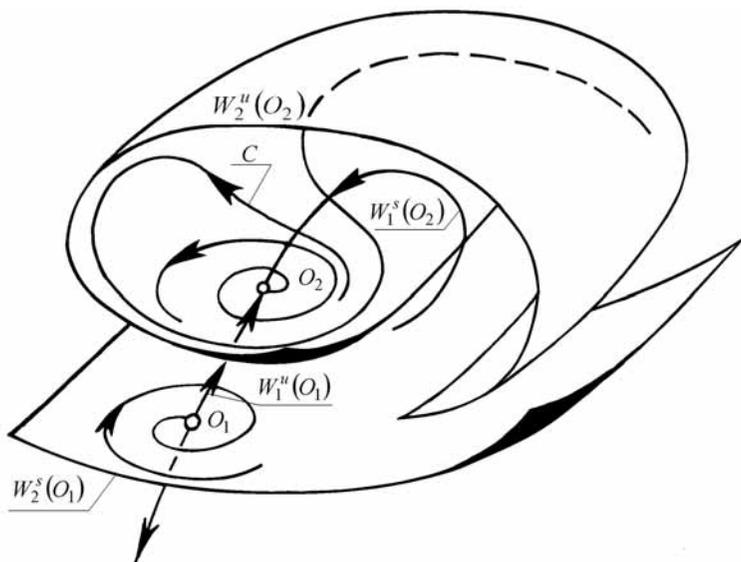


Рис. 9. Структура фазового пространства и схема расположения цикла  $C$  (вариант 5)

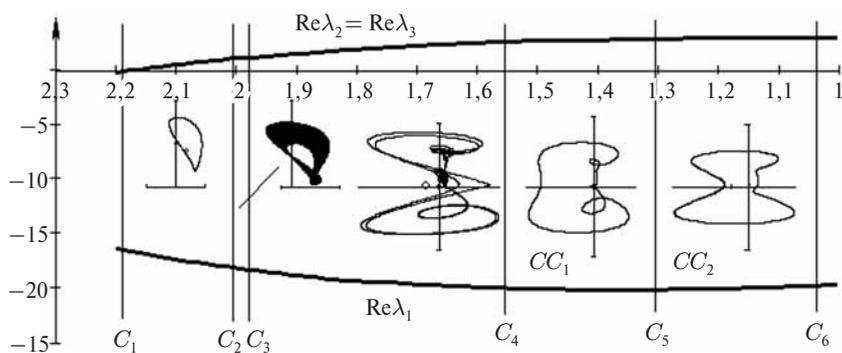


Рис. 10. Эволюция аттракторов (вариант 5) и зависимости  $\text{Re } \lambda_i$  для точки  $O_2$

приводить к росту  $z_2^*$ , т. е. к росту валового дохода. Коэффициент  $a$  характеризует учет внешней среды. Условно его можно назвать коэффициентом агрессивности игрока «1».

Выше указывалось, что коэффициент  $b$  характеризует стремление игрока «1» к сокращению использования ресурсов, направляемых на рекламу и качество услуг. Другими словами,  $b$  — это реакция игрока «1» на чувствительность рынка к качеству своих услуг и количеству своей рекламы.

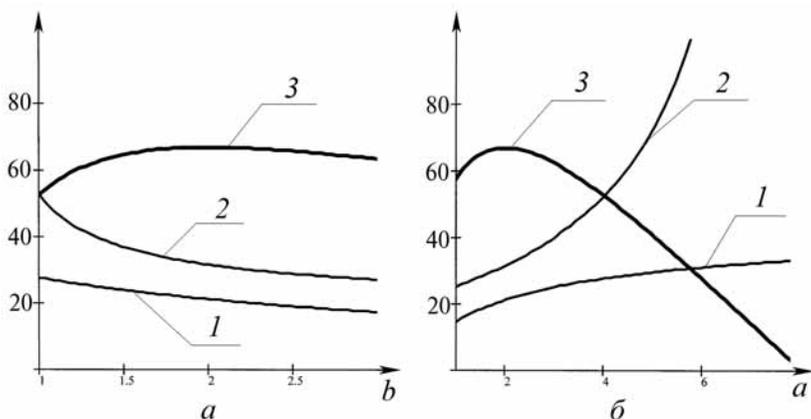


Рис. 11. Влияние коэффициентов модели конкуренции на выбор оптимальной игровой стратегии (вариант 8): 1 —  $z_2^*$ ; 2 —  $x_2^*$ ; 3 —  $z_2^*/x_2^*$

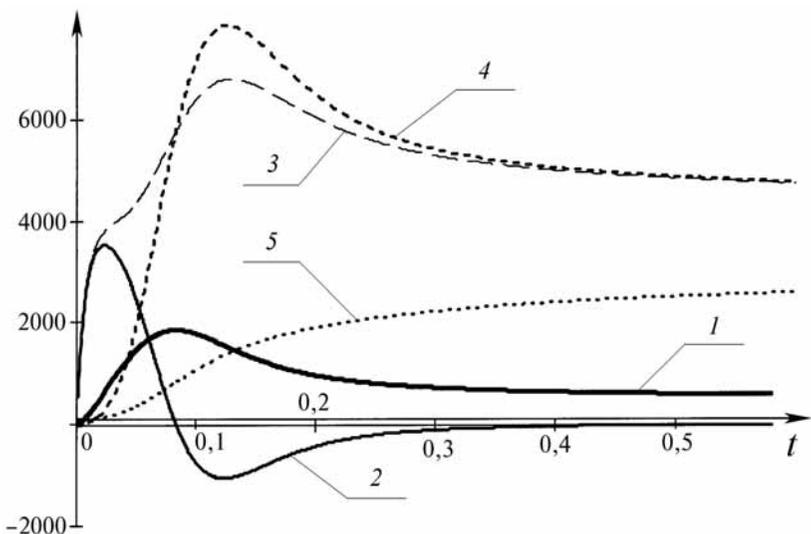


Рис. 12. Реализация дифференциальной игровой стратегии: 1 —  $x(t)$ ; 2 —  $\dot{x}(t)$ ; 3 —  $\dot{x}_1(t)$ ; 4 —  $\dot{x}_2(t)$ ; 5 —  $z(t)$

Увеличение этого коэффициента должно логично приводить к снижению  $x_2^*$ , т. е. снижению постоянных затрат. Коэффициент  $b$  характеризует учет внутренних ресурсов. Условно его можно назвать коэффициентом осторожности игрока «1».

На рис. 11 б видно, что, действительно, с ростом  $a$  увеличивается  $z_2^*$  и одновременно растет  $x_2^*$ . Существует  $a_{opt} \approx 2,08$ , при котором отношение  $z_2^*/x_2^* \rightarrow \max$ , характеризующее максимальный выигрыш на единицу затрат. Аналогично, на рис. 11 а видим, что с ростом  $b$ , как и предполагалось, уменьшается  $x_2^*$  и одновременно уменьшается  $z_2^*$ . При этом так же существует  $b_{opt} \approx 2,05$ , при котором  $z_2^*/x_2^* \rightarrow \max$ .

На рис. 12 показаны графики зависимостей  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $z(t)$ , а также  $\dot{x}_1(t) = ay(Z - z)$  и  $\dot{x}_2(t) = bz(x - X)$ . При выбранных  $x_0 = x(0)$ ,  $y_0 = y(0)$  и  $z_0 = z(0)$  график  $\dot{x}(t)$  показывает некоторую реализацию игровой стратегии первого игрока, которая осуществляется при постоянных коэффициентах  $a$  и  $b$ . Принимаемые непрерывные решения игрока «1» соответствуют условиям дифференциальной теории игр и зависят только от текущих значений  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

### 3. Выводы

Анализ стационарных состояний модели конкуренции показывает, что влияние параметров укладывается в логику игровых стратегий (например, увеличение коэффициента агрессивности игрока приводит к росту реализации услуг, а увеличение коэффициента осторожности — к снижению затрат; при этом существуют оптимальные значения коэффициентов, обеспечивающих максимальную величину выигрыша на единицу затрат).

Модель конкуренции содержит не только стационарные состояния и устойчивые предельные циклы, но и режимы детерминированного хаоса, а также решения в виде контрастных структур, обладающих свойствами аттрактора и способных к бифуркациям, по крайней мере, в рамках классических сценариев перехода к хаосу, таких как удвоение периода и субгармонический каскад Шарковского.

Найденные в системе симметрии позволяют упорядочить классификацию аттракторов и уменьшить размерность исходного параметрического пространства на два.

Выяснено, что в исследуемой модели существует, как минимум, четыре простейших сингулярных аттрактора типа Ресслера, установлена связь структуры этих аттракторов с типом особых точек. Все четыре типа могут демонстрировать каскады бифуркаций вплоть до полных гомоклинических и более сложных. Некоторые из сингулярных аттракторов порождают контрастные аттракторы — особый тип сложных регулярных и нерегулярных решений, состоящих из контрастных структур.

Показано, что подобные решения могут быть использованы для объяснения таких явлений как жесткая турбулентность и переключающая перемежаемость [9]. Выполнен анализ структуры фазового пространства и показаны конкретные механизмы выполнения условий, при которых возникают контрастные структуры [8].

Таким образом, найденные в модели регулярные и нерегулярные аттракторы представляют собой траектории, наблюдаемые в результате каскада бифуркаций удвоения периода, субгармонического, гомоклинического и других, более сложных, каскадов и располагаются в общем случае на многолистных двумерных поверхностях, о чем свидетельствуют приведенные выше сечения Пуанкаре. Эти выводы находятся в полном соответствии с ФШМ-теорией и результатами расчетов, изложенных в монографии [6].

## Литература

1. *Поддубный В. В.* Оптимальная стабилизация рынка, описываемого модифицированной динамической моделью Вальраса—Маршалла в пространстве переменных «предложение—цена—спрос» // Вестник Томск. гос. ун-та. 2004. № 284. С. 80–89.
2. *Обуховский В. В.* Об оптимумах и равновесиях в теории игр и экономике // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6. № 6. С. 123–127.
3. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. 335 с.
4. *Смехов А. А.* Маркетинговые модели транспортного рынка. М.: Транспорт, 1998. 120 с.
5. *Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зильпугаров М.-Г. М.* Модель конкуренции. Препринт № 64 ИПМ имени М. В. Келдыша. М., 2006. 22 с.
6. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
7. *Magnitskii N. A., Sidorov S. V.* New methods for Chaotic dynamics // World scientific series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 58. Series Editor: Leon Chua. Singapore, 2006. 364 p.
8. *Неймарк Ю. И., Смирнова В. Н.* Контрастные структуры, предельная динамика и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1507–1515.
9. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В.* Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. М.: КомКнига/URSS, 2006. 280 с.
10. *Азуреев И. Е.* Нелинейная динамика в теории автомобильных транспортных систем // Изв. ТулГУ. Сер. «Автомобильный транспорт». Вып. 9. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 3–13.
11. *Азуреев И. Е.* Нелинейные модели транспортных процессов и систем // Изв. ТулГУ. Сер. «Автомобильный транспорт». Вып. 10. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 3–11.
12. *Азуреев И. Е., Атлас Е. Е.* Использование принципов нелинейной динамики при исследовании диссипативных моделей транспортных процессов в биофизических системах // Вестник новых медицинских технологий. Тем. вып. «Медико-биологические аспекты внедрения синергетических подходов». 2007. Т. XIV. № 1. С. 41–43.