Смольяков В. Э., Смольяков Э. Р.

Институт системного анализа РАН, Москва

ОПТИМАЛЬНЫЙ ДЕЛЕЖ В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ МИРОВОЙ ЭНЕРГЕТИКИ*

В компактной форме излагается теория поиска наисильнейшего игрового равновесия и единственного справедливого дележа в кооперативных играх и на базе этих результатов формулируется и анализируется динамическая агрегированная модель рыночного взаимодействия двух регионов, один из которых является нефтедобывающим, а другой имеет развитую экономику и производит все необходимое для обоих регионов, причем рассматриваются также упрощенные модели, допускающие нахождение аналитических решений.

1. Введение

Моделирование динамики развития конкурирующей мировой экономики и энергетики (в рамках достаточно агрегированной модели) с использованием достигнутых в последние годы огромных успехов в общей теории игр может обеспечить максимально эффективное развитие всех стран и регионов как в условиях отсутствия кооперации между ними, так и, особенно, в условиях кооперации, всегда наиболее выгодной для всех участников.

До недавнего времени моделирование экономики с учетом конкуренции экономических субъектов проводилось по существу исключительно на основе ставшего классическим понятия равновесия по Нэшу. Однако это понятие равновесия обладает весьма серьезными недостатками. Например, существует оно лишь в весьма ограниченном классе задач, причем нередко в тех случаях, когда существует, приводит к абсолютно неприемлемому решению в том смысле, что выигрыши всех участников в изучаемой экономической модели могут оказаться сколь угодно малыми, в то время как существуют иные решения, не менее устойчивые, чем

* Работа выполнена по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» РАН, проект № 1–3 и при поддержке РФФИ (проект № 06–01–00821).

равновесие по Нэшу, и в то же время обеспечивающие всем участникам выигрыши гораздо большие, чем обеспечивает им равновесие по Нэшу.

Пусть, например, имеется N игроков, каждый i-й из которых, выбирая точку (стратегию) u_i на доступном ему множестве U_i стремится максимизировать свою (платежную) функцию

$$J_i(u) = J_i(u_1, \ldots, u_N), \quad i = \overline{1, N},$$

при условии, что эта функция зависит также и от стратегий

$$u^i = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_N)$$

остальных участников. В любой конфликтной задаче всегда существуют в каком-то смысле устойчивые конфликтные равновесия. Примером подобного конфликтного равновесия может, например, служить ситуация u^*, в которой имеют место равенства

$$\max_{u_i \in U_i} J_i(u_i, u^{i*}) = J_i(u^*), \quad i = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Подобную ситуацию называют равновесием по Нэшу [1] (назовем ее для краткости C^N-равновесием). Справедливости ради, следует отметить, что в неявной форме понятие равновесия (1) было найдено еще в 1928 г. С. Роусом [2] для экономических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями.

Непрактичность равновесия по Нэшу демонстрирует, к примеру, следующая простейшая игра с двумя участниками, в которой у каждого из игроков имеется всего по две стратегии и их платежные функции задаются матрицами, численные значения элементов которых указывают на возможные их выигрыши (например, в рублях — от одной копейки до 10 млрд рублей):

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \cdot 10^9 \\ 2 \cdot 10^{-2} & 2 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 10^{10} & 9 \cdot 10^9 \\ 10^{-2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Стратегия 1-го игрока u_1 — это выбор одной из двух строк, а стратегия 2-го u_2 — выбор одного из двух столбцов, так что, например, если 1-й игрок выбирает вторую строку, а 2-й игрок — второй столбец, то в игре реализуется ситуация a_{22}, в которой достигается кооперативный выигрыш

$$J(u^0) = \max_{u_1, u_2}(J_1 + J_2) = 2 \cdot 10^{10}.$$

Между прочим, заметим, что ситуация a_{21}, в которой каждый из игроков получает выигрыш, равный двум или одной копейке, равновесна по Нэшу в этой игре [1], так как элемент a_{21} матрицы J_1 является максимумом в первом ее столбце и одновременно является максимумом во второй строке второй матрицы. Ситуация же a_{12} в этой игре, согласно новой теории игр [3–6], с одной стороны, является не менее устойчивой, чем ситуация a_{21} равновесия по Нэшу, а с другой, в отличие от этого равновесия, обеспечивает участникам в неклассической равновесной ситуации a_{12} выигрыши неоценимо большие, чем они могут получить в равновесной по Нэшу ситуации a_{21}.

Этот простейший пример показывает, что всегда наиболее выгодно игрокам ориентироваться на кооперативный выигрыш (т. е. в рассматриваемом случае — на ситуацию a_{22}), если, конечно, имеется такой алгоритм раздела кооперативного дохода, который устраивает всех участников в том смысле, что в случае отказа от кооперации они ни в каких случаях не смогут получить выигрыши больше, чем положенная им справедливая доля от раздела кооперативного дохода. Если же они не кооперируются, то ситуация устойчивого равновесия должна гарантировать всем максимально большой выигрыш, а вовсе не тот мизерный, который, к примеру, обеспечивает им в приведенном примере равновесие по Нэшу. В отличие от классической теории игр только теория [3–6], с одной стороны, позволяет в рассмотренном примере найти наисильнейшую равновесную и взаимно выгодную для участников ситуацию a_{12}, а с другой, обеспечивает устойчивый справедливый дележ кооперативного дохода, если участники кооперируются. Классическая же теория игр [1, 2, 7, 8] не обеспечивает ни существование, ни, тем более, единственность решения игровых задач, причем даже с учетом попыток ее улучшения [9, 10].

Идеальным решением («справедливым дележом») кооперативной игры (с трансферабельной полезностью, т. е. с возможностью раздела любого выигрыша на любые части) можно назвать такое [3], которое, во-первых, существует в любой игре; во-вторых, с ним вынужден согласиться любой участник игры, т. е. оно должно удовлетворять некоторым требованиям естественной устойчивости, в соответствии с которыми выход участника из кооперации не позволит ему выиграть больше причитающейся ему доли от «справедливого» дележа-решения; в-третьих, это решение («справедливый» дележ) является единственным.

Только кооперативная теория [3, 6], в отличие от всех ранее известных кооперативных теорий, удовлетворяют всем этим требованиям.

Основным недостатком всех строившихся теорий кооперативных игр, в том числе и теорий [9, 10], является опора их всех на понятие характеристической функции [7]. В [9, 10] было показано, что даже использование некоторой «улучшенной» характеристической функции и замена неудовлетворительной аксиомы доминирования в [7] гораздо более удовлетворительной с точки зрения устойчивости получаемых дележей аксиомой не позволило все же существенно приблизиться к понятию идеального решения кооперативных игр. Построить удовлетворительную теорию кооперативных и некооперативных игр удалось только, построив предварительно удовлетворительную теорию конфликтных равновесий [3].

Систематизированное построение общей теории конфликтных равновесий изложено в [3–6]. Эта общая теория использует в качестве отдельных своих составляющих все то ценное, что было получено в классической теории игр, и дополняет эту теорию множеством новых понятий игрового равновесия. Согласно этой теории вышерассмотренная простейшая игра имеет следующие базовые равновесия [3]:

$$\begin{gathered}A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{21}), \quad A_2 = (a_{12}, a_{21}, a_{22}),\\ A = (a_{12}, a_{21}); \quad B_1 = B_2 = B = (a_{12}, a_{21});\\ C_1 = C_2 = C = D_1 = D_2 = D = a_{21};\\ \overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \overline{D} = D'_1 = D'_2 = D' = a_{12}.\end{gathered}$$

Таким образом, в этой игре имеется два наисильнейших равновесия — равновесие по Нэшу a_{21}, совершенно не устраивающее обоих игроков, и не менее сильное равновесие a_{12}, в наибольшей степени устраивающее обоих участников, если они не кооперируются. А в ситуации a_{22} достигается кооперативный выигрыш, равный $2 \cdot 10^{10}$ рублей, который теоретически они могли бы разделить между собой, если бы сумели договориться. И основой для этого договора служат результаты работы [6], в которой построена кооперативная теория, дающая единственный справедливый дележ, улучшить для себя результаты которого в результате отказа от кооперации не смог бы ни один из участников и никакая коалиция из них.

2. Агрегированная динамическая модель мировой экономики и энергетики

Пусть на некотором интервале времени $T = (t_0, t_1)$ на мировом рынке взаимодействуют между собой два региона, один из которых является экономически высокоразвитым, но собственных энергоресурсов у него недостаточно, а второй — сырьевой, поставляющий в экономически развитый регион энергопродукты, необходимые для экономики первого региона. И пусть суммарный выпуск первого региона моделируется производственной функцией $h = H(z, x_1, t)$, зависящий от основных фондов, $x(t)$, скорости использования в производстве некоторого существенного природного ресурса $z(t)$ и автономного технического прогресса. Предполагается, что $h'_z(\cdot, x_i, t) = \infty$. Доходы второй экономики зависят только от добычи и экспорта в первую экономику природного ресурса, замещающего природный ресурс первой экономики или же совпадающий с ним. Обе торгующие друг с другом экономики будем называть игроками.

В этом разделе сформулируем задачу в относительно общем виде, допускающим только численное решение (которое нами не получено), а в последнем разделе приведем упрощенную постановку задачи, допускающую аналитическое решение. Все переменные в общей постановке задачи берутся такими, чтобы переход от общей постановки к упрощенной требовал как можно меньшего числа переименований переменных, Если $x_1(t)$ — основные фонды первого игрока в стоимостном выражении, δ — коэффициент амортизации фондов, а u_1 — инвестиции — суммарная скорость расходов на основные фонды, включая амортизационные расходы, то динамику фондов первого игрока можно определить уравнением

$$\dot{x}_1 = u_1 - \delta \cdot x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \tag{3}$$

где x_1^0 — стоимость фондов в начальный момент $t = 0$.

Первый игрок использует некоторый существенный для функционирования его экономики природный ресурс, который он добывает и потребляет со скоростью $u_2(t)$, а второй игрок производит такой же или некоторый другой, замещающий его ресурс со скоростью $v_1(t)$. Если через $x_3(t)$ и $x_2(t)$ обозначить объемы природных ресурсов (в натуральной форме) соответственно первого и второго игроков в момент t, то динамику потребления этих ресурсов на производственные цели можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{x}_3 &= -v_1(t), \quad x_3(0) = x_3^0, \end{aligned} \tag{4}$$

где x_2^0 и x_3^0 — разведанные (или предполагаемые) на момент t_0 природные ресурсы игроков. Чтобы учесть тот факт, что по мере истощения природных ресурсов затраты на их добычу возрастают, моделировать эти затраты в единицу времени представляется наиболее естественным следующими экспоненциальными зависимостями

$$\frac{\beta_1 u_2}{e^{\alpha_1 x_3} - 1}, \quad \frac{\beta_2 v_1}{e^{\alpha_2 x_2} - 1}.$$

Если через $u_3(t)$ обозначить скорость импорта первым игроком ресурсов второго, то, очевидно, можно записать

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t} u_3(t)\, dt \leqslant \int_{t_0}^{t} v_1(t)\, dt, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{5}$$

Производственная функция $h(u_2 + ku_3, x_1, t)$ предполагается непрерывной по всем аргументам. Коэффициент k — это коэффициент замещения ресурсов. Чем он больше, тем для первого игрока импортируемый ресурс u_3 предпочтительнее собственного ресурса u_2. Второй игрок продает свой природный энергоресурс первому игроку по некоторой цене $v_2(t) > 0$, так что скорость его выручки от продажи этого энергоресурса составляет $v_2 v_1$.

Управляющие переменные $u \overset{\triangle}{=} (u_1, u_2, \text{г}_{13})$ и v_1 в формулируемой игровой задаче, как следует из самого их смыслового определения, не могут быть отрицательными. Не могут они быть также и слишком большими, вследствие естественных технических ограничений, а следовательно, удовлетворяют ограничениям

$$0 \leqslant u_1 \leqslant u_1^0, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant u_2^0, \quad 0 \leqslant u_3 \leqslant u_3^0, \quad 0 \leqslant v_1 \leqslant v_1^0. \tag{6}$$

В качестве функций полезности в формулируемой игровой задаче наиболее естественно взять чистые доходы регионов на некотором планируемом интервале времени $T \triangleq (t_0, t_1)$, определяемые интегралами

$$J_1 = \int\limits_T e^{-\gamma_1 t}\left[h(u_2, ku_3, x_1, t) - u_1 - \beta_1 u_2 (e^{\alpha_1 x_3} - 1)^{-1} - v_2 u_3\right] dt, \tag{7}$$

$$J_2 = \int\limits_T e^{-\gamma_2 t}\left[v_2 u_3 - \beta_2 v_1 (e^{\alpha_2 x_2} - 1)\right] dt. \tag{8}$$

Множители $e^{-\gamma_i t}$ являются коэффициентами дисконтирования полезностей (можно принять $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Игроки заинтересованы в максимизации функционалов (7) и (8), причем первый игрок распоряжается выбором вектора управления $u = (u_1, u_2, u_3)$, а второй — вектора $v = (v_1, v_2)$. Из самой постановки ясно, что условия $J_1 \leqslant 0$ и $J_2 \leqslant 0$ неприемлемы для игроков, а следовательно, должны удовлетворяться неравенства

$$J_1 > 0, \quad J_2 > 0. \tag{9}$$

В этой игровой модели не существует равновесия по Нэшу. В самом деле, если допустить его существование для пары (u^*, v^*), то второй игрок может беспрепятственно поднять цену $v_2 > v_2^*)$, в результате чего он получит выигрыш $J_2 > J_2^*$, т.е. больший, чем в равновесной по Нэшу ситуации, что противоречит определению равновесия по Нэшу. Следовательно, для решения поставленной экономической игровой задачи не годятся классические подходы, тем более, опирающиеся на равновесие по Нэшу, а необходимы новые понятия равновесия, разработанные в [3–6].

Найти аналитическое решение подобной задачи абсолютно нереально хотя бы потому, что в этой задаче имеется пять управляющих переменных, в то время как пытаться решать игровые задачи аналитически реалистично только в случае не более чем трех управляющих переменных, да и то лишь в случае, когда для каждой из управляющих переменных допускается только конечное (причем небольшое) число значений. Это ярко демонстрирует даже самая простая игра с тремя управляющими переменными в задаче с тремя участниками, приведенная в следующем разделе.

3. Наисильнейшие игровые равновесия и оптимальный дележ в кооперативных играх

Сформулированные ниже две теоремы, основанные на множестве предложенных в [3–6] понятий равновесия, являются основой для поиска наисильнейшего равновесия в некооперативных игровых задачах и единственного кооперативного решения (дележа кооперативного дохода).

Заметим, что в некоторых случаях для определения единственного справедливого дележа в кооперативной игре на основе теории конфликтных равновесий возникает необходимость использовать также понятие оптимальной последовательности коалиций, введенное в [3, 9], основанное на следующей функции:

$$\pi(P_k) \triangleq \frac{1}{k}\left[v(P_k) - \sum_{i\in P_k} v(i)\right] \triangleq \frac{\Delta v(P_k)}{k},$$

характеризующей средний прирост доходов любых k игроков, объединившихся в коалицию P_k, по сравнению со случаем, если бы они действовали самостоятельно. Здесь через v_{P_k} обозначена классическая характеристическая функция

$$v(P_k) \triangleq \sup_{z_{P_k}} \inf_{z_{P_{N-k}}} J_{P_k}(z_{P_k}, z_{P_{N-k}}),$$

$$(P_k \cup P_{N-k} = P_N, \quad P_k \cap P_{N-k} = \varnothing).$$

Непересекающиеся коалиции $P_i^1, P_j^2, P_k^3, \ldots$ из множества всех возможных коалиций $R(N)$ называются оптимальными [3, с. 166], если они удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}\pi^1 \triangleq \pi(P_i^1) = \pi(\overline{P}^1) = \max_{P^\alpha\in R(N)} \pi(P^\alpha),\\ \pi^2 \triangleq \pi(P_j^2) = \pi(\overline{P}^2) = \max_{P^\alpha\in R(N-i)} \pi(P^\alpha),\\ P_i^1 = \cup\overline{P}^1, \quad P^\alpha \cap P_i^1 = \varnothing, \quad P_j^2 = \cup\overline{P}^2; \ldots,\end{gathered} \tag{10}$$

где, например, P_i^1 — это наибольшая коалиция (с числом участников i) на множестве коалиций $\overline{P}^1$ с одинаковым средним приростом доходов π^1.

Очевидно, $\pi^1 > \pi^2 > \pi^3 > \ldots$, а следовательно, на последовательности оптимальных коалиций игроки из «главной выигрывающей коалиции» P_i^1, т. е. той, средний доход членов которой максимален (и определяется функцией π^1), не заинтересованы принять в свой состав ни одного из оставшихся $(N - i)$ игроков, а игроки из второй оптимальной коалиции P_j^2 (определяемой функцией π^2) на том же основании не примут в свой состав игроков, не вошедших в первую и вторую оптимальные коалиции, и т. д.

Предложение [3, с. 166]. Последовательность оптимальных коалиций $P^1, P^2, P^3, \ldots$ может быть неединственной только в том случае, если хотя бы одно из значений π^s в равенствах (8) достигается не менее чем на двух оптимальных коалициях, имеющих непустое пересечение.

Последовательность оптимальных коалиций $P^1, P^2, P^3, \ldots, P^\omega$ вводит следующие естественные ограничения на справедливый дележ кооперативного дохода;

$$\sum_{s\in P^1} x_s \geqslant v(P^1), \quad \sum_{s\in P^2} x_s \geqslant v(P^2), \quad \ldots, \quad \sum_{s\in P^\omega} x_s \geqslant v(P^\omega). \qquad (11)$$

В [3] теория кооперативных игр не была доведена до состояния, позволяющего находить в любой игре единственный справедливый дележ. Этот пробел в теории закрывает следующая теорема, доказанная [6].

Теорема 1. *Пусть*

$$J_{P_N}(q^0) = v(P_N)$$

— максимальный доход кооперации из N игроков, а q^* — единственное (наисильнейшее) равновесие. Тогда справедливый дележ

$$x_1 + \ldots + x_N = v(P_N)$$

задается следующими равенствами с учетом неравенств (9):

$$x_i = \Gamma_i v(P_N) \stackrel{\triangle}{=} \Gamma_i J_{P_N}(q^0), \quad i = \overline{1, N}, \qquad (12)$$

где

$$\Gamma_i = \frac{J_i(q^*)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} J_i(q^*)\right)}, \quad i = \overline{1, N},$$

или (что то же самое) — равенствами

$$x_i = J_i(q^*) + \Gamma_i\left(J_{P_N}(q^0) - \sum_{i=1}^{N} J_i(q^*)\right), \quad i = \overline{1, N}, \qquad (12a)$$

причем если кооперативный доход достигается в равновесной ситуации q^*, т. е. если

$$v(P_N) = J_{P_N}(q^*),$$

то кооперативная игра (как следует из формулы (10)) имеет единственное решение (справедливый дележ), задаваемое, в случае недостижения ограничений (9), равенствами $x_i = J_i(q^*)$, определяющими непосредственно выигрыши игроков в этой ситуации. Если же дележ (10) не удовлетворяет ограничениям (9), то ищется совместное решение системы (9), (10). А если в задаче не одно, а множество Q^* равновесий, то полное множество претендующих на решение дележей в кооперативной игре получается подстановкой в вышеприведенные формулы всех ситуаций $q^* \in Q^*$, причем устраивающий всех участников единственный справедливый дележ в игре всегда может быть получен с учетом ранжирования силы равновесий. В частности, в случае существования *в игре m почти эквивалентных наисильнейших равновесий* $(q^{1*}, \ldots, q^{m*})$ *справедливый дележ кооперативного дохода находится из совместного решения системы неравенств* (9) *и следующих равенств*

$$x_i = \frac{J_i(q^{1*}) + \ldots + J_i(q^{m*})}{\sum\limits_{k=1}^{N} \left(J_k(q^{1*}) + \ldots + J_k(q^{m*})\right)} J_{P_N}(q^0). \tag{13}$$

Заметим, что неединственность последовательности оптимальных коалиций в (9) формально порождает и неединственность дележа. Однако эта неединственность всегда разрешима. Здесь приводится только A'- равновесие и его всегда непустое расширение — A-равновесие. А множество всех тех понятий равновесия, которые используются при решении приведенного ниже примера, можно найти в [3–6].

Определение [3]. Ситуация

$$q^* = (q^*_{P_k}, q^*_{P_{N-k}}) \in G$$

называется коалиционно A_{P_k}-экстремальной для коалиции P_k, состоящей из k участников, если

$$G(q^*_{P_{N-k}}) = q^*_{P_k},$$

или каждому состоянию

$$q_{P_k} \in G(q^*_{P_{N-k}}) \setminus q^*_{P_k}$$

коалиции P_k можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние

$$\widehat{q}_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})$$

остальных $N - k$ участников, так, чтобы

$$J_{P_k}(q_{P_k}, \widehat{q}_{P_{N-k}} < q_{P_k} >) \leqslant J_{P_k}(q^*). \tag{14}$$

Ситуация $q* \in G$ называется A'-равновесием [3], если она коалиционно экстремальна для любой коалиции P_k, $1 \leqslant k < N$, из всего возможного числа $2^N - 2$ коалиций, т. е. если

$$A' = \bigcap_{P_k} A_{P_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N - 1.$$

Поскольку множество A'-равновесий нередко оказывается пустым, то в качестве основы для построения базовой цепи из последовательно усиливающихся равновесий в [3–6] принимается понятие всегда существующего A-равновесия, получающегося если в определении 1 рассматриваются коалиции P_1 (число которых равно N), состоящие только из одного участника i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, в связи с чем неравенство (12) переходит в N неравенств

$$J_i(q_i, \widehat{q}^{\,i}) \leqslant J_i(q^*), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

Теорема 2 [6]. *В любой конфликтной задаче всегда выполняются следующие связи между базовыми равновесиями и их итерациями*:

$$
\begin{array}{rccc}
 & & & G \supset \overline{C} \\
 & & & \cup \quad \cap \\
D \subset C \subset & \subset B \subset & & \\
\overline{D} \subset & ;D' \subset & \subset B' \subset & A \supset \overline{C}^{0} \\
 & ;\widehat{D}' \subset \widehat{C}' \subset & & \\
 & & & \cup \quad \cap \\
D^{1} \subset C^{1} \subset & \subset B^{1} \subset & & \\
\overline{D}^{1} \subset & ;D'^{1} \subset & \subset B'^{1} \subset & A^{1} \supset \overline{C}^{1} \\
 & ;\widehat{D}'^{1} \subset \widehat{C}'^{1} \subset & & \\
\end{array}
$$

....

Пример. Рассмотрим специальной подобранный пример игры с тремя участниками, в которой ограничения (5) нарушаются. Платежные функции в этой игре принимают следующие значения: $J(E) = (5, 6, 5)$, $J(F) = (3, 5, 6)$, $J(H) = (2, 8, 3)$, $J(K) = (4, 7, 5)$, $J(L) = (7, 1, 6)$, $J(M) = (8, 4, 5)$, $J(N) = (4, 3, 4)$, $J(P) = (6, 2, 6)$. Все 8 возможных ситуаций и значения платежных функций в них изображены на рисунке в системе координат (q_1, q_2, q_3), где q_i — стратегия i-го игрока, принимающая всего два значения. Найдем наисильнейшие равновесия и решение кооперативной игры.

Базовая система равновесий [3–6] и ее итерации приводят к следующим результатам:

$$A_1 = (E, F, K, L, M, N, P), \quad A_2 = (E, F, H, K, M, N, P),$$

$$A_3 = (E, F, K, L, M, N, P), \quad A = (E, F, K, M, N, P),$$

$$A_{P_{12}} = (E, F, H, K, L, M, P), \quad A_{P_{13}} = (L, M),$$

$$A_{P_{23}} = (E, F, H, K), \quad A_{P_2} = \varnothing, \quad A' = \varnothing,$$

$$B_1 = (E, F, K), \quad B_2 = (E, M), \quad B_3 = (E, K, M), \quad B = (E),$$

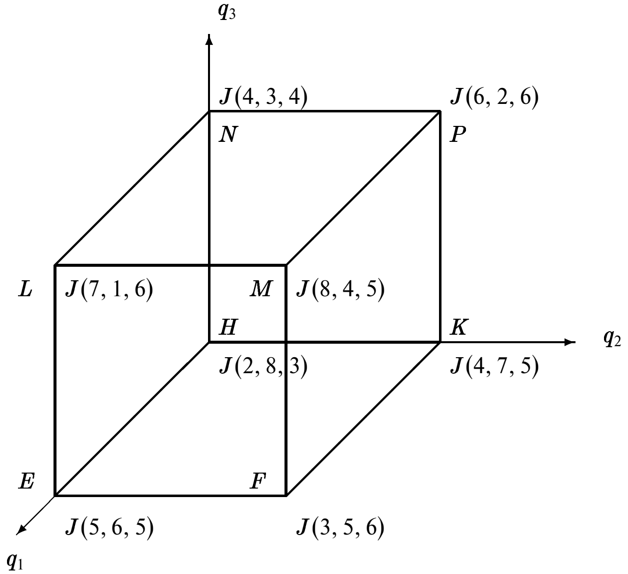
$$D'_1 = \overline{D}_1 = D'_2 = \overline{D}_1 = (E), \quad D'_3 = \overline{D}_3 = (E, K, M),$$

$$D' = \overline{D} = (E), \quad D'^{n} = \overline{D}^{n} = (E), \quad A^1_1 = (E, M, K, N, P),$$

$$A^1_2 = (F, F, K, M, N), \quad A^1_3 = (E, F, K, M, N, P),$$

$$A^1 = (E, K, M, N), A^1_{12} = (E, K, M, P), \quad A^1_{13} = (E, M),$$

$$A^1_{23} = (E, F, K), \quad A^1_{P_2} = (E), \quad A^{'1} = (E),$$



$$
\begin{gathered}
B_1^1 = (E, K), \quad B_2^1 = (E, M), \quad B_3^1 = (E, K, M), \quad B^1 = (E),\\
(D_1')^1 = \overline{D}_1^1 = (E), \quad (D_2')^1 = \overline{D}_1^1 = E,\\
(D_3')^1 = \overline{D}_3^1 = (E, K, M) \quad (D')^1 = \overline{D}^1 = (E),\\
C_1^1 = (E, K), \quad C_2^1 = (E, M), \quad C_3^1 = (E, K, M), \quad C^1 = (E),\\
D_1^1 = (E), \quad D_2^1 = (E), \quad D_3^1 = (E, K, M), \quad D^1 = (E),\\
(\overline{C}^0)^1 = (E, K, M, N), \quad A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = A^2 = A^1 = (E, K, M, N),\\
B_1^2 = (E, K), \quad B_2^2 = (E, M), \quad B_3^2 = (E, K, M), \quad B^2 = (E),\\
A_{12}^2 = (E, K, M), \quad A_{13}^2 = (EM), \quad A_{23}^2 = (E, K), \quad A_{P_2}^2 = A'^2 = (E).
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что E — единственное наисильнейшее равновесие, а M, K и N — не играющие никакой роли очень слабые равновесия. Следовательно, дележ кооперативного дохода, реализуемого в ситуации M и равного 17, должен проводится по формуле (10) с учетом ограничений (9), если они нарушаются. Заметим, что игроки могут гарантировать себе следующие выигрыши:

$$v(1) = 3, \qquad v(2) = 1, \qquad v(3) = 4, \tag{16}$$

$$v(1,2) = 6, \qquad v(1,3) = 13, \qquad v(2,3) = 11. \tag{17}$$

Формула (10) без учета ограничений (9) приводит к дележу $x_1 = (5/16)17 \approx 5{,}3$, $x_2 = (6/16)17 \approx 6{,}4$, $x_3 = (5/16)17 \approx 5{,}3$ кооперативного дохода, пропорционального выигрышам игроков в равновесной ситуации E. Однако функция π достигает максимума (равного 3) на коалиции (1,3) и при этом ограничения (9) нарушаются, так как $x_1 + x_3 = 5{,}3 + 5{,}3 = 10{,}6 < 13$. Возможен только один дележ $x_1 = 6{,}5 > v(1) = 3$, $x_2 = 4 > v(2) = 1$, $x_3 = 6{,}5 > v(3) = 4$, удовлетворяющий формулам (9) и (10) при выполнении обязательного условия, что 1-й и 3-й игроки должны получить поровну (так как в равновесной ситуации их выигрыши равны), и при условии, что второй игрок останется в кооперации. Так что только этот последний дележ и является единственным справедливым.

4. Упрощенные экономические модели

Модель мировой экономики и энергетики (1)–(7) можно существенно упростить, сохранив присущие ей основные особенности. При этом открывается возможность аналитического ее исследования. В постановке, допускающей аналитическое исследование, можно использовать в качестве производственной функции h функцию типа Кобба—Дугласа

$$h = A(t)x_1^q z^r,$$

где q, r — некоторые выбранные степени. При изучении задачи в «нулевом» приближении можно ограничиться случаем, когда высокоразвитый регион (типа Японии) не имеет собственных энергоресурсов и вынужден покупать их у энергопроизводящего региона (например, у арабских стран), живущего в основном за счет продажи своих энергоресурсов. В этом случае вместо пяти управляющих переменных можно ограничиться всего двумя. При этом возможно отождествление управляющих переменных u_2, u_3 и v_1 и введение вместо них всего одной переменной $v = u_2 = u_3 = v_1$. Подобное отождествление означает, что первый игрок (экономический регион) не производит (или производит пренебрежимо мало) своих собственных энергоресурсов и всю свою экономику строит только на импортируемом энергоресурсе v, объемы производства и поставки которого первому игроку всецело зависят от второго игрока, а первый игрок может управлять только переменной $u = u_1$, определяющей собственное инвестирование своей экономики.

На первоначальном этапе исследования производственная функция h может быть взята в следующем, достаточно реалистичном виде

$$h = A(t)\sqrt{x_1 v},$$

где коэффициент $A(t)$ моделирует автономный технический прогресс. Игровая задача (1)–(7) в этом случае сводится к следующей: первый игрок, выбирая управление $u(t)$, стремится максимизировать функционал J_1, а второй игрок, выбирая управление $v(t)$, заинтересован в максимизации своего функционала J_2:

$$J_1 = \int\limits_T \left[A(t)\sqrt{x_1 v} - u(t) - v(t)\right] dt, \tag{18}$$

$$J_2 = \int\limits_T \left[v(t) - \frac{\beta v}{e^{\alpha x_2} - 1}\right] dt, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1 \cdot \delta, \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= -v, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$0 \leqslant u \leqslant u^0, \quad 0 \leqslant v \leqslant v^0, \tag{21}$$

где обозначено $\beta \overset{\triangle}{=} \beta_2$, $\alpha \overset{\triangle}{=} \alpha_2$.

Для решения этой задачи воспользуемся необходимыми условиями равновесности, даваемыми теоремой 5.4.3 из [3], согласно которой вводим в рассмотрение гамильтонианы

$$H^1 = p_0^1(A\sqrt{x_1 v} - u - v) + p_1^1(u - x_1\delta) - p_2^1 v,$$

$$H^2 = p_0^2\left(1 - \frac{\beta}{e^{\alpha x_2} - 1}\right)v + p_1^2(u - x_1\delta) - p_2^2 v,$$

где $p_0^1 = p_0^2 = 1$, а множители Лагранжа $p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2$ удовлетворяют уравнениям (5.4.53) из [3], принимающим вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1^1 &= -\frac{\partial H^1}{\partial x_1} = -p_0^1 A\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{x_1}} + p_1^1\delta, \quad p_1^1(t_1) = 0, \\ \dot{p}_2^1 &= 0, \quad p_2^1(t_1) = 0, \\ \dot{p}_1^2 &= -\frac{\partial H^2}{\partial x_1} = -p_1^2\delta, \quad p_1^2(t_1) = 0, \\ \dot{p}_2^2 &= p_0^2\frac{\alpha\beta v e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2} - 1)^2}, \quad p_2^2(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Система уравнений (22) имеет следующее решение

$$\begin{aligned} p_1^1(t) &= \frac{1}{2}e^{\delta t}\int\limits_t^{t_1} A(t)e^{-\delta\tau}\sqrt{\frac{v}{x_1}}d\tau \geqslant 0, \\ p_2^1(t) &= 0, \quad p_1^2(t) = 0, \\ p_2^2(t) &= -\alpha\beta\int\limits_t^{t_1}\frac{v(\tau)e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2} - 1)^2}d\tau \leqslant 0. \end{aligned} \tag{23}$$

С учетом решения (23) гамильтонианы H^1 и H^2 принимают вид

$$\begin{aligned} H^1 &= (A\sqrt{x_1 v} - v) + (p_1^1 - 1)u - p_1^1 x_1 \delta, \\ H^2 &= \left[\left(1 - \frac{\beta}{e^{\alpha x_2} - 1}\right) - p_2^2\right] v. \end{aligned} \tag{24}$$

В каждый момент t далее ищутся все типы равновесий на плоскости (u, v) в локальных задачах, платежными функциями в которых являются гамильтонианы (24), причем при максимизации гамильтониана H^1 по u достаточно знать лишь то, что множитель $p_1^1 = p_1^1(t)$ задается неотрицательной явной функцией от времени (19), а при максимизации гамильтониана H^2 достаточно знать лишь то, что множитель $p_2^2 = p_2^2(t)$ задается неположительной явной функцией от времени (19). Отсюда следует, что в гамильтониане H^2 коэффициент, стоящий перед управлением v, всегда положителен, а в гамильтониане H^1 важно лишь знать момент, разделяющий значения $p_1^1(t) > 1$ и $p_1^1(t) < 1$.

Определение наисильнейшего игрового равновесия в этой задаче возможно только при конкретизации всех параметров задачи, причем интерес представляли бы только близкие к реальности числовые значения, недоступные авторам. Так что проведенное исследование этой задачи лишь показывает, что в динамических моделях конфликтующих экономик вполне возможно нахождение взаимно устраивающего участников динамического игрового равновесия.

Литература

1. *Nash J.* Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. № 2. P. 286–295.
2. *Roos C. F.* Generalized Lagrange Problems in the Calculus of variatoions // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. Vol. 30. P. 360–386.
3. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
4. *Смольяков Э. Р.* Расширенная базовая система конфликтных равновесий // ДАН РФ. 2006. Т. 409. № 2. С. 163–166.
5. *Смольяков Э. Р.* Вспомогательные сильные равновесия для динамических конфликтных задач // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1497–1506.
6. *Смольяков Э. Р.* Единственный справедливый дележ в статических и динамических кооперативных играх // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 12. С. 1637–1648.
7. *Нейман Дж.*, *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
8. *Shapley L. S.* A value for n-person games // Contributions to the theory of games. V. 2. Ann. Math. Studies. № 28. Prinseton Univ. Press, 1953. P. 307–317.
9. *Смольяков Э. Р.* Понятие решения коалиционной игры N лиц с трансферабельностью // ДАН СССР. 1973. Т. 210. № 2. С. 1290–1292.
10. *Смольяков Э. Р.* Аксиоматика теории кооперативных игр // ДАН РФ. 2002. Т. 383. № 2. С. 179–183.