
II. Теоретические проблемы динамических систем

Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В.

Институт системного анализа РАН, Москва

НОВЫЙ ПОДХОД К ОБЪЯСНЕНИЮ ПРИРОДЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ*

В работе предложен оригинальный метод анализа движения вязкой несжимаемой жидкости при переходе к турбулентному режиму на примере численного решения трехмерной задачи течения жидкости за уступом при различных числах Рейнольдса. Показано, что на начальных стадиях развитие турбулентности в задаче происходит в соответствии с универсальным сценарием Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого, то есть через субгармонический каскад бифуркаций устойчивых двумерных торов.

1. Введение

Возникнув более ста лет назад, проблема турбулентности, заключающаяся в объяснении природы случайного движения нелинейной сплошной среды и нахождении способов ее самосогласованного описания, остается и сейчас одной из самых притягательных и интригующих проблем классической физики. Главным в проблеме турбулентности — неупорядоченного хаотического движения нелинейной сплошной среды — был и остается вопрос о ее природе, т. е. причинах и механизмах возникновения хаоса.

В разное время было предложено несколько моделей, претендовавших на объяснение механизмов возникновения турбулентности в нелинейных сплошных средах, но каждый раз довольно быстро выяснялась их несостоятельность. Наиболее долгоживущей оказалась модель

* Работа поддержана РФФИ (гранты № 08–07–00074а и № 06–07–89047а) и программой ОИТВС РАН (проект 1.12).

Ландау—Хопфа [1, 2], представлявшая возникновение турбулентности как бесконечный или очень большой каскад последовательных бифуркаций Андронова—Хопфа, ведущих к возникновению квазипериодического движения с бесконечным или очень большим набором несоизмеримых частот. Однако эта модель не нашла подтверждения в экспериментах с гидродинамической турбулентностью (см. [3, 4]). Эксперименты по конвекции жидкости показали, что она переходит в турбулентное состояние либо следуя сценарию Фейгенбаума удвоения периода основного периодического движения, либо спектр мощности после появления первых двух частот становится сплошным. Для объяснения последнего явления Рюэлем и Такенсом был предложен сценарий, в соответствии с которым родившееся после третьей бифуркации Андронова—Хопфа движение на трехмерном торе является неустойчивым и разрушается, переходя в движение на странном аттракторе [5].

Сценарий Рюэля—Такенса возникновения турбулентности в нелинейных сплошных средах считался предпочтительным до последнего времени, пока в цикле работ авторов данной статьи не был обнаружен и теоретически обоснован единый универсальный механизм перехода к пространственно-временному хаосу в нелинейных системах дифференциальных уравнений с частными производными по сценарию Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого через субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций устойчивых двумерных торов [6, 7]. Этот сценарий имеет место в системе уравнений Брюсселятора с диффузией, в уравнении Курамото—Цузуки (зависящем от времени уравнении Гинзбурга—Ландау) и в уравнении рыночной экономики Магницкого. Целью настоящей работы является показать численно, что именно этот универсальный сценарий перехода к пространственно-временному хаосу реализуется и в процессе возникновения гидродинамической турбулентности вязкой несжимаемой жидкости.

2. Постановка задачи

Большинство исследователей, в том числе и авторы данной статьи, полагают, что развитую турбулентность в вязкой несжимаемой жидкости можно описывать уравнениями Навье—Стокса [4, 8, 9]. Рассмотрим начально-краевую задачу в случае трехмерных по пространству эволюционных уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в следующем классическом [13] виде: найти вектор-функцию скорости $V: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ и скалярную функцию давления $p: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla(VV) - \nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 V \quad \text{в } Q = \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = 0 \quad \text{в } Q = \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

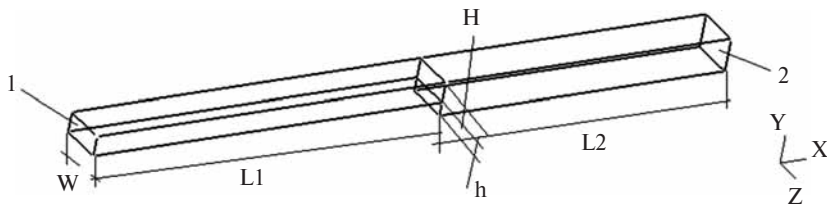


Рис. 1. Область решения: 1 — входная граница, 2 — выходная граница

$$V = 0 \text{ на } \partial\Omega \times [0, T], \quad V = f(x) \text{ на } \partial\Omega \times [0, T],$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times [0, T], \tag{3}$$

$$V(x, 0) = V_0 \text{ на } \Omega. \tag{4}$$

Здесь Ω — ограниченная область решения с границей $\partial\Omega$, T — время, $R = VL/\nu$ — число Рейнольдса, составленное по характерному масштабу движения, ν — кинематическая вязкость несжимаемой жидкости. В связи со сложностью и нелинейностью рассматриваемой системы уравнений для решения начально-краевой задачи (1)–(4) применяются численные методы.

В данной работе предложен оригинальный метод анализа движения вязкой несжимаемой жидкости при переходе к турбулентному режиму на примере решения задачи течения жидкости за уступом, рассматривавшейся многими авторами [10–12]. Область решения Ω задается в виде, показанном на рис. 1.

Граничное условие на входной границе $\partial\Omega$ задается классическим ламинарным решением Пуазейля [9] без возмущений. Начальное условие в Ω задается путем нахождения решения (1)–(4) для ламинарного режима течения при числе Рейнольдса $R = 400$. Геометрические размеры области: $L_1 = 55$, $L_2 = 45$, $h = 0,1$, $H = 0,2$, $W = 0,8$. Линейный масштаб в числе Рейнольдса L определяется как $2WH/(W + H)$. Жидкость считается несжимаемой с плотностью равной 1,0 и кинематической вязкостью для воды, равной $1,011 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Внешние силы отсутствуют.

3. Метод решения

Существует достаточно большое количество методов численного решения уравнений (1)–(4), например, [23]. Все они, так или иначе, основаны на отдельном решении задачи адвекции (оператор $\nabla(VV)$), задачи диффузии ($R^{-1}\nabla^2 V$) и выполнения условия соленидальности вектор-функции V ($\text{div } V = 0$) для нахождения функции давления p . К таким схемам можно отнести схемы MAC, SMAC, SIMPLE, PISO и др. [23, 24].

Основную трудность при численном моделировании системы (1)–(4) составляет решение адвекционной части уравнений и нахождение функции давления. Общий обзор методов дан в [14–17, 20, 24].

3.1. Схема расщепления

Для решения уравнений (1)–(4) авторы применяют схему расщепления по физическим процессам, предложенную в [28]. В полудискретном виде схема записывается следующим образом.

$$\text{Шаг 1. } \frac{V' - V^n}{\Delta t} = -\nabla(V^n V^n).$$

$$\text{Шаг 2. } \frac{\tilde{V} - V'}{\Delta t} = \frac{1}{R} \nabla^2 \tilde{V} \text{ — неявная схема.}$$

$$\text{Шаг 3. } \nabla^2 p = -\frac{\nabla \cdot \tilde{V}}{\Delta t}, \quad \text{div } V^{n+1} = 0 \text{ — решение уравнения Пуассона.}$$

$$\text{Шаг 4. } V^{n+1} = \tilde{V} - \Delta t \nabla p \text{ — поправка скорости с учетом соленоидальности.}$$

Здесь V' и \tilde{V} — скорость на промежуточных шагах при переходе с n -ого на $n + 1$ слой, V^n — скорость на n -ом слое. Пусть в начальный момент времени известно, например, из начальных условий, значение вектор-функции V и функции p во всей области расчета, и вектор-функция V соленоидальна в Ω . На первом шаге схемы решается уравнение переноса (невязкое уравнение Бюргерса), на втором — уравнение диффузионного типа для учета диффузии. Шаги 1 и 2 не удовлетворяют условию соленоидальности вектор-функции V , поэтому на четвертом шаге значения V подправляются с учетом давления, вычисленного на шаге 3 с помощью уравнения Пуассона, при условии соленоидальности V . Сходимость применяемой схемы расщепления к системе уравнений (1)–(4) рассмотрена в [13, 28].

3.2. Численная реализация

Схема расщепления реализована методом конечного объема на структурированной сетке искривляемых выпуклых кубов. Вводится произвольное сеточное пространство $\Omega \in \{1, \dots, N\}$, покрытое связанными выпуклыми произвольными кубами — конечными объемами (КО). Для примера рассмотрим шаг 1. Применяя теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$\int_V \frac{\partial V_x}{\partial t} dW = - \oint_S F n_x dx + G n_y dy + P n_z dz,$$

где $F = V_x V_x$, $G = V_x V_y$, $P = V_x V_z$, W — объем КО. Записав интегралы на дискретном сеточном пространстве, получим, например, для $V_x = u$,

$$V_y = v, V_z = w$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \Delta W_{\Omega_{[i,j]}} = - \sum_{k=0}^5 (u_k^n u_k^n n_{xk} S_k + u_k^n v_k^n n_{yk} S_k + u_k^n w_k^n n_{zk} S_k),$$

где k — сторона КО куба, S — площадь грани КО, n — вектор единичной нормали.

Для расчета значений переменных на гранях КО применяются различные схемы, например, при расчете второй частной производной по пространству на шаге 2 используется схема

$$\frac{\tilde{V} - V'}{\Delta t} \Delta W_{\Omega_{[i,j]}} = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^5 \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \Big|_k n_{kx} S_k + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \Big|_k n_{ky} S_k + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \Big|_k n_{kz} S_k \right),$$

где каждая частная производная рассчитывается с применением перекрестных конечных объемов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \Big|_k &= \frac{1}{\Delta W_{\Omega_{[i+0,5k,j+0,5k]}}} \int_{\Omega_{[i+0,5k,j+0,5k]}} \tilde{V} dy = \\ &= \frac{1}{\Delta W} [(\tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_i) dy_{i+1-k} - (\tilde{V}_{c_1} - \tilde{V}_{c_2}) dy_c], \end{aligned}$$

где $V_{c_1} = 0,25(V_{i+1,j+1} + V_{i+1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j})$, $dy_c = y_{i+1} - y_i$ и т. д. Подобная аппроксимация вторых производных по пространству позволяет получить 4-й порядок точности. С целью ускорения расчета уравнения Пуассона для давления применяется итерационная схема. Значение давления хранится в центре ячейки КО. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона в произвольном КО с границей $\partial\omega$

$$\nabla^2 p(x) = f(x); \quad \frac{\partial p(x)}{\partial n} \Big|_{x \in \partial\omega} = f_1(x); \quad p(x) \Big|_{x \in \partial\omega} = f_2(x).$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Запишем оператор Лапласа

$$\nabla^2 p(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)$$

для $p(x) \in C^3$. Применяя теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{1}{\Delta W} \int_{\partial\omega} p_k(\vec{n}, d\vec{S}) \approx \frac{1}{\Delta W} \sum_{k=0}^5 p_k n_{jk} S_k,$$

где p_k — значение дискретной переменной на k -й грани КО. Подставляя полученное выражение в выражение оператора Лапласа и записывая

на введенной системе КО, будем иметь

$$\nabla^2 p(x) = \frac{1}{\Delta W} \sum_{k=0}^5 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_k}{\partial x_j} n_{jk} S_k = \frac{1}{\Delta W} \sum_{k=0}^5 \frac{a_k(p_k - p)}{d_k},$$

где

$$a_k = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (n_{jk} S_k)^2} \quad \text{— проекция площади } k\text{-й грани,}$$

$$d_k = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_{jk} - x_j)^2} \quad \text{— расстояние от центра хранения дискретного значения функции } p \text{ до грани КО.}$$

Приводя подобные значения, получим дискретное выражение для правой части уравнения Пуассона

$$f(x) = \frac{1}{\Delta W} \sum_{k=0}^5 \frac{a_k(p_k - p)}{d_k}.$$

Для итерационного нахождения решения уравнения Пуассона приведенная схема заменяется на следующую:

$$p^{n+1} = \frac{\frac{1}{\Delta W} \left(\sum_{k=0}^5 \frac{a_k p_k}{d_k} \right) - f}{\frac{1}{\Delta W} \left(\sum_{k=0}^5 \frac{a_k}{d_k} \right)},$$

где n — номер итерации. Наиболее эффективной схемой для решения приведенного уравнения является метод верхней релаксации. Итерации прекращаются по достижению заданной точности решения. Граничные условия типа Неймана реализуются в данной схеме достаточно просто путем подстановки значения производной в саму схему, а граничные условия Дирихле — путем установки соседних «пустых» ячеек.

3.3. Применение TVD реконструкции переменных

Если описание конвективных потоков на шаге 1 схемы будет выполнено с применением центральной по пространству схемы, то при $R \rightarrow \infty$ численная схема не будет монотонной и приведет к порождению нефизических осцилляций в решении. Для преодоления этой трудности применяется ряд нелинейных схем с ограничителями. Рассмотрим модельное уравнение переноса

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

где $a > 0$ — const. Будем считать, что полная вариация решения записывается как

$$TV(U^n) = \sup \sum_i |U_{i+1}^n - U_i^n|,$$

где супремум берется по всем разбиениям, причем выполнены условия монотонности:

- 1) в $U(x)$ не могут возникать новые экстремумы;
- 2) значения локальных минимумов не уменьшаются, а локальных максимумов не увеличиваются.

Тогда из условий монотонности следует, что полная вариация решения не должна возрастать по времени, то есть

$$TV(U(t_2)) \leq TV(U(t_1)), \quad \forall t_2 \geq t_1.$$

Это и есть принцип TVD. Следовательно, схему для модельного уравнения можно представить в виде:

$$U^{n+1} = LU^n \quad \text{и} \quad TV(LU^n) \leq TV(U^n),$$

где $L = f(U)$ — оператор в сеточном пространстве. Пусть

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} LU_i^n.$$

Введем центральный оператор, для которого $L = \Lambda_{i+1/2} - \Lambda_{i-1/2}$. Тогда для того, чтобы решение U удовлетворяло принципу TVD, необходимо, чтобы при $a > 0$

$$L(U) = \begin{cases} \Lambda_i - \Lambda_{i-1}, & \text{если имеет место локальный экстремум;} \\ \Lambda_{i+1/2} - \Lambda_{i-1/2}, & \text{если локальный экстремум отсутствует.} \end{cases}$$

В общем виде можно записать с применением антидиффузионного члена:

$$\Lambda_{i-1/2} = \Lambda_{i-1} + \frac{B(r)}{2}(\Lambda_{i-1} - \Lambda_{i-2}), \quad r = \frac{\Lambda_i - \Lambda_{i-1}}{\Lambda_{i-1} - \Lambda_{i-2}},$$

где $B(r)$ — переключатель, обеспечивающий выполнение принципа TVD, являющийся функцией от локального вида решения. Аналогично

$$\Lambda_{i+1/2} = \Lambda_i + \frac{B(r)}{2}(\Lambda_i - \Lambda_{i-1}), \quad r = \frac{\Lambda_{i+1} - \Lambda_i}{\Lambda_i - \Lambda_{i-1}}.$$

Вид оператора $B(r)$ позволяет осуществлять переключение между различными типами схем. Наименьшей численной диффузией обладает схема SuperBEE, используемая при DNS и LES [14–17, 20]. Для этой схемы $B(r) = \max\{0, \min\{2r, 1\}, \min\{r, 2\}\}$. Данная схема применяется так же при расчете значений потоков для уравнений газовой динамики. Как пример в [20] рассмотрено моделирование уравнения Бюргера с нулевой диффузией, переносимое скаляр в радиальном направлении под 45° .

3.4. Интегрирование по времени

Приведенные в схеме (пункт 2) методы интегрирования по времени исходной системы уравнений обладают первым порядком точности по времени. Для интегрирования по времени применяется m -стадийная схема Рунге—Кутта

$$\begin{aligned} V_i^0 &= V_i^n, \\ V_i^1 &= V_i^0 - \alpha_1 \Delta t \mathfrak{K}(V^0), \\ &\dots\dots\dots \\ V_i^m &= V_i^0 - \alpha_m \Delta t \mathfrak{K}(V^{m-1}), \\ V_i^{n+1} &= V_i^m. \end{aligned}$$

где \mathfrak{K} — оператор в сеточном пространстве. После сравнения результатов был использован 4-х стадийный метод Рунге—Кутта, т. е. $m = 4$, так как дальнейшее увеличение точности незначительно сказывается на результатах, а затраты компьютерного времени и ресурсов возрастают линейно [21]. При неявной схеме интегрирования уравнения диффузии (на шаге 2) для решения системы уравнений вида $X = BA^{-1}$ используется метод GMRES [27] ввиду того, что матрица A не является ленточной. В среднем требуется около 4 циклов итерации для метода GMRES. Для достижения решения на шаге 3 применяется глобальная невязка по давлению, вида $\max |p^{n+1} - p^{n-1}| < \varepsilon$, где n — номер итерации. Время решения уравнения Пуассона на сетке 125 000 элементов до достижения невязки $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ составляет в начале расчета (первые 3–4 шага по времени) 5–6 мин на компьютере AMD Athlon 64 X2 5200+ и 8Gb RAM, а при продолжении расчета — в среднем около 5–10 сек. Шаг по времени Δt ограничивается на шаге 1 на основе критерия Куранта—Фридрихса—Леви. Для шага 2 ограничения на шаг по времени нет в виду использования неявной схемы по времени, следовательно, шаг по времени для всей схемы определяется как:

$$\Delta t \leq CFL \cdot \max \left[\frac{W_i}{A_i + B_i + C_i} \right]_{i=1}^N,$$

где $A_i = |u_i| S_i n_x$, $B_i = |v_i| S_i n_y$, $C_i = |w_i| S_i n_z$, i — номер КО, N — общее количество КО в Ω , CFL — число Куранта—Фридрихса—Леви. Для явной схемы РК4 рекомендуется выбирать число CFL в пределах 0.95–1.0 [21].

3.5. Требования к шагу по времени и размерам сетки

В связи с тем, что требования к получаемым результатам достаточно высоки, требуется провести прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода. В результате встает ряд требований к размерам сетки КО и к шагу интегрирования по времени. Известно, что развитый турбулентный режим для рассматриваемой задачи течения с уступа наступает при $R \approx 2000$. Следовательно, необходимо ограничить размеры

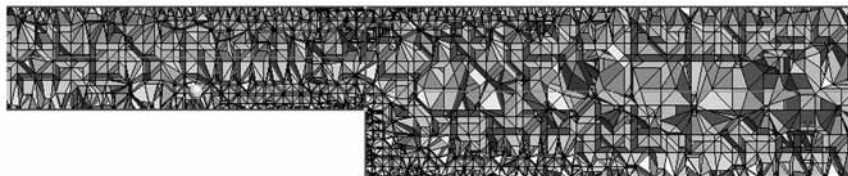


Рис. 2. Фрагмент сетки конечных объемов. Всего 125 723 куба

КО таким образом, чтобы в область расчета мог поместиться вихрь наименьшего размера при $R = 2000$, т. е. ограничением линейного размера КО по пространству выступает колмогоровский масштаб турбулентности. Исходя из проведенных оценок и оценок других авторов [28], размер КО при единичном значении длины задачи выбирается равным 0,001 для нормального и 0,007 для касательного к стенке направления в пристеночной области. В центральной области выполнено адаптивное линейное увеличение размеров КО (рис. 2).

Для определения количества конечных объемов был проведен ряд расчетов при числе Рейнольдса $R = 700$. При данном числе Рейнольдса наблюдается стационарный ламинарный режим течения, и возникает возможность откалибровать точность решения в зависимости от густоты сетки. Проверялись сетки размером 25 000, 75 000, 105 000, 125 000, 150 000 элементов. Определено, что получаемые решения инвариантны относительно размеров сетки уже после 75 000 элементов. С учетом запаса при увеличении числа Рейнольдса принята сетка размером 125 723 элементов, на которой выполнены все расчеты в данной работе.

Шаг по времени, определяющийся по критерию CFL , устанавливается автоматически. При проверочных сериях расчетов было установлено, что минимальное значение шага по времени при $R \approx 2000$ составляет $4,67 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, во всех сериях расчетов был принят фиксированный шаг по времени равный $2,0 \cdot 10^{-4}$. Расчеты для всех исследованных диапазонов чисел Рейнольдса выполнены при вышеуказанных параметрах расчетной схемы.

3.6. Проверка численного решения

Для проверки численного решения системы (1)–(4) была проведена серия расчетов для задачи течения с уступа и выполнено сравнение значений скоростей с работами [10–12]. Все результаты хорошо совпадают между собой, максимальное отклонение составило 1,8 % (рис. 3 а и 3 б). Кроме того, приведенная выше численная схема с незначительными изменениями для решения системы уравнений (1)–(4) проверялась в ряде работ [14, 15, 17–19] и было найдено удовлетворительное согласие результатов в различных задачах.

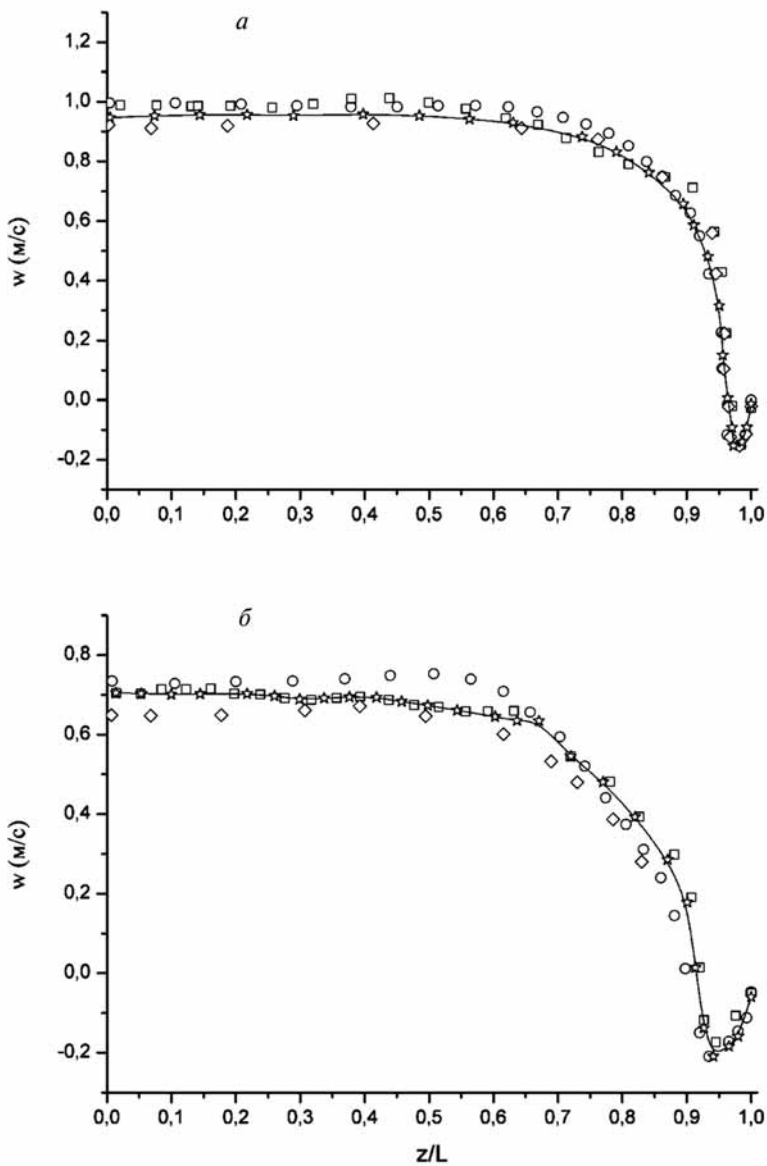


Рис. 3 а. Сопоставление результатов численного и физического экспериментов различных авторов для $R = 648$. Для каждой серии свое расстояние от ступеньки: а — $x/h = 6,22$; б — $x/h = 9,29$

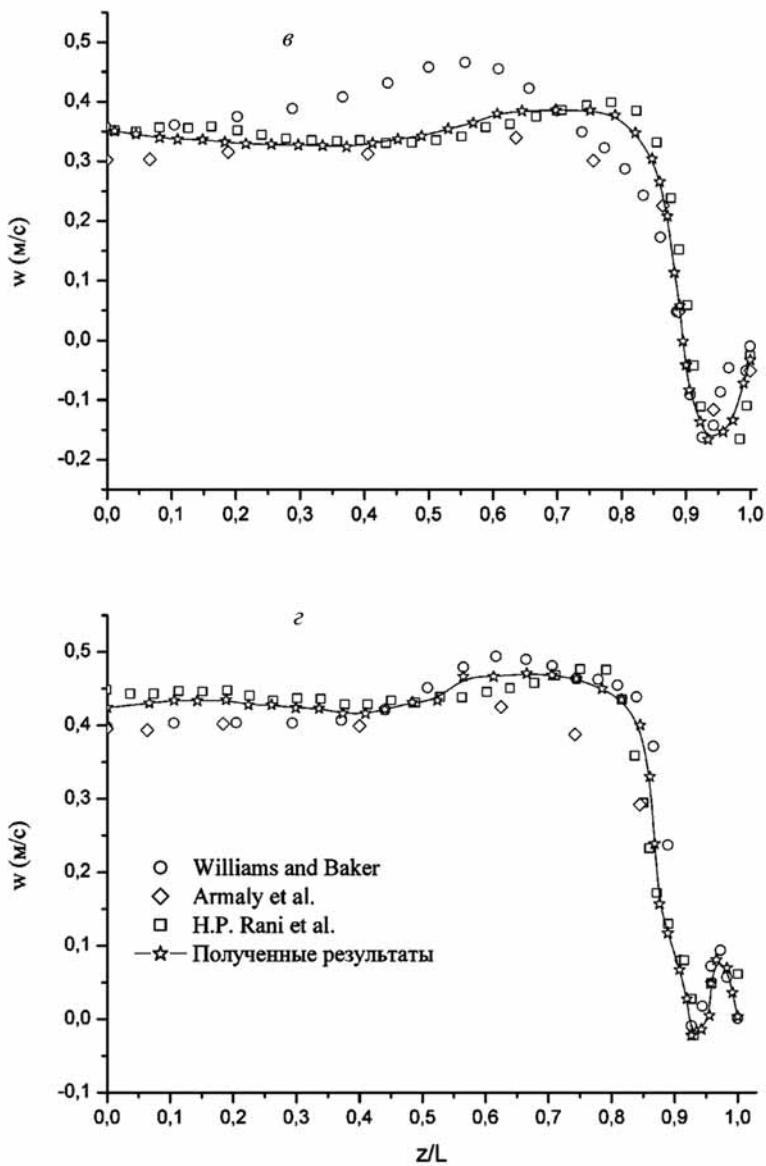


Рис. 3 б. Сопоставление результатов численного и физического экспериментов различных авторов для $R = 648$. Для каждой серии свое расстояние от ступеньки: $v - x/h = 12,3$; $r - x/h = 18,88$

4. Результаты

Для выяснения сценария перехода к турбулентности в нелинейной бесконечномерной диссипативной системе (1)–(4) необходимо знать распределение вектор-функции V во времени внутри Ω . Для получения искомым данным были взяты три точки с координатами, показанными на рис. 4. Таким образом, в заданных точках были получены данные вида $V(t, i)$, $i = 1, 2, 3$.

В связи с тем, что режим течения обуславливается как геометрическими параметрами, так и числом R , в данной работе изучался переход к турбулентности только при изменении значений R без изменения геометрических размеров и соотношений. Начальное значение числа Рейнольдса было равно 100, при котором получено устойчивое ламинарное течение в Ω (рис. 5). Увеличение числа Рейнольдса постепенно увеличивало зону

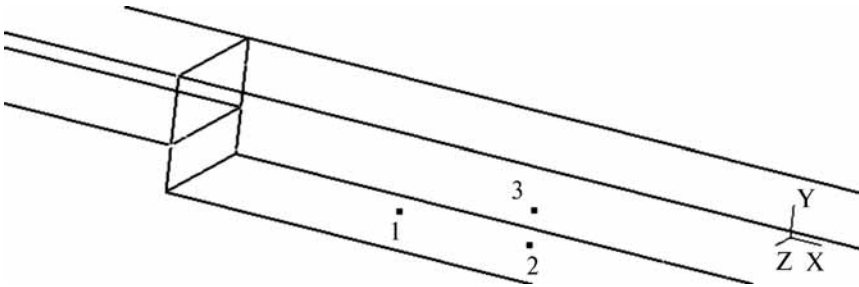


Рис. 4. Точки в Ω $1(10,0; 0,075; 0,4)$; $2(15,0; 0,075; 0,4)$ и $3(15,0; 0,12; 0,4)$, в которых определялись координаты вектора скорости V в зависимости от времени

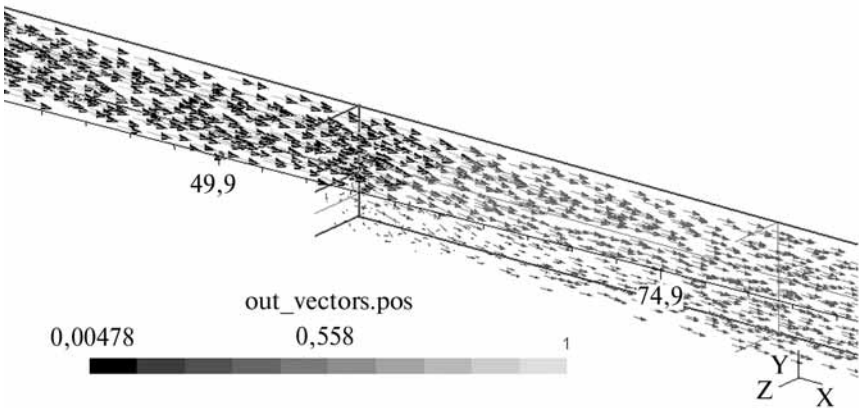


Рис. 5. Векторное поле скорости при $R = 200$

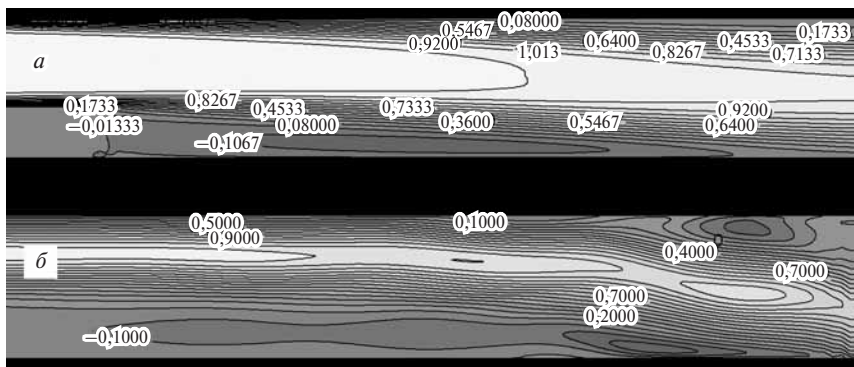


Рис. 6. Изолинии координаты V_x вектора скорости в точке 3 при значениях $R = 737$ (а) и $R = 1100$ (б)

рециркуляции за ступенькой, при этом режим течения оставался ламинарным вплоть до $R = 737$. Распределение координаты V_x вектора скорости при $R = 737$ в центральной части геометрической области решения показано на рис. 6.

При дальнейшем увеличении параметра R , решение системы (1)–(4) в Ω становится периодическим во времени. При этом зона рециркуляции увеличивается и образуются вторичные течения, рис. 6. Дальнейшее исследование перехода из ламинарного в турбулентный режим течения нагляднее проводить на основе анализа данных по времени в контрольных точках для вектор-функции V .

Исследование решений в фазовом пространстве переменных V_x, V_y, V_z показало, что при значении $R = 100$ имеет место неподвижная точка. При потере устойчивости этой точки возникают периодические решения, о чем свидетельствуют циклы при $R = 737$, $R = 1000$ и $R = 1300$ (рис. 7 и рис. 8). Различия внешнего вида приведенных циклов может свидетельствовать об однородности или неоднородности периодических решений в геометрическом пространстве. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

Нами установлено, что при значении числа Рейнольдса $R > 1300$ цикл, показанный на рис. 8, теряет устойчивость, и рождается двумерный инвариантный тор. Вид этого тора в координатах $V_{x1} = u_1, V_{y1} = v_1$ для точки 1 (см. рис. 4) при значении параметра $R = 1395$ приведен на рис. 9а. На рис. 9б и рис. 9в в координатах $V_{y1} = v_1, V_{x2} = u_2$ показано отображение Пуанкаре в плоскости $u_1 = 0$ для значений параметра $R = 1395$ и $R = 1396,35$. Рис. 9в свидетельствует о том, что при значении числа Рейнольдса $R > 1396$ двумерный инвариантный тор стал неустойчивым и образовалось другое устойчивое более сложное решение, очень похожее на двумерный инвариантный тор удвоенного периода по внешней частоте.

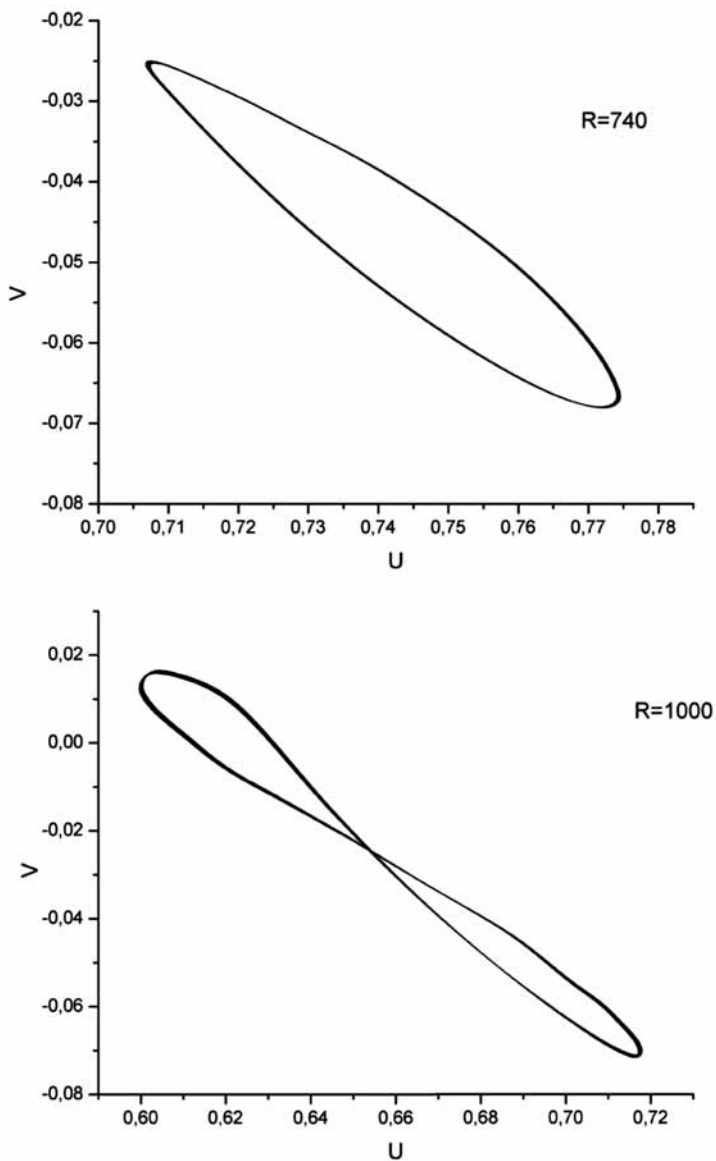


Рис. 7. Периодические решения в фазовом пространстве переменных V_x, V_y вектора скорости для точки 1 при значениях $R = 737$ и $R = 1000$

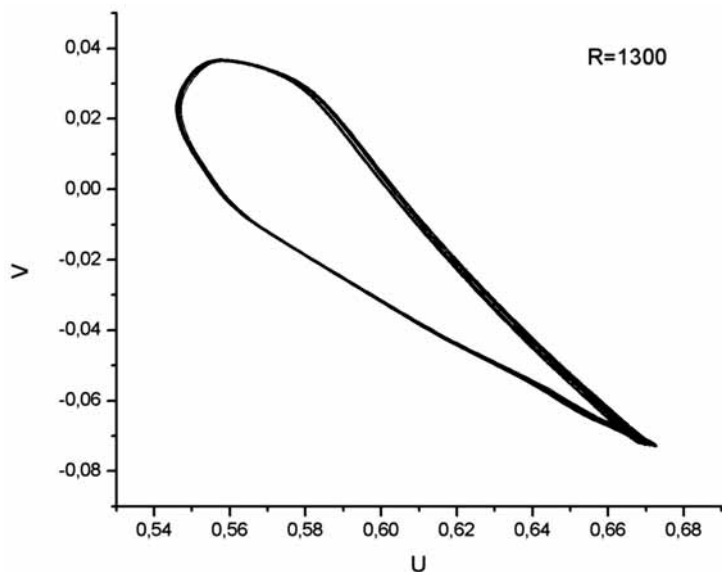


Рис. 8. Периодическое решение в фазовом пространстве переменных V_x, V_y вектора скорости для точки 1 при значении $R = 1300$

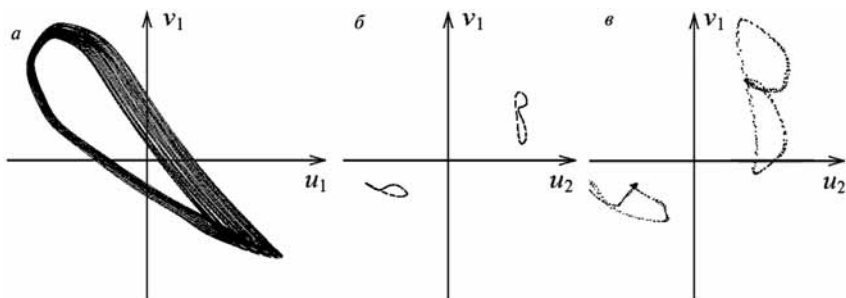


Рис. 9. Двумерный инвариантный тор в фазовом пространстве переменных V_x, V_y вектора скорости для точки 1 при значении $R = 1395$ (а); отображение Пуанкаре в плоскости $V_x = 0$ в фазовом пространстве переменных вектора скорости при значении $R = 1395$ (б), отображение Пуанкаре в плоскости $V_x = 0$ в фазовом пространстве переменных вектора скорости при значении $R = 1396,35$ (в)

5. Заключение

Результаты проведенного в работе исследования дают основания выдвинуть новую гипотезу объяснения механизма возникновения турбулентности в нелинейных сплошных средах — по универсальному сценарию Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого через субгармонический каскад бифуркаций устойчивых двумерных торов. Однако, для получения окончательных выводов требуется проведение дополнительных трудоемких вычислительных экспериментов.

Литература

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339–342.
2. Hopf E. A mathematical example displaying the feathers of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 303–322.
3. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
4. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: URSS, 2000. 560 с.
5. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. 3. P. 167–192.
6. Magnitskii N. A., Sidorov S. V. New Methods for Chaotic Dynamics. Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
7. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
8. Турбулентность. Принципы и применения. Пер. с англ. / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 535 с.
9. Фрик П. Г. Турбулентность. Подходы и модели / Институт компьютерных исследований. Ижевск, 2003. 292 с.
10. Williams P. T., Baker A. J. Numerical simulation of laminar flow over a three-dimensional backward-facing step // Int. J. Numerical Methods in Fluids. 1997. 24. 1159.
11. Armaly B. F., Durst F., Pereira C. F., Shonung B. Experimental and theoretical investigation of backwards-facing step flow // J. Fluid Mechanics. 1983. 127. 473.
12. Rani H. P., Tony W. H. Sheu. Nonlinear dynamics in a backward-facing step flow // J. Physics of Fluids. 2006. 18. 084101. P. 1–14.
13. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1983.
14. Евстигнеев Н. М. Интегрирование трехмерных уравнений невязкого газа на неструктурированной сетке с применением распределенного вычисления // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 252–264.
15. Evstigneev N. M. New fast matrix less Finite Element Method for incompressible Navier—Stokes equations on unstructured tetrahedral mesh // Pros. of the 12-th international conference in High Speed Fluid Mechanics — Athens University. Greece. 2007.
16. Русанов В. В. Существование предельного профиля типа ударной волны для TVD-схем // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1986. № 177.

17. *Evstigneev N.* Parallel numerical method for incompressible 3D Navier—Stokes equations on unstructured mesh for TCP/IP PC LAN // Pros. of the 4-th international conference in Parallel Computational Fluid Dynamics — Von Karmann institute. Germany. 2007.
18. *Евстигнеев Н. М.* Численное моделирование течения Пуазейля в плоской трубе, ламинарно-турбулентный переход, развитие турбулентное течение // «Естественные и технические науки». М., 2005. № 1.
19. *Евстигнеев Н. М.* Решение задачи о течении несжимаемой жидкости в каверне с движущейся крышкой конечно-объемным методом интегрирования уравнений Навье—Стокса // «Естественные и технические науки». М., 2005. № 1.
20. *Chunlei Liang, Evstigneev N.* A study of kinetic energy conserving scheme using finite volume collocated grid for LES of a channel flow // Proceedings of the international conference on numerical methods in fluid dynamics. King's College. London, Strand, WC2R 2LS. 2006.
21. *Ваннер Г., Нерсент С., Хайпер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
22. *Barth T. J.* Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier—Stokes equations // NASA Ames Research Center, Moffet Field, Ca., USA. 1998.
23. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Ч. 1, 2. М.: Мир, 1991.
24. *Leonard B. P.* The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. Vol. 88. P. 17—74.
25. *Годунов С. К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
26. *Menter F. R.* Performance of Popular Turbulence Models for Attached and Separated Adverse Pressure Gradient Flows // AIAA Journal, 1992. № 8. P. 2066—2072.
27. *Баландин М. Ю., Шурина Э. П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: НГУ, 2000.
28. *Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М.* Турбулентность. Новые подходы. М.: Наука, 2002.