

Калинин Н. М., Хоботов Е. Н.

Институт системного анализа РАН, Москва

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОПРОДУКТОВЫМИ ЗАПАСАМИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ СПРОСЕ

Предлагаются модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном и случайном спросе. При постоянном спросе предлагаемые модели позволяют определять оптимальные объемы пополнения запасов и времена между смежными пополнениями. На основе принципов построения таких моделей разработаны модели, предназначенные для управления многопродуктовыми запасами в условиях случайного спроса.

1. Введение

В настоящее время проблемам управления запасами уделяется большое внимание. Это связано как с развитием торговли, ростом производства продукции и с необходимостью скорейшего обеспечения потребителей постоянно расширяющимся ассортиментом продукции, так и с большими затратами, вызванными доставкой, хранением и обеспечением потребителей продукцией. Во многих случаях такие затраты удастся значительно сократить за счет более успешной организации этих процессов и, особенно, процессов управления запасами [1–7].

На российском рынке в последние годы представлено достаточно большое количество программных продуктов, способствующих повышению качества и эффективности процессов снабжения потребителей различной продукцией. Однако в подавляющем большинстве имеющихся на российском рынке программных продуктов хорошо представлены функции учета и движения товаров и, практически, отсутствуют функции по расчету объемов закупок и времени пополнения запасов. Это значительно снижает эффективность от результатов работы существующих программных продуктов.

Основная причина отсутствия указанных функций заключается в недостаточной разработке моделей и методов управления запасами, особенно для тех случаев, когда приходится хранить много продуктов и товаров различных типов.

В данной работе для управления многопродуктовыми запасами предлагаются математические модели, которые позволяют определять объемы пополнения запасов и времена между смежными пополнениями, которые оказываются оптимальными в случае постоянного спроса на продукцию и демонстрируют высокую эффективность в условиях случайного спроса.

2. Модели управления запасами при постоянном спросе

Рассмотрим сначала случай, когда спрос на продукцию является постоянным.

Большинство известных моделей управления запасами при постоянном спросе построены в предположении, что на складе имеется либо один тип продукции, либо запасами различных типов продукции можно управлять независимо, либо имеется несколько типов продукции, но они объединены в комплекты (например, для сборки каких-либо изделий). В реальных же условиях на подавляющем большинстве складов почти всегда приходится хранить достаточно большое количество различных видов продукции и управление их запасами не удастся организовать независимо по каждому продукту.

Рассмотрим идеи и принципы построения моделей управления многопродуктовыми запасами в случае, когда дефицит продукции на складе недопустим.

2.1. Модель управления без дефицита запасов

Одной из самых известных и распространенных моделей для определения объема пополнения запасов, когда на складе хранится один тип продукции, является модель Уилсона—Харриса [2, 3, 7]. Выражение для общих затрат на доставку и хранение запасов продукции в этом случае имеет следующий вид:

$$D = \left(\frac{c_1 q t_s}{2} + C_s \right) \cdot n = \frac{c_1 q T}{2} + \frac{C_s R}{q},$$

где c_1 — стоимость хранения единицы продукции в единицу времени, q — объем хранящейся продукции, t_s — время между пополнениями, $n = T/t_s = R/q$ — количество периодов пополнения. При этом предполагается, что спрос на продукцию постоянен и в течение интервала времени T будет реализовано R единиц продукции.

Оптимальное значение для объема пополняемой продукции q^* определяется из условия равенства нулю следующей производной $dD/dq = 0$. Решая это уравнение, определяем величину оптимального пополнения запасов q^* :

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_s R}{c_1 T}}.$$

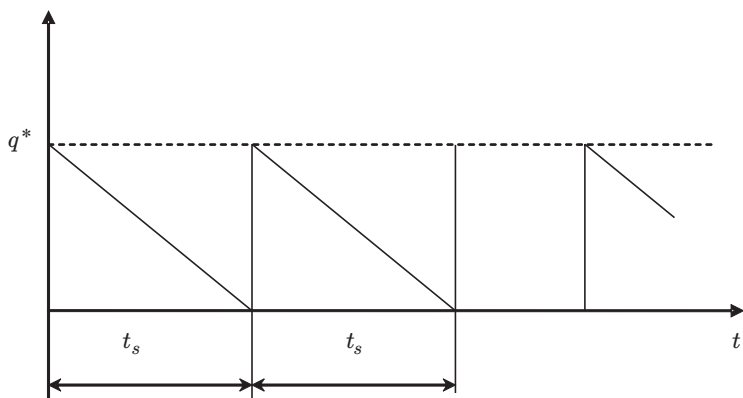


Рис. 1. График изменения величины запасов при хранении одного продукта

Графически процесс изменения величины запасов в этом случае можно представить следующим образом (рис. 1).

При наличии многих продуктов использование данной формулы становится затруднительным, поскольку для каждого продукта будет определена своя оптимальная величина закупаемого продукта и свое время возобновления поставки. Графически изменение величины запасов при таких условиях можно представить в виде, показанном на рис. 2.

Для преодоления таких затруднений возникает идея производить закупку и доставку на склад продуктов нескольких типов одновременно так,

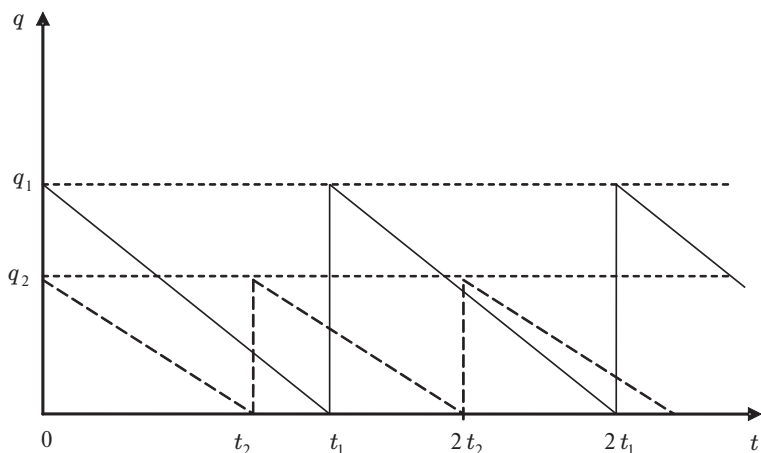


Рис. 2. График изменения величины запасов при использовании формулы Уилсона—Харриса для разных продуктов

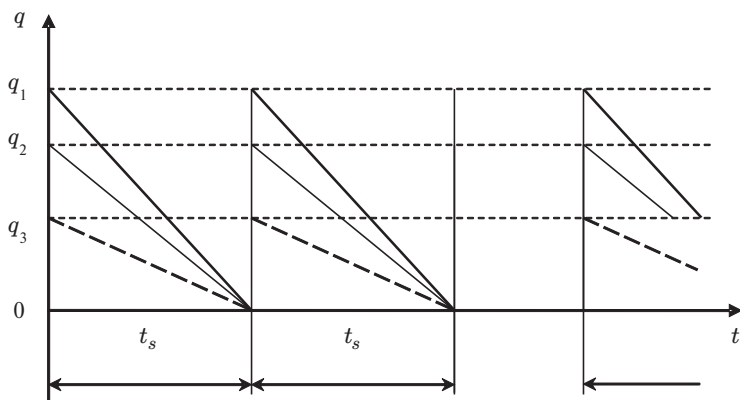


Рис. 3. График изменения величины запасов при одновременной поставке разных продуктов

чтобы к началу следующей поставки запасы этой группы продуктов стали бы равными нулю. Графически процесс изменения величины запасов при таком предположении можно представить в следующем виде (рис. 3).

Затраты на хранение продукции в течение периода между пополнениями t_s составят:

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^L \frac{c_i q_i t_s}{2},$$

где L — количество типов продуктов в группе, закупка которых производится одновременно, q_i — количество единиц i -го продукта, которое закупается для пополнения запасов, t_s — интервал времени между закупками, c_i — стоимость хранения единицы продукта i -го типа в единицу времени.

Поскольку спрос r_i на i -й продукт постоянен, то объем заказываемой продукции должен быть равен количеству продукции, которое будет израсходовано в течение времени t_s , т. е. $q_i = r_i t_s$.

Исходя из сделанных предположений, суммарные затраты на хранение и организацию поставки для группы продуктов принимают вид:

$$D(q) = (\tilde{D} + C_s)n = \left(\sum_{i=1}^L \frac{c_i q_i t_s}{2} + C_s \right) \cdot n, \quad (1)$$

где $n = T/t_s$, а $q_i = r_i t_s$. Подставив выражения для n и q_i в это соотношение, получим:

$$D(t_s) = \left(\sum_{i=1}^L \frac{c_i \cdot r_i \cdot t_s^2}{2} + C_s \right) \cdot \frac{T}{t_s} = \sum_{i=1}^L \frac{c_i \cdot r_i \cdot t_s \cdot T}{2} + C_s \cdot \frac{T}{t_s}. \quad (2)$$

Функция $D(t_s)$ является непрерывной функцией t_s , и ее величина стремится к $+\infty$ при $t_s \rightarrow 0$.

Поэтому минимальное значение функции затрат и соответственно оптимальное значение t_s достигается, когда $dD(t_s)/dt_s = 0$, т.е. когда

$$\frac{dD(t_s)}{dt_s} = \sum_{i=1}^L \frac{C_i \cdot r_i \cdot T}{2} - \frac{C_s \cdot T}{t_s^2} = 0.$$

Из этих условий и определяется оптимальное время между смежными пополнениями склада t_s^* :

$$t_s^* = \sqrt{\frac{\frac{C_s \cdot 2}{n}}{\sum_{i=1}^L C_i \cdot r_i}}. \quad (3)$$

Тогда в соответствии с выражениями, определяющими величины q_i , получим:

$$q_i^* = r_i t_s^* = r_i \sqrt{\frac{\frac{C_s \cdot 2}{n}}{\sum_{i=1}^L C_i \cdot r_i}}. \quad (4)$$

2.2. Управление запасами при постоянном спросе и с возможностью потери заявок

В ассортименте большинства торговых предприятий имеется продукция, для которой допускается дефицит. В этом случае хранение избыточного количества запасов является нерентабельным. Модель управления запасами одного продукта при этих условиях была рассмотрена в [7].

Для многих продуктов модель определения величины пополнения запасов в этом случае строится по схеме, приведенной в предыдущем пункте работы. Поставки разных продуктов предлагается производить в одно и то же время. Графически процесс изменения величины запасов и величины дефицита продуктов можно представить следующим образом (рис. 4).

Как видно из рисунка запасы продукта i -го типа закончатся по истечении времени t_{li} ($i = 1, \dots, L$), которое является индивидуальным для каждого продукта. Затраты на хранение продуктов $\tilde{D}$ в течение одного периода здесь, как и в рассмотренном ранее случае, будут равны:

$$\tilde{D} = \left(\sum_{i=1}^L \frac{C_{li} \cdot s_i \cdot t_{li}}{2} \right),$$

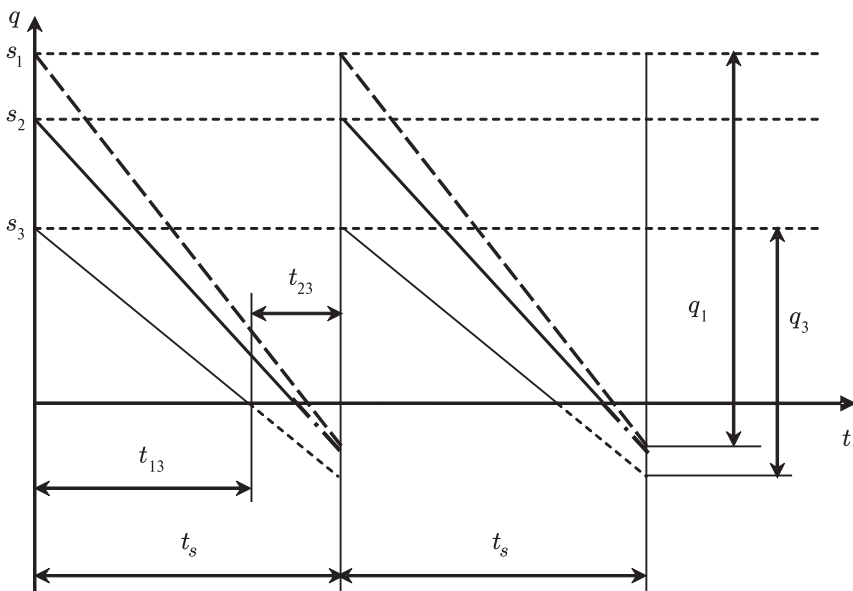


Рис. 4. Графики изменения величины запасов и дефицита продуктов

а затраты $\hat{D}$, связанные с наличием дефицита продуктов в течение одного периода определяются следующим образом [7]:

$$\hat{D} = \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} \cdot (q_i - s_i) \cdot t_{2i}}{2},$$

где s_i — величина заказываемой партии продукта i -го типа; t_{1i} — время, в течение которого на складе имеются запасы продукта i -го типа; C_{1i} — стоимость хранения одного изделия i -го типа в единицу времени; C_{2i} — штраф, назначаемый за отсутствие на складе единицы продукта i -го типа в течение единицы времени; t_{2i} — время, в течение которого на складе имеется дефицит продукта i -го типа, q_i — спрос на продукты i -го типа в течение интервала времени t_s ($t_s = t_{1i} + t_{2i}$). Остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в ранее рассмотренной модели.

Общие затраты, связанные с хранением продукции, ее доставкой и дефицитом за время T будут иметь вид:

$$D = \left(\sum_{i=1}^L \frac{C_{1i} \cdot s_i \cdot t_{1i}}{2} + \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} \cdot (q_i - s_i) \cdot t_{2i}}{2} + C_s \right) \cdot n,$$

где $n = T/t_s$, $t_s = t_{1i} + t_{2i}$, $q_i = r_i \cdot t_s$, $s_i = r_i \cdot t_{1i}$. Подставив выражения для n , q_i , s_i и t_{2i} в это соотношение, получим:

$$D(t_s, t_{1i}) = \left(\sum_{i=1}^L \frac{C_{1i} \cdot r_i \cdot t_{1i}^2}{2} + \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i})^2}{2} + C_s \right) \cdot \frac{T}{t_s},$$

или

$$D(t_s, t_{1i}) = \sum_{i=1}^L \frac{C_{1i} \cdot r_i \cdot t_{1i}^2 T}{2t_s} + \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i})^2 T}{2t_s} + C_s \frac{T}{t_s}.$$

Функция $D(t_s, t_{1i})$ является непрерывной функцией переменных t_s и t_{1i} , и ее величина стремится к ∞ при $t_s \rightarrow 0$.

Поэтому минимум затрат на доставку и хранение продукции достигается, когда частная производная $\partial D(t_s, t_{1i})/\partial t_s = 0$, а частные производные $\partial D(t_s, t_{1i})/\partial t_{1i} \geq 0$. Из этих условий и определяется оптимальное время между смежными пополнениями склада t_s^* и времена t_{1i} , в течение которых в каждом периоде на складе будут оставаться запасы продуктов i -го типа ($i = 1, \dots, L$)

$$\frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_s} = - \sum_{i=1}^L \frac{C_{1i} r_i t_{1i}^2 T}{2t_s^2} + \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} r_i T}{2} - \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i} r_i t_{1i}^2 T}{2t_s^2} - \frac{C_s T}{t_s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_{1i}} = \frac{C_{1i} r_i t_{1i} T}{t_s} - C_{2i} r_i T + \frac{C_{2i} r_i t_{1i} T}{t_s} \geq 0,$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$t_{1i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s, \quad i = 1, \dots, L \quad (5)$$

и

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot C_s}{\sum_{i=1}^n \left(r_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \right)}}. \quad (6)$$

После определения этих величин по следующим соотношениям: $s_i = r_i \cdot t_{1i}$ определяются оптимальные величины заказываемых партий продукции s_i ($i = 1, \dots, L$).

3. Построение систем управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе

Управление запасами с большим количеством наименований продукции вызывает значительные затруднения. Эти затруднения связаны как

со значительными затратами на доставку и хранение запасаемой продукции, так и с тем фактом, что практически все известные методы оптимизации при таких размерностях и наличии общих ограничений не обеспечивают устойчивого и надежного определения оптимальных параметров управления.

Для сокращения затрат и уменьшения размерности возникающих задач широко применяется так называемый ABC-анализ, который позволяет сконцентрировать внимание на продукции наиболее значимой для бизнеса.

В группу А входит, как правило, 15–20 % наименований продуктов, оборот которых приносит предприятию или складу до 75–80 % прибыли. В группу В входит 30–35 % наименований товаров и их оборот приносит до 15–20 % прибыли. Оборот продукции оставшихся наименований, которые составляют 45–55 % от общего количества наименований хранимой продукции, составляет 3–5 % от общей прибыли. Эта продукция входит в группу С.

Из этого становится ясно, что наибольшие усилия менеджера должны быть направлены на управление товарами класса А и затем уже класса В. Продукция из класса А должна по возможности всегда быть на складе. В условиях переменного спроса для этих целей целесообразно предусматривать страховой запас [7]. Для продуктов группы В, приносящих существенно меньшую прибыль, оказывается достаточно дорого и технически сложно обеспечивать постоянное наличие на складе. Это еще будет еще и экономически необоснованно. Поэтому при управлении продуктами этой группы, возможно, следует предусматривать определенный дефицит продуктов и определенные потери от неудовлетворенных заявок. Запасы же продуктов группы С целесообразно пополнять в тех случаях, когда это возможно, т. е. в основном когда после закупки продуктов групп А и В остаются финансовые средства, которые могут быть использованы для закупки продуктов группы С, а также имеется возможность их совместной доставки на склад с продуктами групп А и В без дополнительных затрат.

Построим общую функцию затрат на хранение, доставку и оформление товаров групп А и В в течение периода планирования T .

Как уже отмечалось в пункте 2.1 данной работы, будем считать, что продукты этих групп доставляются на склад одновременно, т. е. пополнение склада всеми необходимыми продуктами происходит периодически с интервалом времени t_s и количество таких интервалов длительностью t_s за период планирования T будет целым числом. Процесс функционирования склада в этом случае графически можно представить в виде, показанном на рис. 5.

Тогда стоимость хранения продуктов группы А в течение интервала времени t_s , которую обозначим через $\tilde{D}_A$, можно определить следующим

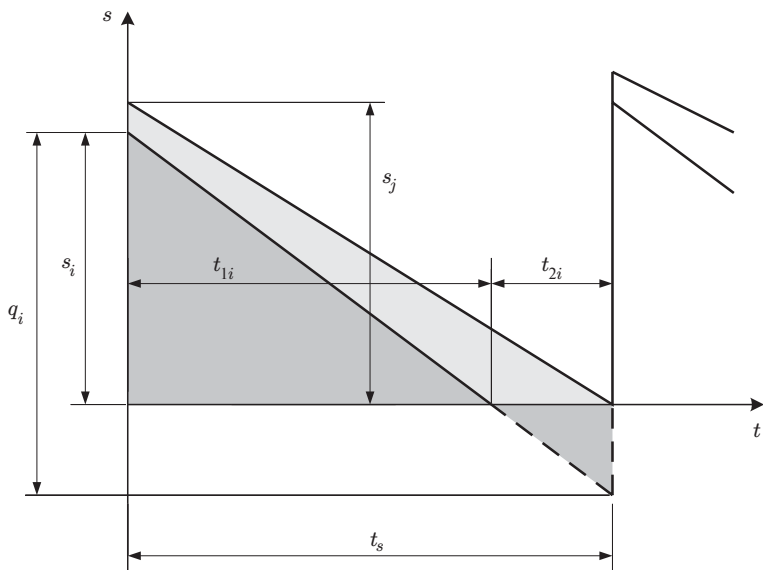


Рис. 5. График изменения уровня запасов на складе при различных стратегиях управления запасами группы А и В

образом:

$$\tilde{D}_A = \sum_{i=1}^{L_A} \frac{C_{1i} q_i t_s}{2},$$

где L_A — количество наименований продуктов группы А, C_{1i} — стоимость хранения i -го продукта в единицу времени, q_i — количество продукта i -го типа, которое закупается в каждом периоде.

Стоимость хранения продуктов группы В в течение интервала времени t_s , которую обозначим через $\tilde{D}_B$, определяется следующим образом

$$\tilde{D}_B = \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{1i} s_i t_{1i}}{2},$$

где L_B — количество наименований продуктов группы В, s_i — величина закупки i -го продукта группы В в начале каждого периода, t_{1i} — интервал времени в начале каждого периода, когда нет дефицита на складе продукта i -го типа.

Штраф $\hat{D}_B$ за дефицит продуктов группы В на складе в течение одного периода составит:

$$\hat{D}_B = \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{2i} (q_i - s_i) t_{2i}}{2},$$

где C_{2i} — штраф за отсутствие i -го продукта на складе в течение единицы времени, q_i — спрос на продукт i -го типа в течение интервала времени t_s , t_{2i} — интервал времени в конце каждого периода, когда имеет место дефицит на складе продукта i -го типа ($t_{2i} = t_s - t_{1i}$).

Общие затраты D , связанные с хранением, доставкой, оформлением и дефицитом продуктов на складе за время T , составят

$$D = (\tilde{D}_A + \tilde{D}_B + \hat{D}_B + C_s) \cdot n = \\ = \left(\sum_{j=1}^{L_A} \frac{C_{1j} \cdot q_j \cdot t_s}{2} + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{1i} \cdot s_i \cdot t_{1i}}{2} + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{2i} \cdot (q_i - s_i) \cdot t_{2i}}{2} + C_s \right) \cdot n,$$

Учитывая, что $q_i = r_i \cdot t_s$, $s_i = r_i \cdot t_{1i}$, $q_i - s_i = r_i \cdot t_{2i}$, $t_s = t_{1i} + t_{2i}$, и подставляя эти выражения в предыдущее соотношение для D , можно записать затраты как функцию $D(t_s, t_{1i})$ переменных t_s и t_{1i} :

$$D(t_s, t_{1i}) = \left(\sum_{j=1}^{L_A} \frac{C_{1j} r_j t_s^2}{2} + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{1i} r_i t_{1i}^2}{2} + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{2i} r_i (t_s - t_{1i})^2}{2} + C_s \right) \cdot \frac{T}{t_s}.$$

Эта функция является непрерывно дифференцируемой, а на ее переменные не наложено никаких ограничений, кроме $t_s \geq 0$ и $t_{1i} \geq 0$. Но при $t_s \rightarrow 0$ значение функции $D(t_s, t_{1i}) \rightarrow \infty$, а дефицит существует и $t_{1i} > 0$. Поэтому минимум этой функции достигается при таких значениях t_s и t_{1i} , для которых выполняются условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_s} = 0, \\ \frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_{1i}} = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя функцию затрат по переменной t_s , получаем выражение:

$$\frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_s} = \left(\sum_{j=1}^{L_A} \frac{C_{1j} \cdot r_j}{2} \cdot 2 \cdot t_s + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{2i} \cdot r_i}{2} \cdot 2 \cdot (t_s - t_{1i}) \right) \cdot \frac{T}{t_s} + \\ + \left(\sum_{j=1}^{L_A} \frac{C_{1j} \cdot r_j \cdot t_s^2}{2} + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{1i} \cdot r_i \cdot t_{1i}^2}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{L_B} \frac{C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i})^2}{2} + C_s \right) \cdot \left(-\frac{T}{t_s^2} \right).$$

Приравнявая это выражение нулю, получаем:

$$\frac{T}{2 \cdot t_s^2} \cdot \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{L_B} C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i}) \cdot t_s + \right.$$

$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{L_A} C_{1j} \cdot r_j \cdot t_s^2 - \sum_{i=1}^{L_B} C_{1i} \cdot r_i \cdot t_{1i}^2 - \\ - \sum_{i=1}^{L_B} C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i})^2 - \sum_{j=1}^{L_A} C_{1j} \cdot r_j \cdot t_s^2 - 2 \cdot C_s = 0.$$

Аналогично, дифференцируя функцию затрат по переменным t_{1i} , получаем:

$$\frac{\partial D(t_s, t_{1i})}{\partial t_{1i}} = \left(\frac{C_{1i} \cdot r_i}{2} \cdot 2 \cdot t_{1i} + \frac{C_{2i} \cdot r_i}{2} \cdot 2 \cdot (t_s - t_{1i}) \cdot (-1) \right) \cdot \frac{T}{t_s} = \\ = \frac{T}{t_s} \cdot \left(C_{1i} \cdot r_i \cdot t_{1i} - C_{2i} \cdot r_i \cdot (t_s - t_{1i}) \right) = \\ = \frac{T}{t_s} \cdot \left((C_{1i} + C_{2i}) \cdot r_i \cdot t_{1i} - C_{2i} \cdot r_i \cdot t_s \right) = 0.$$

Учитывая, что уравнение равно нулю, когда один из множителей равен нулю и $T/t_s \neq 0$, из последнего уравнения получаем:

$$t_{1i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s. \quad (7)$$

Подставляя, это выражение для t_{1i} в соотношение, полученное после преобразования производной функции затрат $D(t_s, t_{1i})$ по переменной t_s , получаем:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{L_B} C_{2i} \cdot r_i \cdot \left(t_s - \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s \right) \cdot t_s + \sum_{j=1}^{L_A} C_{1j} \cdot r_j \cdot t_s^2 - \\ - \sum_{i=1}^{L_B} C_{1i} \cdot r_i \cdot \left(\frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s \right)^2 - \\ - \sum_{i=1}^{L_B} C_{2i} \cdot r_i \cdot \left(t_s - \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s \right)^2 - 2 \cdot C_s = 0.$$

Отсюда после некоторых преобразований получаем:

$$t_s^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{L_B} r_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} + \sum_{j=1}^{L_A} r_j \cdot C_{1j} \right] - 2 \cdot C_s = 0,$$

и определяем t_s

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot C_s}{\sum_{i=1}^{L_B} r_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} + \sum_{j=1}^{L_A} r_j \cdot C_{1j}}} \quad (8)$$

После определения величины t_s и t_{1i} для каждого вида продукта группы В определяем размеры поставок $q_i = r_i \cdot t_s$ для продуктов группы А и $s_i = r_i \cdot t_{1i}$, для продуктов группы В, а также величину дефицита $q_i - s_i = r_i \cdot t_{2i}$ для продуктов группы В.

Процесс работы складов стремятся организовывать таким образом, чтобы пополнение складских запасов продукцией производилось регулярно, а в «пиковой» или «авральной» форме большими партиями через длительные промежутки времени. Это позволяет организовать складам и предприятиям ритмичную работу своих подразделений. Кроме того, на предприятиях и складах, обычно существуют ограничения на средства, выделяемые для разовых закупок продукции, а также ограничения на объемы продукции, которые склад может принять, разгрузить, проверить, оформить и разместить в течение одного поступления. Поэтому продукцию для пополнения складов целесообразно доставлять группами или партиями, имеющими допустимые объемы и стоимость, и через такие промежутки времени, чтобы имеющиеся на складе запасы обеспечивали его работу в течение промежутков времени между поставками продукции. В то же время закупки и не должны быть и излишне частыми, чтобы не приводить к необоснованным затратам на доставку продукции.

Для выполнения этих условий ассортимент хранящейся продукции разбивается на партии, которыми должны пополняться запасы склада. Причем каждая партия пополнения запасов должна иметь допустимые размеры и стоимость. Из-за ограничений на объем работы методы разбиения пополнений продукции на такие партии в рамках данной статьи рассматриваться не будут.

4. Принципы построения моделей управления запасами при случайном спросе

Рассмотрим теперь принципы построения моделей управления многопродуктовыми запасами, когда спрос на продукцию является случайным. При построении таких моделей будем считать, что время поставки заказа является детерминированной, а не случайной величиной.

Рассмотрим сначала случай, когда дефицит продукции на складе нежелателен. При постоянном спросе в аналогах подобных моделей для одного продукта дефицит на складе не допускается [7]. Модель управления многопродуктовыми запасами при этих условиях была рассмотрена в пункте 2.1 данной работы.

В условиях случайного спроса гарантировать отсутствие дефицита продукции на складе невозможно, но подобные модели могут быть модифицированы и для этих случаев. В пункте 2.1. для случая постоянного спроса были выведены соотношения, позволяющие определять оптимальные времена между смежными закупками продукции (соотношение (3)) и величину оптимальных закупок q_i^* i -го продукта (соотношение (4)).

Графически процесс изменения величины запасов в этом случае может быть представлен в виде, показанном на рис. 3.

При наличии случайного спроса использование этой формулы становится затруднительным, поскольку спрос r_i на каждый продукт ($i = 1, \dots, L$) в этом случае будет случайной величиной и с течением времени может меняться. Однако приведенные выше соотношения с некоторыми изменениями могут быть использованы и в условиях случайного спроса.

Пусть спрос на продукцию в течение некоторого интервала времени T является стационарным и среднее значение спроса для i -го продукта в течение этого времени равно $\bar{r}_i$. Тогда период между закупками t_s можно определять по формуле, которая аналогична (3), но с величиной среднего значения спроса $\bar{r}_i$ по каждому продукту в течение интервала планирования T

$$t_s^* = \sqrt{\frac{C_s \cdot 2}{n \sum_{i=1} C_i \cdot \bar{r}_i}},$$

где $\bar{r}_i$ — среднее значение спроса по i -му продукту в течение интервала планирования T .

Для сокращения затрат на содержание запасов в процесс управления, как уже отмечалось выше, целесообразно ввести «обратную связь», которая может сократить остатки продукции или их нехватку на складе к моменту следующего пополнения запасов. Для этого величину закупок q_k в k -м периоде пополнения запасов будем вычислять с помощью соотношения:

$$q_k = \hat{r}_k t_s^* = \hat{r}_k \sqrt{\frac{2C_s}{c_1 \bar{r}}},$$

где $\hat{r}_k$ — величина среднего значения спроса на k -м периоде пополнения запасов, а $\bar{r}$ — величина среднего значения спроса на всем интервале планирования. Обычно величины $\bar{r}$ и $\hat{r}_k$ определяются с использованием методов прогнозирования [3].

Рассмотрим теперь принципы построения модели управления многопродуктовыми запасами при условиях, когда неудовлетворенные заявки теряются. Для управления многопродуктовыми запасами в условиях постоянного спроса подобная модель приведена в пункте 2.2 данной работы.

Графически изменения величины запасов и величины дефицита продуктов в случае постоянного спроса можно представить в виде, показанном на рис. 4.

Причем запасы продукции i -го типа будут кончатся по истечении времени t_{1i} ($i = 1, \dots, n$), которое является индивидуальным для каждого типа продукции и определяется из следующих условий: $s_i = r_i t_{1i}$, ($i = 1, \dots, n$), где t_{1i} определяются из соотношений (5), а t_s — из соотношения (6).

При наличии случайного спроса величину t_s и величины t_{1i} по аналогии с ранее описанным случаем будем определять из соотношений:

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot C_s}{\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \right)}}, \quad t_{1i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \sqrt{\frac{2 \cdot C_s}{\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \right)}},$$

где $\bar{r}_i$ — среднее значение спроса по i -му продукту на период планирования.

Величины пополнения запасов s_{ik} ($i = 1, \dots, L$) для каждого продукта i и каждого периода пополнения запасов k будем вычислять из следующих соотношений:

$$s_{ik} = \hat{r}_{ik} t_{1i} = \hat{r}_{ik} \frac{C_{1i} C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \sqrt{\frac{2 C_s}{\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_i \frac{C_{1i} C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \right)}},$$

где $\hat{r}_k$ — величина среднего значения спроса на i -й продукт на k -м периоде пополнения запасов,

Рассмотрим случай, когда управление продуктами групп А и В происходит в соответствии с принципами построения систем управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе, которые были изложены в пункте 3 данной работы, но с некоторыми изменениями, вызванными наличием случайного спроса. Время между смежными пополнениями склада продукцией t_s при постоянном спросе определяется согласно (8). После определения величины t_s для каждого вида продукта группы В определяются величины t_{1i} в соответствии с соотношениями (7). Затем определяются размеры поставок $q_i = r_i \cdot t_s$ для продуктов группы А и $S_i = r_i \cdot t_{1i}$, для продуктов группы В.

При наличии случайного спроса величину t_s и величины t_{1i} по аналогии с ранее описанными случаями будем определять из соотношений:

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot C_s}{\sum_{i \in L_B} \bar{r}_i \cdot \frac{C_{1i} \cdot C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} + \sum_{j \in L_A} \bar{r}_j \cdot C_{1j}}}, \quad t_{1i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} \cdot t_s, \quad i \in L_B.$$

Тогда размеры поставок для продуктов группы А q_{jk} и для продуктов группы В S_{ik} будут определяться в соответствии с соотношениями: $q_{jk} = \hat{r}_{jk} \cdot t_s$, $j \in L_A$ и $S_{ik} = \hat{r}_{ik} \cdot t_{li}$, $i \in L_B$, в которых использованы ранее определенные обозначения.

Проведенные вычислительные эксперименты показали достаточно высокую эффективность разработанных моделей как в условиях постоянного, так и случайного спроса.

Литература

1. *Ворст Й., Ревентлоу П.* Экономика фирмы: Пер. с датского. М.: Высшая школа, 1994. 272 с.
2. *Лотоцкий В. А., Мандель А. С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991. 258 с.
3. *Линдерс М. Р., Фирон Х. Е.* Управление снабжением и запасами. 4. Логистика / Пер. с англ. СПб.: ООО «Виктория плюс», 2002. 768 с.
4. *Рыжиков Ю. И.* Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001. 384 с.
5. *Стерлигова А. Н.* Оптимальный размер заказа, или Загадочная формула Вильсона // Логистика & система. 2005. № 2. С. 64–69.
6. *Хоботов Е. Н.* Управление в технических системах. Ч. I. Управление запасами. Учебное пособие. М.: МГТУ им. Баумана, 2001. 96 с.
7. *Шрайбфедер Дж.* Эффективное управление запасами. Перевод с англ. 2-е изд. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 304 с.