Садыхов Г. С., Алшехаби Самер

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ СОСТОЯНИЙ ТЕХНОГЕННО-ОПАСНОГО РЕМОНТИРУЕМОГО ОБЪЕКТА*

Установлены непараметрические оценки вероятностей опасных и безопасных состояний ремонтируемого объекта, отказ и ремонт которого представляют техногенную опасность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ремонтируемый в процессе эксплуатации технический объект, отказ и ремонт которого представляют техногенную опасность. Пусть для определенности объект состоит из n последовательно соединенных между собой узлов, отказы которых независимы между собой и имеют следующие соответственно интенсивности отказов, равные:

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_i(t), \ldots, \lambda_n(t).$$

Тогда вероятность безотказной работы объекта в течение времени t, равная

$$P(t) = \exp\,(-\int\limits_0^t \lambda(x)\,dx), \text{где} \quad \lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x),$$

определяет одновременно и вероятность того, что в момент времени t объект будет находиться в состоянии безопасности, если он неремонтируемый. Возникает вопрос, как найти или оценить вероятность безопасного состояния в любой момент времени t для ремонтируемого техногенно-опасного объекта, имеющего произвольную (не обязательно последовательную) схему соединения узлов, законы распределения ресурсов которых, а также законы их восстановления непараметрические.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07–08–00574-а).

2. Решение задачи

Примем следующие условности:

— будем считать, что ремонт техногенно-опасного объекта начинается сразу после отказа;

— возможные состояния объекта в произвольный момент времени t — это опасное или безопасное состояния;

— законы распределения ресурса и процесса восстановления произвольные, т. е. непараметрические.

Обозначив вероятности опасного и безопасного состояний объекта в момент времени t соответственно через $P_0(t)$ и $P_б(t)$, имеем

$$P_0(t) + P_б(t) = 1. \tag{1}$$

Согласно определению $\mu(t)$ — интенсивности восстановления объекта в момент времени t имеем при $\Delta t \to 0$ [1]

$$P_r\left(\frac{t < \eta < t + \Delta t}{\eta} > t\right) = \mu(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где левая часть это вероятность того, что время восстановления η будет находиться на временном интервале $(t, t + \Delta t)$ при условии, что исследуемый объект до момента времени t после отказа не был восстановлен. Следовательно, вероятность того, что объект будет в момент времени $t+\Delta t$ находиться в безопасном состоянии при условии, что в момент времени t находился в опасном состоянии, согласно теореме умножения зависимых событий, равна при $\Delta t \to 0$

$$P_0(t)[\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)]. \tag{2}$$

Точно также, согласно определению $\lambda(t)$- интенсивности отказов объекта в момент времени t при $\Delta t \to 0$, имеем [1]

$$\Pr\left(\frac{t < \zeta < t + \Delta t}{\zeta} > t\right) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где левая часть это вероятность того, что время отказа ζ будет находиться на временном интервале $(t, t + \Delta t)$ при условии, что в течении времени t рассматриваемый объект был безотказен. Откуда находим вероятность того, что объект в момент времени $t + \Delta t$ будет находиться в безопасном состоянии при условии, что в момент времени t он находился в этом же состоянии, равна согласно теореме умножения вероятностей следующему выражению:

$$P_б(t)[1 - \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)], \tag{3}$$

где квадратная скобка равна, согласно определению интенсивности отказов, вероятности того, что на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ не будет отказа.

Применяя теорему сложения вероятностей, определенных соотношениями (2) и (3), найдем

$$P_{б}(t+\Delta t)=P_0(t)\mu(t)\Delta t+P_{б}(t)\bigl(1-\lambda(t)\Delta t\bigr)+o(t),$$

откуда, с учетом (1), получим

$$\frac{P_{б}(t+\Delta t)-P_{б}(t)}{\Delta t}=\mu(t)-\bigl(\lambda(t)+\mu(t)\bigr)P_{б}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, найдем следующее дифференциальное уравнение:

$$P'_{б}(t)+\bigl(\lambda(t)+\mu(t)\bigr)P_{б}(t)=\mu(t). \tag{4}$$

Решая это уравнение при естественном начальном условии

$$P_{б}(0)=1,$$

получим

$$P_{б}(t)=P(t)Q(t)\left(1+\int\limits_0^t\frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}\,dx\right), \tag{5}$$

где $P(t)$ — вероятность безотказной работы объекта в течение времени t;

$$Q(t)=\exp\left\{-\int\limits_0^t\mu(x)\,dx\right\} \tag{6}$$

— вероятность того, что объект не будет восстановлен в течение времени t.

В частности, при $\mu(t)\equiv 0$ из формулы (5) следует, что

$$P_{б}(t)\equiv P(t).$$

Другими словами, если объект неремонтируемый, то вероятность его безотказного состояния в момент времени t совпадает с вероятностью его безотказной работы в течение времени t. Заметим, что это свойство было уже отмечено выше для объекта, узлы которого соединены между собой последовательно.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Для вероятности опасного состояния объекта справедлива следующая формула*:

$$P_0(t)=P(t)Q(t)\int\limits_0^t\frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}\,dx. \tag{7}$$

Доказательство. Используя формулу (5), имеем

$$P_0(t) = 1 - P(t)Q(t)\left(1 + \int\limits_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}\,dx\right). \tag{8}$$

Из соотношения (6) найдем

$$\mu(t) = -\frac{Q'(t)}{Q(t)}.$$

Учтя это, имеем

$$\int\limits_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}\,dx = \int\limits_0^t \frac{1}{P(x)}d\left(\frac{1}{Q(x)}\right),$$

откуда найдем

$$\int\limits_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}\,dx = \frac{1}{P(t)Q(t)} - 1 - \int\limits_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (8), получим искомую формулу (7). □

Следствие. *Если* $\lambda(t) \equiv 0$, *то* $P_0(t) \equiv 0$ *и тогда в соответствии с формулой* (1) *имеем* $P_б(t) \equiv 1$.

Другими словами, «абсолютное» отсутствие отказов для рассматриваемых объектов влечет за собой идеальную их безопасность в эксплуатации.

Теорема 1. *Для вероятности опасного состояния объекта справедлива следующая оценка*:

$$P_о(t) \leqslant 1 - P(t), \tag{9}$$

где $P(t)$ — *вероятность безотказной работы объекта в течение времени* t.

Доказательство. Так как

$$\frac{Q(t)}{Q(x)} \leqslant 1, \quad (x \in (0,t)),$$

то из формулы (7) найдем

$$P_о(t) \leqslant P(t)\int\limits_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)}\,dx.$$

Поскольку [1]

$$\lambda(x) = -\frac{P'(x)}{P(x)},$$

то из последней оценки имеем

$$P_{\text{о}}(t) \leqslant -P(t) \int_0^t \frac{P'(x)}{P^2(x)}\, dx.$$

Откуда, интегрируя правую часть, получим искомую оценку (9). □

Следствие. *Для вероятности безопасного состояния объекта справедлива следующая оценка*:

$$P_{\text{б}}(t) \geqslant P(t). \tag{10}$$

В частности из оценок (9) и (10) получим следующие важные для практических приложений оценки:

$$P_{\text{о}}(t_\gamma) \leqslant 1 - \gamma,$$
$$P_{\text{б}}(t_\gamma) \geqslant \gamma,$$

где $t_\gamma = \sup\{t\colon\ P(t) \geqslant \gamma\}$ — γ-процентный ресурс объекта при заданном уровне γ, $(0 < \gamma < 1)$.

Если рассматриваемые объекты дополнительно являются «стареющими», то оценки (9) и (10) можно улучшить. Далее будем считать, что объект «стареющий» в процессе эксплуатации, если интенсивность отказов его $\lambda(t)$ как функция времени t монотонно не убывает. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для вероятностей опасного и безопасного состояний стареющего объекта справедливы следующие оценки*:

$$P_{\text{о}}(t) \leqslant \frac{t}{r}, \tag{11}$$

$$P_{\text{б}}(t) \geqslant 1 - \frac{t}{r}, \tag{12}$$

где r — средний ресурс, $t < r$.

Доказательство. Из формулы (7) с учетом того, что

$$\frac{P(t)}{P(x)} \leqslant 1, \qquad \frac{Q(t)}{Q(x)} \leqslant 1,$$

имеем

$$P_{\text{о}}(t) \leqslant \int_0^t \lambda(x)\, dx. \tag{13}$$

Так как

$$\int_0^t \lambda(x)\, dx = -\ln P(t),$$

то, используя следующую оценку для стареющих объектов [1]:

$$P(t) \geqslant e^{-t/r}, \quad t < r,$$

получим

$$\int\limits_0^t \lambda(x)\,dx \leqslant \frac{t}{r}.$$

Учитывая это в соотношении (13), найдем искомые оценки (11) и (12).

Можно показать, что, во-первых, — оценки (11) и (12) лучше соответствующих оценок (9) и (10), во-вторых, — оценки (11) и (12), а также оценки (9) и (10) являются достижимыми в своих классах рассматриваемых объектов.

Рассматривая непараметрические оценки (9), (10), (11) и (12) видим, что в оценочных функциях не участвуют характеристики восстановительного процесса. В связи с этим возникает вопрос насколько это закономерно. Для этой цели рассмотрим следующий пример.

Пусть

$$\lambda(t) \equiv \frac{1}{r}, \quad \mu(t) \equiv \frac{1}{\rho},$$

где $r > 0$ — средний ресурс, $\rho > 0$ — среднее время восстановления, т. е. ресурс и процесс восстановления имеют экспоненциальные законы распределения.

Тогда согласно (7) легко найдем

$$P_{\text{о}}(t) = \frac{\rho}{r+\rho}\left(1 - \exp\left\{-\frac{r+\rho}{r\rho}t\right\}\right).$$

Откуда при $t \to 0$ имеем

$$P_{\text{о}}(t) = \frac{t}{r} + o(t).$$

$\square$

Видно, что вероятность опасного состояния не зависит от интенсивности восстановления при $t \to 0$.

Следующее утверждение позволяет обобщить этот вывод для любых законов распределений ресурса и восстановительного процесса.

Теорема 3. *Если интенсивность отказов объекта $\lambda(t)$ тождественно не равна нулю и*

$$P_{\text{б}}(a) = 1, \tag{14}$$

то существует такое целое число m, для которого справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{t\to a}\frac{P_0(t)}{(t-a)^m} = \frac{\lambda^{(m-1)}(a)}{m!}. \tag{15}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 разложим вероятность безопасного состояния объекта $P_б(t)$ в окрестности точки $t = a$ в ряд Маклорена, ограничившись линейной частью. Тогда, с учетом соотношений (4) и (14), имеем при t$\to a$

$$P_б(t) = 1 - \lambda(a)(t-a) + o(t-a).$$

Откуда видно, что если $\lambda(a) \neq 0$, то теорема доказана. Если же $\lambda(a) = 0$, то продолжаем рассуждения, рассматривая ряд Маклорена в окрестности точки $t = a$ и привлекая квадратичную ее часть. В этом случае имеем при $t \to a$

$$P_б(t) = 1 + \left(\frac{P_б''(a)}{2}\right)(t-a)^2 + o(t-a)^2. \tag{16}$$

Используя (4), находим

$$P_б''(a) = -\lambda'(a).$$

Тогда, согласно (16), имеем

$$P_б(t) = 1 - \left(\frac{\lambda'(a)}{2}\right)(t-a)^2 + o(t-a)^2.$$

Из полученного выражения следует, что, если $\lambda'(a) \neq 0$, то утверждение теоремы справедливо и доказательство завершается. Если же $\lambda'(a) = 0$, то продолжаем дальнейшее разложение вероятности безопасного состояния объекта $P_б(t)$ как функцию переменной t, привлекая последовательно степени $(t-a)^3$, $(t-a)^4$и т. д.

Применив метод математической индукции, заключаем, что процесс должен быть конечным, ибо в противном случае $\lambda(t) \equiv 0$, чего не может быть согласно условию теоремы. Пусть последний шаг наших разложений в ряд заканчивается на степени $(t-a)^m$. Тогда при t$\to a$ имеем

$$P_б(t) = 1 - \frac{\lambda^{(m-1)}(a)}{m!}(t-a)^m + o(t-a)^m, \tag{17}$$

где $\lambda^{(m-1)}(a) \neq 0$. Откуда найдем искомое соотношение (15). □

Следствие. *В условиях теоремы* 3 *при* $t \to a$ *вероятности состояний объекта* $P_б(t)$ *и* $P_0(t)$ *как функции времени* t *зависят только от принимаемых значений интенсивности отказов и не зависят от характеристик восстановительного процесса.*

Из соотношения (17) видно, что вероятность безопасного применения техногенно-опасного объекта в течение достаточно малой длительности сверх времени $t = a$ близка к единице, несмотря на то, что значение интенсивности отказов в этот момент времени может оказаться большим. Следовательно, для безопасного использования объектов, например, одноразового применения сверх времени $t = a$ в течение непродолжительной длительности достаточно, чтобы выполнялось лишь соотношение (14), поскольку влияние величины интенсивности отказа незначительно, а влияние характеристик восстановительного процесса вовсе исключено.

Таким образом, для технического объекта, отказ и ремонт, которого представляют техногенную опасность, предложены непараметрические оценки вероятностей его опасных и безопасных состояний.

Литература

1. *Барлоу Р.*, *Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М: Сов. радио, 1969. 488 с.