Пропой А. И.

Институт системного анализа РАН, Москва

ДВИЖЕНИЕ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ

1. Введение

Источником этой работы являются три взаимосвязанные задачи.

1. Рассмотрим некоторый объект. Его состояние можно описать набором числовых показателей. Пусть x_i — значение показателя i, $i = 1, \ldots, n$, для данного объекта. Спрашивается, насколько данный объект лучше (или хуже) других объектов из данной совокупности (популяции) объектов?
2. Рассмотрим «производственный» объект, который описывается набором чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — входов и выходов этого объекта. Требуется оценить эффективность объекта по сравнению с другими объектами из данной совокупности объектов (и определить пути повышения эффективности).
3. Рассмотрим траекторию динамической системы. Ее реализация (т. е. движение) связана с некоторым механизмом управления. Спрашивается, существует ли универсальный механизм управления, независимый от природы системы?

Принципиальная черта этих задач состоит в том, что никаких предположений о функциональных зависимостях между переменными не делается. Единственный источник информации — числовые данные, полученные в процессе измерения показателей объектов (причем в третьей задаче — в процессе движения объекта).

Нет нужды говорить о значении этих задач: любая система должна быть устроена так, чтобы уметь переходить из данного состояния в лучшее.

Эти задачи приводят к необходимости определения двух фундаментальных понятий: отношения порядка (на разных языках «лучше—хуже», «причина—следствие», «вход—выход») и отношения эквивалентности (определяющего разбиение множества на классы эквивалентных, неразличимых для управления состояний).

Таким образом, пространство показателей состояния или, короче, пространство состояний управляемого объекта должно быть частично упорядоченным.

Показатели, описывающие состояние объекта, могут быть самой различной природы. Для управления требуется введение системных, универсальных показателей (таких, как «время» и «положение»), а измерение этих показателей разными объектами (или одним движущимся объектом) приводит к их относительности, т. е. зависимости значений от выбранной системы отсчета.

В работах А. Д. Александрова по теории относительности [1] показано, что за основу теории можно взять отношение порядка и связанное с ним понятие конусного интервала.

Отношение порядка является базовым и во многих прикладных областях науки: сравнительной оценки объектов по многим показателям (задача 1), оценки эффективности производственных объектов (задача 2) [2], теории распределенных систем (логическое время).

Ключевой задачей во всех этих исследованиях является построение метрики частично упорядоченного множества, которому и посвящена настоящая работа.

К настоящему времени получил развитие детерминированный подход к решению этой задачи. В основе его лежит построение эффективной (Парето-оптимальной) границы допустимого множества и оценка положения точки, определяющей состояние данного объекта, относительно этой границы. Эта задача решается построением калибровочной функции допустимого множества (задающей псевдометрику пространства состояний), которая на практике определяется из решения задачи линейного программирования. Этот метод называется Data Envelopment Analysis, DEA, и получил очень широкое распространение [2].

Несмотря на широкое распространение, метод имеет и принципиальные недостатки. Это, во-первых, высокая чувствительность эффективной границы к отдельным точкам (выпадающим из общей тенденции). Второй принципиальный недостаток метода состоит в том, что он использует информацию только о границе допустимого множества, но не о распределении точек на множестве. Это, в частности, приводит к тому, что если оцениваемая точка находится далеко от эффективной границы, то для нее точки эффективной границы не могут служить ориентирами.

Чтобы преодолеть эти недостатки, в последнее время появились работы по статистическому подходу к сравнительной оценке систем [3, 4].

Настоящая работа также использует статистический язык для сравнения состояний объектов. В основе работы лежит понятие конусного интервала (множества Александрова), что позволяет связать детерминированный и вероятностный подходы.

2. Постановка задачи

Предполагается, что каждый объект описывается $(n+m)$ показателями $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, где x_i — значение входа i (затраты) и y_j — значение выхода j (выпуски) в данном состоянии объекта. В пространстве входов-выходов $Z = X \times Y$ введем допустимое множество T (множество производственных возможностей)

$$T = \{(x, y) \in Z \mid x \text{ может произвести } y\} \tag{1}$$

(или, «y является следствием x»).

Предполагается, что множество производственных возможностей T (другие термины: «технология», «производственно-технологическое множество») удовлетворяет стандартным условиям (см., например, [5]), основные из которых

условие выпуклости:

$$\text{если } z_1,\ z_2 \in T,\ \text{ то и } \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 \in T, \quad \xi_1,\ \xi_2 \geqslant 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 1,$$

и условие свободного расходования:

$$\text{если } (x, y) \in T,\ \text{ то и } (x', y') \in T \quad \text{при} \quad x' \geqslant x, \quad 0 \leqslant y' \leqslant y.$$

Множество T индуцирует два многозначных отображения, определяемые его сечениями

$$B(x) = \{y \mid (x, y) \in T\}, \tag{2}$$

$$D(y) = \{x \mid (x, y) \in T\}, \tag{3}$$

каждое из которых может рассматриваться как обратное к другому.

Следуя работе Фаррелла [6], определим эффективность объекта $(x, y) \in T$ через калибровочную функцию множеств (2), (3):

$$q(x, y) = \inf\{q \geqslant 0 \mid qx \in D(y)\} = \inf\{q \geqslant 0 \mid (qx, y) \in T\}, \tag{4}$$

$$g(x, y) = \sup\{g \geqslant 0 \mid gy \in B(x)\} = \sup\{g \geqslant 0 \mid (x, gy) \in T\}. \tag{5}$$

На практике множество T строится по выборке $\{z_1, \ldots, z_N\} = T_N$. Если для аппроксимации $\widehat{T}$ множества T (по множеству T_N) используются оба условия, то тогда задачи (4), (5) при $T = \widehat{T}_{DEA}$ приводят к методу DEA, который реализуется решением задачи линейного программирования для каждого объекта. Если для аппроксимации $\widehat{T}$ множества T используется только второе условие, то тогда задачи (4), (5) при $\widehat{T} = \widehat{T}_{FDH}$ приводят к методу FDH [7], который лежит в основе статистического подхода к оценке объектов [3, 4].

В статистическом подходе предполагается, что T — носитель распределения

$$F(x, y) = \text{Prob}\,\{X \leqslant x, Y \geqslant y\}. \tag{6}$$

Совместная функция распределения (6) может быть представлена в виде (ср. (2), (3)):

$$F(x|y) = \text{Prob}\,\{X \leqslant x \mid Y \geqslant y\}\,\text{Prob}\,\{Y \geqslant y\} = F(x|y)F(x), \tag{7}$$

$$F(x|y) = \text{Prob}\,\{Y \geqslant y \mid X \leqslant x\}\,\text{Prob}\,\{X \leqslant x\} = F(y|x)F(y) \tag{8}$$

(отметим нетрадиционность определения условной функции распределения).

Тогда

$$\widetilde{q}(x,y) = \inf\{q \geqslant 0 \mid F(qx,y)\} = \inf\{q \geqslant 0 \mid F(qx|y)\}, \tag{9}$$

$$\widetilde{g}(x,y) = \sup\{g \geqslant 0 \mid F(x,gy)\} = \sup\{q \geqslant 0 \mid F(x|gy)\}, \tag{10}$$

где $F(x) > 0$, $F(y) > 0$.

Как и в детерминированном подходе, функции распределения строятся по выборке. В этом случае можно показать, что $\widetilde{q}(x,y) = q_{FDH}(x,y)$, $\widetilde{g}(x,y) = g_{FDH}(x,y)$.

Поставим теперь задачу:

дано состояние объекта $z = (x,y) \in T$, каким образом можно перейти в состояние $z_1 = (x_1,y_1) \in T$, лучшее, чем z, т. е. $x_1 \leqslant x$, $y_1 \geqslant y$?

Ясно, что задача (4), например, обеспечивающая пропорциональное уменьшение входа x при постоянном выходе y и соответствующее движение по лучу Rx до (глобально) эффективной границы множества $D(y)$, неприемлемо, если точка z «слишком далека» от эффективной границы. В этом случае требуется построение метрики на частично упорядоченном многообразии, учитывающее распределение точек на многообразии, и построение геодезической в этой метрике, реализующей оптимальное движение к эффективной границе.

Для краткости в настоящей работе рассматриваются объекты с одним выходом $z = (x_1, \ldots, x_n, y)$. В этом случае можно использовать пространство приведенных входов (входов на единицу выхода):

$$z = (x_1, \ldots, x_n, y) \to \left(\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}, 1\right) \to (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n).$$

(В дальнейшем будем опускать в обозначениях тильду.)

Итак, рассматривается n-мерное координатное пространство входов $X = R^n$. В этом пространстве действует отношение порядка $x' \geqslant x$ (x' хуже x, затраты!), задаваемое положительным конусом

$$K = \{x \mid x \geqslant 0\} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

При этом предполагается, что допустимые значения входов неотрицательны: $x \in K$. Конкретная популяция объектов задается допустимым множеством $D \subset K$ или распределением F на K. В последнем случае D — носитель этого распределения.

Замечание 1. В общем случае множество входов необходимо рассматривать как некоторое гладкое многообразие, на касательном расслоении которого задано отношение порядка положительным конусом.

3. Базовое определение

Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой, т. е. $(M, \mathcal{M})$ — измеримое пространство: M — некоторое множество, $\mathcal{M}$ — выделенная σ-алгебра его подмножеств, μ — неотрицательная мера на $\mathcal{M}$. Если $\mu(M) = 1$, то $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — вероятностная мера. Будем рассматривать M как n-мерное гладкое многообразие, на касательном расслоении которого задано отношение порядка $\geqslant$ положительным конусом $K = \{u \mid u \geqslant 0\}$, $u \in T_x M$.

Таким образом, рассматривается измеримое множество, локально имеющее линейную структуру. Пусть a и b, $b \geqslant a$, — две близкие точки, т. е. $b - a = u$, $u \in T_a M$. Определим конусный интервал

$$K(a, b) = \{z \mid a \leqslant z \leqslant b\} = K(a) \cap K^{-}(b). \tag{12}$$

Определение 1. *Расстояние $\tau(a, b)$ между двумя точками a и b, $b \geqslant a$, определим соотношением*

$$\tau^{n}(a, b) = \mu(K(a, b)). \tag{13}$$

Оставшаяся часть работы посвящена обоснованию этого определения. Здесь же отметим следующее.

1. Обычная процедура определения расстояния между двумя точками a и b метрического многообразия состоит в следующем. Фиксируется некоторый путь из a в b, тогда расстояние между a и b определяется как длина оптимального пути (геодезической) из a в b в метрике этого многообразия.

   В частично упорядоченном множестве априори задается отношение порядка (но не метрика), которое определяет конусный интервал $K(a, b)$, состоящий из множества всевозможных путей из a в b. Поэтому естественно определить расстояние между a и b как функцию суммы всех путей из a в b (степень n нужна для согласования размерностей длины и объема (меры)).
2. Отметим связь определения 1 с интегралами по траектории Фейнмана [8]. Отметим также, что аналогичный подход (но в дискретном варианте) развивается в теории квантовой гравитации, основанной на понятии каузального множества [9].
3. Один из путей построения метрики состоит в задании элементарного множества (рассматриваемого как единичный шар) и определении калибровочной функции этого множества. Если калибровочная функция описывается квадратичной формой (в этом случае шар задается скалярным произведением — симметричной билинейной формой), то для линейного пространства выходов она определяет евклидову метрику, а для пространства входов — псевдоевклидову [10–12]. Соответственно, на многообразии получим риманову или лоренцеву геометрию. При этом в римановой геометрии справедливо неравенство

треугольника, соответственно, геодезическая определяет кратчайший (минимальный) путь, а в лоренцевой геометрии справедливо обратное неравенство треугольника, соответственно, геодезическая определяет максимальный путь [13]. В настоящей работе показано, что лоренцева геометрия связана с (кумулятивной) функцией распределения.

4. Функция распределения

Фиксируем точку $a = 0$, на конусе $K = K(0)$ рассмотрим функцию

$$F(x) = \tau^n(x) = \mu(K(0, x)). \tag{14}$$

Если μ — вероятностная мера, то

$$F(x) = \text{Prob}\,\{X < x\}. \tag{15}$$

Будем предполагать, что $K = \text{supp}\ F$ и F — вогнутая функция на конусе K. Множества уровня

$$D_r = \{x \mid F(x) \geqslant r^n\} = \{x \mid \tau(x) \geqslant r\} \tag{16}$$

задают слоение конуса K: $D_{r'} \subset D_r \subset K$, $r' > r > 0$, $D_0 = K$, при этом D_r — выпуклое K-устойчивое множество (псевдошар конуса K радиуса r [11]).

Замечание 2. В общем случае построение распределения F состоит из этапов: задание распределения F_0 с носителем D_0 (определяемого физическими, технологическими, экономическими и прочими процессами); смешивание точек из D_0; включение (в распределение) точек, худших, чем точки из D_0. На детерминированном языке (т. е. на языке носителей распределения) эти этапы приводят к построению выпуклого K-устойчивого допустимого множества, минимально включающего D_0.

Обозначим через D_r^* границу множества D_r. Все точки этого множества находятся на одинаковом расстоянии от вершины конуса K. Если μ — вероятностная мера, то точки множества D_r^* называются квантилями (в этом случае $0 \leqslant r \leqslant 1$). Понятие квантили использовалось в [4] для определения интегральной оценки объектов.

Фиксируем число $r > 0$. Ранжирование объектов на конусе K можно рассматривать как некоторый процесс распространения возбуждения, который подчиняется принципу Гюйгенса. В случае частично упорядоченного множества:

$$D_{r+\theta} = \bigcup_{x \in D_r} K_\theta(x), \tag{17}$$

где $K_\theta(x)$ — конусный интервал длины θ с началом в точке x (см. следующий раздел).

Принципиальная черта рассматриваемых конструкций состоит в том, что для ранжирования объектов в соответствии с метрикой определения 1 достаточно иметь индикатор отношения порядка и генератор распределения, задающий выборку объектов D_N.

Определение 2. [14–15]. Назовем контестом такой эксперимент (тест), который для данной пары x, z из пространства X устанавливает отношение доминирования, т. е. определяет, что либо $x \geqslant z$, либо $z \geqslant x$.

Пусть функция $m_N(x)\colon X \to \mathbb{N}$ обозначает число объектов из D_N, лучших объекта x. Иными словами, $m_N(x)$ — число «поражений» для объекта x в результате контестов на выборке D_N [14].

Обозначим через $\sigma_i(x) = \sigma(x, x_i)$ индикатор конуса $K(x_i)$ (индикатор контеста для пары $(x,\ x_i)$. Функция $\sigma_i(x) = 1$, если $x_i > x$ или $x \in K(x_i)$, и $\sigma_i(x) = 0$ в противном случае. Тогда

$$m_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(x). \tag{18}$$

Определению (18) соответствует рекуррентное уравнение, которое реализуется через контесты на выборке D_N [16]:

$$m_{k+1}(x) = m_k(x) + \sigma_i(x), \quad m_0(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{19}$$

Аналогичным образом оценивается мера конусного интервала.

5. Конусный интервал

Опишем структуру конусного интервала в (17) (рассматриваемого как «элементарный шар» псевдоевклидового пространства) [15].

Фиксируем точку x и пусть u — вектор из точки x, $u \in K^-(x)$. Фиксируем линейный функционал p из сопряженного конуса и определим гиперплоскость

$$H = \{z \mid p(z) = r_0\}, \tag{20}$$

где $0 < r_0 < r = p(x)$.

Сечение

$$S = K^-(x) \cap H \tag{21}$$

задает множество эквивалентных ориентиров для точки x: они лучше x и находятся от x на одинаковом расстоянии по функционалу p.

Будем предполагать симметричность отношения порядка, тогда положительный конус $K(x)$ имеет то же сечение S [1]. Если теперь отрезок конуса $K(x)$ перенести (в точку y) так, чтобы конусы $K(y)$ и $K^-(x)$ имели общее сечение S, то получим конусный интервал

$$K(y, x) = K^-(x) \cap K(y)$$

с общим сечением S и осью $u = y - x$. Геометрия этого конусного интервала полностью определяется отношением порядка (т. е. конусом K) и линейным функционалом p. Действительно, все конусные интервалы

$K(y_0, x)$, где y_0 — (вторая) вершина конусного интервала при разных r_0 (и фиксированном p) подобны, поэтому точки y_0, $0 < r_0 < 0$, лежат на одном луче Ru из x (направление которого определяется линейным функционалом p).

Обозначим $K_\theta(u) = K_\theta(x) = K(y, x)$ — конусный интервал из точки x длины θ, $u = y - x$, $\tau(u) = \theta$.

Покажем, что вектор u ортогонален сечению S в метрике функционала p. Для этого рассмотрим продольное сечение конусного интервала двумерной плоскостью, проходящей через его ось u. Обозначим $e_i = z_i - y$, $z_i \in \overline{S}$, $i = 1, 2$, точки z_i лежат на пересечении образующих конусов $K^-(x)$ и $K(y)$.

Очевидно,

$$e_1 + e_2 = u, \quad \text{а} \quad w = e_1 - e_2 \in S,$$

тогда

$$u + w = 2e_1, \quad u - w = 2e_2.$$

Следуя [17], определим скалярное произведение через длины векторов

$$4(u, w) = (u + w)^2 - (u - w)^2 = 4(e_1^2 - e_2^2). \tag{22}$$

Но $e_1^2 = e_2^2$ (в метрике, задаваемой функционалом p), следовательно, $(u, w) = 0$, а так как w — произвольный отрезок S (проходящий через ось конусного интервала), то $u \perp S$.

Итак, конусный интервал, с точностью до подобия и параллельного переноса определяется заданием линейного функционала p.

Замечание 3. Двойственное утверждение: конусный интервал определяется заданием его оси u. Действительно, для каждого u внутри конуса K существует линейный функционал p, такой, что $u \perp S_p$.

Установим теперь связь между метрикой τ и плоской (локальной) метрикой p, т. е. покажем, как выбирается функционал p по множеству D_r.

Фиксируя $y = 0$ и рассматривая семейство конусных интервалов $K(0, x)$ одинаковой меры, построим семейство поверхностей $\overline{D}_r$ в конусе $K = K(0)$, которое параметризует точки этого конуса:

$$x \to \mu(K(0, x)) = r^n.$$

Зададим поверхность D_{r_0}, $0 < r_0 < r$, и будем рассматривать ее как цель (эффективную границу) для точки x. По множеству D_{r_0} определим линейный функционал p следующим образом. Пусть $\overline{S}$ — пересечение D_{r_0} с образующими конуса $K^-(x)$. Выберем на $\overline{S}$ n аффинно независимых точек z_i, по ним построим в n-мерном пространстве линейный функционал, который определяется однозначно: $p(z_i) = r_0$, $i = 1, \ldots, n$. Этот функционал задает гиперплоскость, которая является секущей множества D_{r_0} (и опорной к множеству $D_{r'}$, $r_0 < r' < r$).

Конусный интервал $K(y, x)$ по функционалу p строится уже описанным образом. Этот интервал имеет ось $u = y - x$, ортогональную сечению S и, следовательно, поверхности $\overline{D}_{r_0}$. Вектор u определяет оптимальное направление движения из x (см. далее).

Положим $y = 0$ и рассмотрим движение из x в $y = 0$. Пусть расстояние между x и y мало. Тогда можно считать, что слоение конуса $K(y)$ при малых r однородно, т. е. $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$, $\lambda > 0$, и каждая поверхность $\overline{D}_r$ может быть получена из другой пропорциональным сдвигом вдоль лучей из точки $y = 0$. В этом случае, фиксировав $r = r_0$ и определив калибр τ_0 множества $D_0 = D_{r_0}$, другие множества D_r можно определить по этому калибру:

$$D_r = \{x \mid \tau_0(x) \geqslant r/r_0\}.$$

Таким образом, в этом, однородном, случае метрика, определенная в (12), совпадает с метрикой, задаваемой калибровочной функцией множеств D_r, а оптимальное движение осуществляется по лучам из каждой точки x конуса K в его вершину.

В заключение этого раздела рассмотрим процедуру построения локальной цели p. Вернемся к конструкциям раздела 3 (в обозначениях настоящего раздела).

Фиксируем две точки x и y, $y \leqslant x$, пусть $K(y, x)$ — конусный интервал с вершинами из этих точек.

Фиксируем точку y и обозначим

$$\mu(K(y, z)) = F_y^+(z), \quad z \in K(y, x).$$

Для вероятностной меры

$$F_y^+(z) = \text{Prob}\,\{y < Z < z\}.$$

Аналогично, фиксируем точку x и обозначим

$$\mu(K(z, x)) = F_x^-(z), \quad z \in K(y, x).$$

Для вероятностной меры

$$F_x^-(z) = \text{Prob}\,\{z < Z < x\}.$$

Пусть

$$Q = \{z \mid F_x^-(z) = F_y^+(z)\}, \quad Q \subset K(y, x).$$

В условиях симметрии (т. е., по сути, равномерного распределения на интервале) $Q \subset S$, где S — центральное сечение интервала $K(y, x)$, и можно определить p: $p(Q) = p(S)$.

6. Двумерный случай

Двумерная плоскость естественно возникает при сравнении двух объектов. Пусть x, y — две фиксированные точки с общей точкой отсчета x_0. Если эти точки не лежат на одной прямой, то они определяют двумерную плоскость. Построим на ней интервал $K(y, x) = \{y \leqslant z \leqslant x\}$. Обозначим z_1, z_2 — точки пересечения образующих конусов $K^-(x)$, $K(y)$ (определяют центральное сечение интервала). Тогда

$$K(y, x) = [K(0, x) - K(0, z_2)] - [K(0, z_1) - K(0, y)], \tag{23}$$

где $A - B$ — разность множеств A и B.

Из (23) следует, что для любой (счетно-аддитивной) меры справедливо

$$\begin{aligned} F(y, x) &= [F(x) - F(z_2)] - [F(z_1) - F(y)] = \\ &= [F(x) + F(y)] - [F(z_1) + F(z_2)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Уточним построение конусного интервала $K(y, x)$. Фиксируем точку x и пусть $F(x) = r_1^2$ (т. е. $\tau(x) = r_1$). Выберем число $0 < r_0 < r_1$ и точки z_1, z_2 на образующих конуса $K^-(x)$ так, чтобы $F(z_1) = F(z_2) = r_0^2$. Найдем теперь точку y такую, чтобы точки z_1, z_2 лежали и на образующих конуса $K(y)$.

Пусть $F(y) = r_2^2$, $r_2 < r_0 < r_1$. Выберем число r_0 таким, чтобы

$$r_0^2 = r_1 r_2, \quad \text{или} \quad \tau^2(z_i) = \tau(x)\tau(y). \tag{25}$$

Тогда

$$F(y, x) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2$$

и, следовательно,

$$\tau(x, y) = \tau(x) - \tau(y) = r_1 - r_2.$$

Здесь

$$F(y, x) = \mu(K(y, x)) = \tau^2(y, x).$$

Рассмотрим частный случай.

Выберем две точки x^j из конуса K и два вектора e_i из образующих конуса так, что $x^j = x_1^j e_1 + x_2^j e_2$.

Определение 3. Точки x^j назовем эквивалентными, если

$$\frac{x_1^1}{x_1^2} = \frac{x_2^2}{x_2^1}. \tag{26}$$

Иными словами, точка x^1 во столько раз лучше точки x^2 по одному показателю, во сколько раз она хуже этой точки по другому.

Из (26) следует, что множество эквивалентных точек образует гиперболу

$$x_1 x_2 = \text{const} \tag{27}$$

двумерного конуса K.

Если векторы e_1, e_2 ортогональны, то произведение в (27) определяет (евклидову) площадь конусного интервала $K(0, x)$.

Итак, в рассматриваемом случае (равномерного распределения на K) $\mu_0(x) = x_1 x_2$ и $\tau_0(x) = (x_1 x_2)^{1/2}$.

Замечание 4. В общем случае эта метрика имеет вид

$$\tau_0(x) = (x_1 \dots x_n)^{1/n}.$$

Можно показать, что она суперлинейна, т. е. супераддитивна и вогнута [18].

Введем оператор, который диагонализируется в системе координат (e_1, e_2):

$$L = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1 k_2 = 1. \tag{28}$$

Тогда

$$e_i' = Le_i = k_i e_i, \quad i = 1, 2,$$

т. е. оператор L переводит конус в конус (меняя только шкалы) и, следовательно, сохраняет порядок.

Отметим, что на самом деле вводится семейство операторов

$$L = L(k)\colon\ K \to K,$$

зависящих от вектора

$$k = k_1 e_1 + k_2 e_2, \quad \text{причем} \quad \mu_0(k) = 1.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(e_1', e_2') = (Le_1, Le_2) = k_1 k_2 (e_1, e_2) = (e_1, e_2),$$

т. е. оператор L сохраняет скалярное произведение.

Замечание 5. В специальной теории относительности (СТО) оператор L — оператор Лоренца в световых координатах (переменных Дирака) [19].

Введем систему координат (u, w), где

$$u = e_1 + e_2, \quad w = e_1 - e_2.$$

Пусть вектор x в этой системе имеет координаты (t, s). Тогда

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = tu + sw.$$

Отсюда получим, что

$$t = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad s = \frac{x_1 - x_2}{2}, \tag{29}$$

$$x_1 = t + s, \qquad x_2 = t - s. \tag{30}$$

В этих координатах $\mu_0(x) = t^2 - s^2$ — интервал в СТО.

Фиксируем луч Ru, $u = e_1 + e_2$, и точку $a_1 \notin Ru$. Построим конусный интервал с осью на этом луче (т. е. выберем точки $x, y \in Ru$) так, чтобы точка a_1 определяла центральное сечение интервала $K(y, x)$, вторую точку этого сечения обозначим a_2 (в обозначениях (24) это точки z_1 и z_2).

Пусть $\tau(x) = r_1$, $\tau(y) = r_2$, $r_2 < r_1$, $u_1 = y - x$. По построению, интервалы $K(u)$ и $K(u_1)$ подобны, т. е. векторы u и u_1 лежат на одном луче, а векторы $w = e_1 - e_2$ и $w_1 = a_1 - a_2$ параллельны и ортогональны этому лучу. Таким образом, векторы (u_1, w_1) определяют ту же систему координат, что и (u, w) (возможно, с другим масштабом).

Определим координаты точки в этом базисе. Из $r_2 - t = t - s$ следует, что

$$t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad s = \frac{r_2 - r_1}{2}. \tag{31}$$

Из (29)–(31) получим

$$a_1^1 = r_2, \quad a_1^2 = r_1, \quad a_2^1 = r_1, \quad a_2^2 = r_2, \tag{32}$$

где a_i^j $i, j = 1, 2$, — координаты точек a_1, a_2 в базисе (e_1, e_2).

Итак, координаты точек a_1, a_2 в базисе (e_1, e_2) выражены через числа $r_1 = \tau(x)$ и $r_2 = \tau(y)$. В рассматриваемом случае эти числа определяются распределением точек на конусе:

$$\tau^2(x) = \mu(K(0, x)), \quad \tau^2(y) = \mu(K(0, y))$$

(и могут быть вычислены через контесты). В СТО r_1, r_2 — моменты отправки и получения светового сигнала инерционным наблюдателем u.

Отметим симметричность представления точек a_1 и a_2 относительно луча Ru — их координаты (32) просто меняются местами (В СТО это отображение $(t, x) \to (t' = x,\ x' = t)$, определяемое преобразованием Лоренца.)

Рассмотрим теперь два луча $u, u' \in K$. Пусть τ, τ' — шкалы на этих лучах.

Определение 4. Шкалы τ и τ' согласованы, если

$$\frac{\tau(x)}{\tau'(x')} = \frac{\tau'(y')}{\tau(y)}, \tag{33}$$

где x, y и x', y' — две пары точек на лучах u и u', соответственно.

Из (33) следует

$$\tau(x)\tau(y) = \tau'(x')\tau'(y'). \tag{34}$$

В частности, если $x' = y'$, то (34) переходит в

$$\tau(x)\tau(y) = \tau_0^2,$$

где $\tau_0 = \tau'(x') = \tau'(y') = \tau(a_i)$.

Ранее было показано, что числа $\tau(x)$ и $\tau(y)$ определяют координаты точек a_1 и a_2. Отсюда видна связь определений 3 и 4.

Замечание 6. В СТО τ — собственное время наблюдателя u. Соотношение (32) определяет синхронизацию собственного времени разными наблюдателями. Из него следуют основные положения специальной теории относительности [20].

7. Движение в частично упорядоченном множестве

Из предыдущих разделов видно, что оптимальное направление движения u из точки x определяется локальной целью — линейным функционалом p, который, в свою очередь, задается распределением (лучших) точек в окрестности x.

Именно, будем рассматривать вектор $u = e_1 + e_2$ как идеальное направление движения из точки x, где $u \perp w$, $w \in S$, а сечение S определяется локальной целью — функционалом p. С этим движением связана система координат (t, s), в которой вектор u имеет представление $(1, 0)$ (т. е. наблюдатель u в ней неподвижен).

Пусть теперь p' — новая цель и Ru' — новое направление движения. Определим это направление точкой (t', s') и пусть $\beta = s'/t'$ — относительная скорость этого движения.

В данной системе координат преобразование Лоренца имеет вид

$$L = L(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad k_1 k_2 = 1, \tag{35}$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$.

Из (35) получим, что $La' = a = (t, s)$, где $s = \gamma(s' - \gamma t') = 0$, т. е. оператор (35) переводит движение $u' \in K$ (с относительной скоростью β) в идеальное. Таким образом, оптимальное движение осуществляется таким образом, что вектор скорости в локальной системе координат всегда имеет представление $(1, 0)$. Отметим связь этой схемы управления с теоремой о выпрямлении [21].

8. Заключение

Рассмотрим отображение $T : K \to K$. Это отображение переводит любой вектор $u \in K$ в вектор $u' \in K$, при этом конусный интервал $K(u)$ переходит в конусный интервал $K'(u')$, а локальная метрика $p \to p'$.

Потребуем, чтобы

$$\mu\big(T^{-1}(K(u))\big) = \mu(K(u)).$$

Такая мера μ инвариантна относительно отображения T.

Отображение T, которое переводит конус в конус, сохраняет отношение порядка и называется каузальным автоморфизмом. В теореме Александрова—Зеемана показано, что всякий каузальный автоморфизм (для отношения порядка, задаваемого инвариантностью распространения света) является преобразованием Лоренца [1, 22]. Поэтому отображение T можно назвать обобщенным преобразованием Лоренца. Из этой работы видна его связь с преобразованиями с инвариантной мерой.

Литература

1. *Alexandrov A. D.* Contribution to chronogeometry // Canadian J. Math. 1967. Vol. 19. № 6. P. 1119–1128.
2. *Charnes A.*, *Cooper W. W.*, *Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // EJOR. 1978. № 2. P. 429–444.
3. *Casals C.*, *Florens J. P.*, *Simar L.* Nonparametric frontier estimation: a robust approach// J. Econometrics. 2002. № 106. P. 1–25.
4. *Aragon Y.*, *Daouia A.*, *Thomas-Agnan C.* Nonparametric frontier estimation: a conditinal quantile-based approach // Econometric Theory. 2005. № 21. P. 358–389.
5. *Nikaido H.* Convex Structures and Economic Theory. New York and London: Academic Press, 1968.
6. *Farrel M. J.* The measurement of productive efficiency // J. of the Royal Statistical Society. 1957. Series A (general). Part III. P. 253–281.
7. *Deprins D.*, *Simar L.*, *Tulkens H.* Measuring labor inefficiency in post offiices // The Perfomance of Public Enterprises: Concept and Measurements / Eds. Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 243–267.
8. *Feynman R. P.*, *Hibbs F. P.* Quantum mechanics and path integrals. N. Y.: McGraw-Hill, 1965.
9. *Reid D.* Intrduction to causal sets: an alternative point of view of spacetime structure // Canadian J. Phys. 2001. № 79. P. 1–16.
10. *Пропой А. И.* Две модели в оптимизации и управлении // АиТ. 2003. 12.
11. *Пропой А. И.* О построении метрики на конусе доминирования. I // АиТ. 2004. 4.
12. *Пропой А. И.* О построении метрики на конусе доминирования. II // АиТ. 2004. 5.
13. *Beem J.*, *Ehrlich P.* Global Lorentzian Geometry. N. Y.: Marcel Dekker Inc, 1981.
14. *Пропой А. И.* Статистический подход к оценке отношений // Динамика неоднородных сред. 2006. T. 10. 18–33.
15. *Пропой А. И.* Методы сравнения // Динамика неоднородных сред. 2007. T. 11. P. 14–35.
16. *Пропой А. И.* Об оценке систем по многим показателям // Динамика неоднородных сред. 2007. T. 11. P. 61–77.
17. *Jordan P.*, *Neumann J.* On inner products in linear, metric spaces // The Annals of Math. 1935. 2 Ser. Vol. 36. № 3. P. 719–723.
18. *Макаров В. Л.*, *Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука. 1973.
19. *Kim Y. S.*, *Noz M. E.* Dirac's light cone coordinate system // American J. Phys. 1982. № 50(8). P. 721–724.
20. *Bondi Hermann.* Relativity and Common Sense. New York: Dover Publications, 1980.
21. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
22. *Zeeman E. C.* Causality implies the Lorentz group // J. Math. Phys. 1964. № 5. P. 490–493.