

**Сидоров С. В.**

Институт системного анализа РАН, Москва

## О ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ В РЕШЕНИЯХ ВИДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

На примере дифференциальных уравнений в частных производных, используемых в моделировании осциллирующих активных сред, рассмотрены вопросы образования решений в форме бегущей волны. Показано, что переход к решению в форме бегущей волны осуществляется через каскады бифуркаций, определяющих развитие хаотической динамики в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений.

### 1. Введение

К настоящему времени достаточно хорошо изучены бегущие волны в возбудимой среде. Распространение таких волн в широком классе возбудимых сред описывается нелинейными уравнениями вида

$$\begin{aligned}u_t &= du_{xx} + f(u, v), \\v_t &= \varepsilon g(u, v),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $d$  — коэффициент диффузии,  $\varepsilon$  — малый параметр,  $f(u, v)$  и  $g(u, v)$  — нелинейные функции среды. В предположении, что решение системы (1) имеет вид бегущей волны  $u(x, t) = \tilde{u}(x - c_0 t) = \tilde{u}(\xi)$ ,  $v(x, t) = \tilde{v}(x - c_0 t) = \tilde{v}(\xi)$ , можно перейти от двух переменных  $x$  и  $t$  к одной переменной  $\xi = x - c_0 t$ . В этом случае

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c_0 \frac{d}{d\xi},$$

и система уравнений в частных производных (1) может быть преобразована в систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} + c_0 \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + f(\tilde{u}, \tilde{v}) &= 0, \\ \frac{d\tilde{v}}{d\xi} + \frac{\varepsilon}{c_0} g(\tilde{u}, \tilde{v}) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

При переходе к переменной  $\xi = x - c_0 t$ , то есть к системе координат, связанной с волной, в системе обыкновенных дифференциальных уравнений появляется дополнительный неизвестный заранее параметр  $c_0$  — скорость волны. Поэтому в случае решения системы (2) в возбудимой среде требуется выполнение условий  $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u}_0$  и  $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , где  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  — однородное стационарное состояние системы. Наличие такого решения означает существование петли сепаратрисы особой точки  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ , что возможно лишь при определенном значении параметра  $c_0$  в системе (2). Таким образом, решению вида бегущей волны для системы дифференциальных уравнений с частными производными (1) соответствует решение в форме петли сепаратрисы в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2).

В значительно меньшей мере исследованы вопросы образования бегущих волн в осциллирующих активных средах, представленных либо сетью связанных между собой колебательных элементов, либо распределенной средой, в которой отдельные физически малые элементы обладают автоколебательными свойствами. Очевидно, что в таких средах решение  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  не является однородным стационарным состоянием.

Цель данной работы — исследование образования решений в форме бегущей волны в активной осциллирующей среде. Для решения поставленной задачи использовался метод численного продолжения по параметру устойчивых решений. Ранее применение этого метода в исследовании нелинейных систем дифференциальных уравнений с хаотическим поведением позволило установить универсальный сценарий перехода к хаотическим решениям в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений, включая дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и дифференциальные уравнения в частных производных [1], а позже легло в основу теории динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений, согласно которой появление хаоса в этих системах происходит не в результате мгновенного разрушения регулярного состояния системы сколь угодно малым возмущением, а вследствие бесконечного каскада бифуркаций рождения все более сложных периодических или квазипериодических устойчивых решений [2, 3]. В данной работе представлены результаты численных исследований в уравнениях типа реакции-диффузии как при отсутствии, так и с учетом переноса.

## 2. Уравнение Гинзбурга—Ландау

Одной из наиболее распространенных моделей, применяемой при исследовании осциллирующей активной среды является нестационарное обобщенное уравнение Гинзбурга—Ландау [4, 5], которое для одномерного случая, соответствующего плоской волне, имеет вид

$$W_t(x, t) = aW(x, t) + dW_{xx}(x(t) - cW(x, t)|W(x, t)|^2, \quad (3)$$

где  $W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$  — комплекснозначная функция,  $a = a_1 + ia_2$ ,  $d = d_1 + id_2$ ,  $c = c_1 + ic_2$  — комплексные коэффициенты. Зафиксируем для определенности значения некоторых параметров:  $a_1 = c_1 = d_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$  и рассмотрим задачу Коши для равносильной уравнению (3) вещественной системы из двух параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= u + u_{xx} - d_2 v_{xx} - (u - c_2 v)(u^2 + v^2), \\ v_t &= v + d_2 u_{xx} + v_{xx} - (c_2 u + v)(u^2 + v^2), \\ -\infty < x < \infty, \quad u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \end{aligned} \quad (4)$$

В предположении, что система (4) имеет решение в форме бегущей волны  $u(x, t) = \tilde{u}(x - c_0 t)$ ,  $v(x, t) = \tilde{v}(x - c_0 t)$ , введем переменную  $\xi = x - c_0 t$  и преобразуем систему (4) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

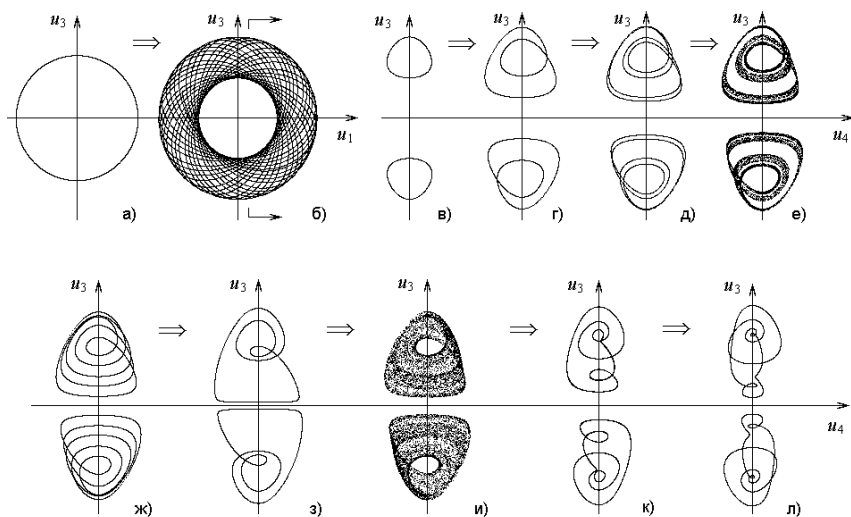
$$\begin{aligned} (1 + d_2^2) \frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} &= -\tilde{u} - d_2 \tilde{v} - c_0 \left( \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + d_2 \frac{d\tilde{v}}{d\xi} \right) + \\ &+ (c_2(\tilde{u} - \tilde{v}) + \tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2), \\ (1 + d_2^2) \frac{d^2 \tilde{v}}{d\xi^2} &= d_2 \tilde{u} - \tilde{v} + c_0 \left( d_2 \frac{d\tilde{u}}{d\xi} - \frac{d\tilde{v}}{d\xi} \right) + \\ &+ (c_2(\tilde{u} + \tilde{v}) - \tilde{u} + \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2), \end{aligned} \quad (5)$$

которая в свою очередь может быть записана в форме системы системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ (1 + d_2^2) u_2' &= -u_1 - c_0 u_2 + d_2(u_3 + c_0 u_4) + \\ &+ ((c_2 d_2 + 1)u_1 - (c_2 - d_2)u_3)(u_1^2 + u_3^2), \\ u_3' &= u_4, \\ (1 + d_2^2) u_4' &= d_2(u_1 + c_0 u_2) - u_3 - c_0 u_4 + \\ &+ ((c_2 - d_2)u_1 + (c_2 d_2 + 1)u_3)(u_1^2 + u_3^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u_1 = \tilde{u}(\xi)$ ,  $u_3 = \tilde{v}(\xi)$ .

Легко показать, что система (5), а следовательно, и система (6) имеет единственную неподвижную точку, совпадающую с началом координат фазового пространства. Эта точка является единственным аттрактором системы (6) при значениях параметра  $c_0$ , лежащих вдали от значения  $\tilde{c}_0$ , соответствующего образованию петли сепаратрисы, отвечающей условию  $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u}_0$ ,  $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , где  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  — некоторое однородное периодическое решение. При продолжении устойчивого нулевого решения по параметру  $c_0$  наблюдается потеря устойчивости этого решения,



**Рис. 1.** Эволюция решения системы (6) при изменении параметра  $c_0$ , соответствующая переходу к решению в форме бегущей волны в уравнении (3)

и вследствие бифуркации Андронова—Хопфа в системе (6) рождается предельный цикл (рис. 1 а). Дальнейшее уменьшение разности  $\delta = c_0 - \bar{c}_0$  приводит к повторной бифуркации Андронова—Хопфа, в результате которой цикл, родившийся первым становится неустойчивым, и образуется устойчивый двумерный инвариантный тор (рис. 1 б), как топологическое произведение двух циклов, появившихся вследствие двух последовательных бифуркаций Андронова—Хопфа. Отображение Пуанкаре этого тора при сечении его плоскостью  $u_1 = 0$  показано на рис. 1 в.

При дальнейшем уменьшении разности  $\delta$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода двумерного инвариантного тора по одному из циклов топологического произведения, а именно по вторичному циклу, появившемуся в результате повторной бифуркации Андронова—Хопфа. На рис. 1 г показано отображение Пуанкаре для двумерного инвариантного тора, имеющего удвоенный период вторичного цикла, а на рис. 1 д — отображение Пуанкаре устойчивого двумерного инвариантного тора учетверенного периода по вторичному циклу.

Указанный каскад бифуркаций завершается образованием сингулярного (хаотического) аттрактора Фейгенбаума (рис. 1 е), за которым при дальнейшем уменьшении величины  $\delta$  следует каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, имеющих кратность периодов вторичного цикла согласно порядку Шарковского, о чем свидетельствуют показанные на рис. 1 ж и рис. 1 з отображения Пуанка-

ре устойчивых двумерных торов с периодами кратности соответственно 5 и 3 по вторичному циклу. За субгармоническим каскадом рождения устойчивых двумерных торов вначале следует субгармонический сингулярный аттрактор (рис. 1 и), а затем гомоклинический каскад рождения устойчивых двумерных инвариантных торов в виде топологического произведения первичного предельного цикла на циклы гомоклинического каскада (рис. 1 к и рис. 1 л), завершающегося образованием петли сепаратрисы.

Таким образом, при  $\delta \rightarrow 0$  решение системы (6) представляет собой двумерный инвариантный тор как топологическое произведение первичного предельного цикла, родившегося в результате бифуркации Андронова—Хопфа при потере устойчивости тривиального решения, на петлю сепаратрисы, образовавшейся при завершении гомоклинического каскада бифуркаций. Петля сепаратрисы является финальной стадией всех каскадов бифуркаций, определяющих развитие динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений. Полученное решение удовлетворяет условию существования периодических решений при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , так как последние обусловлены колебаниями, соответствующими первичному циклу, который и является особой точкой петли сепаратрисы гомоклинического контура.

Важно отметить еще одно обстоятельство, имеющее отношение к сценарию образования динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений. Ранее сценарий перехода к хаосу через каскады бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов был установлен только для пятимерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем параболических дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих формально бесконечно мерное фазовое пространство. В настоящей работе показано, что переход к хаосу через каскады бифуркаций двумерных инвариантных торов осуществляется уже в четырехмерных системах, то есть в системах, минимальная размерность фазового пространства которых разрешает существование двумерных торов, представленных топологическим произведением предельного цикла на циклы удвоенного, утроенного и другой кратности периода. В связи с этим становится понятно, почему не наблюдается хаотического поведения в автономных скалярных уравнениях второго порядка с частными производными? Несмотря на то, что решение таких уравнений формально представлено в бесконечномерном фазовом пространстве, тем не менее сведение в автомодельном приближении автономного скалярного уравнения второго порядка с частными производными к автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет получить только двумерные системы, в которых в силу теоремы единственности решения сложность решения ограничена предельными циклами.

### 3. Уравнение вида реакции-диффузии с переносом

В работах [6–8] была предложена модель так называемых «открытых течений», примером которых могут служить течения в трубах, каналах и т. д. Полученная Р. Дейслером модель представляет по существу обобщение рассмотренного выше уравнения Гинзбурга—Ландау на случай учета переноса

$$W_t(x, t) = aW(x, t) - \mu W_x(x, t) + dW_{xx}(x, t) - cW(x, t)|W(x, t)|^2, \quad (7)$$

$$0 \leq x < \infty, \quad W(x, 0) = W_0(x), \quad W(0, t) = \varepsilon(t),$$

где  $W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$  — комплекснозначная функция,  $a = a_1 + ia_2$ ,  $d = d_1 + id_2$ ,  $c = c_1 + ic_2$  — комплексные коэффициенты,  $\mu$  — действительный параметр,  $\varepsilon(t)$  — малый случайный шум. Все коэффициенты предполагаются кусочно-постоянными и могут быть различными в разных областях.

Рассмотрим решения уравнения (7) в предположении существования решения в форме бегущей волны. Все коэффициенты в уравнении (7) положим неизменными во всей области решения задачи, а  $\varepsilon(t) = 0$ . В вещественном виде уравнение (7) выглядит следующим образом

$$u_t = a_1 u - a_2 v - \mu u_x + d_1 u_{xx} - d_2 v_{xx} - (c_1 u - c_2 v)(u^2 + v^2),$$

$$v_t = a_2 u + a_1 v - \mu v_x + d_2 u_{xx} + d_1 v_{xx} - (c_2 u + c_1 v)(u^2 + v^2), \quad (8)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x).$$

Снова перейдем к переменной  $\xi = x - c_0 t$  и после соответствующих преобразований получим диссипативную систему из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$u'_1 = u_2,$$

$$\alpha u'_2 = -(a_1 d_1 + a_2 d_2)u_1 - d_1(c_0 - \mu)u_2 -$$

$$- (a_1 d_2 - a_2 d_1)u_3 - (c_0 - \mu)u_4 + f(u),$$

$$u'_3 = u_4,$$

$$\alpha u'_4 = (a_1 d_2 - a_2 d_1)u_1 - d_2(c_0 - \mu)u_2 -$$

$$- (a_1 d_1 + a_2 d_2)u_3 + (c_0 - \mu)u_4 + g(u), \quad (9)$$

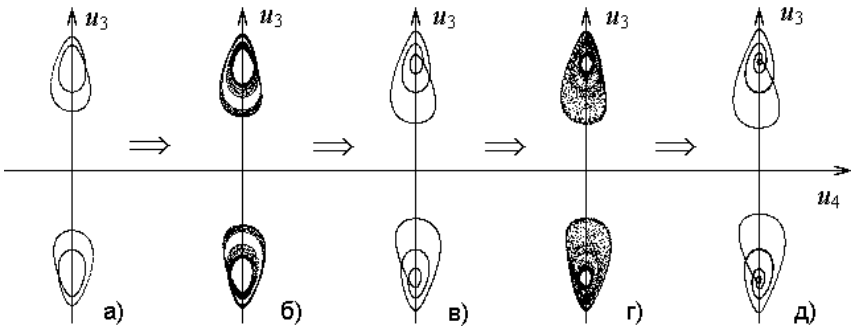
где

$$u_1 = \tilde{u}(\xi), \quad u_3 = \tilde{v}(\xi), \quad \alpha = d_1^2 + d_2^2,$$

$$f(u) = ((d_1 c_1 + d_2 c_2)u_1 - (d_1 c_2 - d_2 c_1)u_3)(u_1^2 + u_3^2),$$

$$g(u) = ((d_1 c_2 - d_2 c_1)u_1 + (d_1 c_1 + d_2 c_2)u_3)(u_1^2 + u_3^2).$$

Для численного исследования решений системы (9) зафиксируем значения параметров  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2,5$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0,2$ ,  $\mu = 2$ , а в качестве бифуркационного параметра выберем  $c_0$  — скорость волны.



**Рис. 2.** Эволюция решения системы (9) при изменении параметра  $c_0$ , соответствующая переходу к решению в форме бегущей волны в уравнении (7)

Сценарий образования гомоклинической петли сепаратрисы для системы (9) аналогичен рассмотренному выше. Так при фиксированных значениях указанных выше параметров и при величине  $c_0 > 4,54$  устойчивым решением системы (9), а следовательно, и системы (8) является тривиальное решение  $u = 0, v = 0$ . При значении  $c_0 \approx 4,53$  наблюдается первая, а при  $c_0 \approx 3,87$  — вторая бифуркация Андронова—Хопфа, в результате чего устойчивым решением системы (9) становится двумерный инвариантный тор. С дальнейшим уменьшением параметра  $c_0$  имеет место бифуркация удвоения периода двумерного инвариантного тора по вторичному циклу (рис. 2 а), появившемуся в системе (9) при повторной бифуркации Андронова—Хопфа. Эта бифуркация порождает каскад бифуркаций удвоения периода двумерного тора по вторичному циклу, который завершается при значении  $c_0 \approx 3,7525$  образованием простейшего сингулярного (хаотического) аттрактора Фейгенбаума (рис. 2 б). За образованием аттрактора Фейгенбаума сначала следует субгармонический каскад бифуркации, о чем свидетельствует двумерный тор кратности 3 по вторичному циклу (рис. 2 в), а затем и гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, которые завершаются соответственно образованием сингулярного субгармонического аттрактора при  $c_0 \approx 3,74395$  (рис. 2 г) и гомоклинической петлей сепаратрисы при (рис. 2 д).

Таким образом, исследование систем дифференциальных уравнений, моделирующих активную осциллирующую среду, показывает, что образование решений в форме бегущей волны для таких систем осуществляется через каскады бифуркаций решений, которые определяют развитие динамического хаоса в системах, имеющих решения в виде двумерных инвариантных торов.

## 4. Заключение

Результаты численного исследования решений в уравнениях, моделирующих осциллирующие активные среды позволяют сделать следующие выводы.

1. Переход к динамическому хаосу в нелинейных диссипативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений через субгармонический (в смысле порядка Шарковского) и гомоклинический каскады бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов имеет место уже в четырехмерных системах, то есть в системах, минимальная размерность фазового пространства которых разрешает существование двумерных торов, представленных топологическим произведением предельного цикла на циклы удвоенного, утроенного и другой кратности периода.
2. Решение в автомодельной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующее появлению решения в форме бегущей волны в системе дифференциальных уравнений с частными производными, моделирующей активную осциллирующую среду, представляет собой двумерный инвариантный тор, образованный топологическим произведением предельного цикла на гомоклиническую петлю сепаратрисы, которая порождена каскадом бифуркаций, определяющим развитие динамического хаоса в нелинейных системах дифференциальных уравнений. Переход к гомоклинической петле сепаратрисы, расположенной на первичном цикле двумерного инвариантного тора, осуществляется через каскады бифуркаций вторичного цикла двумерного тора, возникающих при продолжении устойчивых решений по бифуркационному параметру: сначала имеет место каскад бифуркаций удвоения периода двумерного тора по вторичному циклу, который завершается сингулярным (хаотическим) аттрактором Фейгенбаума, затем следует субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных торов, кратность периода вторичного цикла которых определяется порядком Шарковского, и наконец, после образования субгармонического сингулярного аттрактора следует каскад рождения устойчивых двумерных торов, представленных топологическим произведением первичного предельного цикла на циклы гомоклинического каскада, завершающегося образованием гомоклинической петли сепаратрисы особой точки типа седло-фокус, принадлежащей первичному предельному циклу.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. А. Магницкому за предложенную тему и обсуждение результатов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-07-89047а) и программой ОНТИ РАН (проект 1.12).



## Литература

1. Сидоров С. В. Универсальность перехода к хаосу в динамических диссипативных системах дифференциальных уравнений // Динамика неоднородных сред. Выпуск 9, 51–87. М.: КомКника/URSS. 2005.
2. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
3. *Magnitskii N. A., Sidorov S. V.* New Methods for Chaotic Dynamics. Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
4. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
5. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 560 с.
6. *Deissler R. J.* Noise strained structure, intermittency and the Ginzburg—Landau equation // J. of Stat. Phys. 1985. V. 40, No. 3/4. P. 371–395.
7. *Deissler R. J.* Spatially growing waves, intermittency and convective chaos in an open-flow system // Physica D. 1987. V. 25, No. 1–3. P. 233–260.
8. *Deissler R. J.* Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg—Landau equation // Phys. Lett. A. 1987. V. 120, No. 7. P. 334–340.