I. Оптимизация, игры и управление

Дикусар В. В.

119991, Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН
e-mail: dikussar@yandex.ru

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВЫРОЖДЕННОГО И НЕРЕГУЛЯРНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА*

В работе на примере задачи оптимального управления со смешанными ограничениями рассматриваются методы регуляризации смешанных ограничений. Это дает возможность получить ограничения на множители Лагранжа в нерегулярной задаче. Кроме того, предлагается также метод решения задачи с вырожденным принципом максимума. Основные положения иллюстрируются на задаче входа аппарата в атмосферу.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о выборе угла атаки аппарата, тормозящегося в атмосфере при полете на максимальную и минимальную дальность с учетом ограничений на величину полной перегрузки. Решение указанных задач позволяет определить маневренные возможности аппарата [1].

Дальность полета аппарата определяется интегралом

$$L = \int_0^T \frac{RV\cos\Theta}{R+H}\,dt. \tag{1}$$

Требуется выбрать управление $C_y(t)$, доставляющее минимум (максимум) $L(t)$ (1) при следующих ограничениях:

$$n_\Sigma = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}\,q\frac{S}{G} \leqslant N, \quad q = \frac{\rho V^2}{2}, \quad G = mg, \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (коды проектов №№ 06–01–00244, 06–01–90841).

$$C_y^{\min} \leqslant C_y \leqslant C_y^{\max}, \quad C_x = C_{x_0} + kC_y^2, \tag{3}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta H}, \quad g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2}, \quad \dot V = -C_x q \frac{S}{m} - g\sin\Theta, \tag{4}$$

$$\dot\Theta = C_y q \frac{S}{mV} + \left(\frac{V}{R+H} - \frac{g}{V}\right)\cos\Theta, \quad \dot H = V\sin\Theta, \tag{5}$$

где n_Σ — полная перегрузка, q — скоростной напор, ρ — плотность атмосферы, V — скорость аппарата, Θ — угол наклона траектории, H — высота полета, G — вес аппарата, m — масса, g_0 — ускорение силы тяжести на поверхности планеты, R — радиус планеты, C_x — коэффициент лобового сопротивления, C_y — коэффициент подъемной силы, S — характерная площадь аппарата, C_{x_0}, k, ρ_0, β, $C_y^{\min}$, $C_y^{\max}$, N — постоянные величины.

Для системы (1)–(5) заданы начальные условия

$$V(0) = V_0, \quad \Theta(0) = \Theta_0, \quad H(0) = H_0, \quad L(0) = 0. \tag{6}$$

Граничные условия имеют вид

$$V(T) = V_1, \quad \Theta(T) = \Theta_1, \quad H(T) = H_1, \tag{7}$$

T — не фиксировано.

2. Принцип максимума (регулярный случай)

Пусть спускаемый аппарат приходит из начального состояния (6) в конечное положение (7) оптимальным образом в смысле минимума или максимума дальности в предположении, что на оптимальной траектории выполнено условие регулярности [2, 3]. В нашем случае условие регулярности эквивалентно условию

$$\frac{\partial n_\Sigma}{\partial C_y} \neq 0, \quad n_\Sigma = N. \tag{8}$$

В этом случае принцип максимума имеет следующий вид:

$$\Pi = P_\Theta \left[\frac{C_y \rho V S}{2m} + \left(\frac{V}{R+H} - \frac{g}{V}\right)\cos\Theta\right] + P_H V \sin\Theta - \\ - P_V \left[\frac{C_x \rho V^2 S}{2m} + g\sin\Theta\right] + P_L \frac{RV\cos\Theta}{R+H}, \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
\dot P_\Theta &= P_\Theta\left[\frac{V}{R+H}-\frac{g}{V}\right]\sin\Theta - P_H V\cos\Theta + P_V g\cos\Theta + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + P_L\frac{RV\sin\Theta}{R+H},\\
\dot P_V &= -P_\Theta\left[\frac{C_y\rho S}{2m}+\left(\frac{1}{R+H}-\frac{g}{V^2}\right)\cos\Theta\right] - P_H\sin\Theta + \\
&\quad + P_V\frac{C_x\rho V S}{m} - P_L\frac{R\cos\Theta}{R+H} + \lambda(t)\frac{\rho V S}{m g_0}\sqrt{C_x^2+C_y^2},\\
\dot P_H &= P_\Theta\left[\frac{\beta C_y\rho V S}{2m}+\frac{V\cos\Theta}{(R+H)^2}-\frac{2g\cos\Theta}{V(R+H)}\right] - \\
&\quad - P_V\left[\frac{\beta C_x\rho V^2 S}{2m}+\frac{2g\sin\Theta}{R+H}\right] + P_L\frac{RV\cos\Theta}{(R+H)^2} - \\
&\quad - \lambda(t)\frac{\rho V^2 S\beta}{2m g_0}\sqrt{C_x^2+C_y^2},\\
\dot P_L &= 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $\lambda(t)$ — множитель Лагранжа, который определяется из условия Блисса [2, 3]

$$
\frac{\partial\Pi}{\partial C_y} - \lambda(t)\frac{\partial n_\Sigma}{\partial C_y} = 0, \quad \lambda(t) = \frac{2\left(\dfrac{P_\Theta}{2} - kP_V C_y V\right)}{C_y V[1+2kC_x]} g_0\sqrt{C_x^2+C_y^2}, \tag{11}
$$

P_Θ, P_V, P_H, P_L — соответствующие сопряженные переменные. Для ограничения типа неравенств (2) выполнено условие дополняющей нежесткости

$$
\lambda(t)(n_\Sigma - N) = 0. \tag{12}
$$

Так как система (1), (5) автономна и на время спуска никаких ограничений не накладывается, то функция Понтрягина (9) тождественно равна нулю, т. е.

$$
\begin{gathered}
\Pi(P,x,u)\equiv 0, \quad u = C_y, \quad x = (\Theta, V, Hy, L),\\
P = (P_\Theta, P_V, P_H, P_L).
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Сопряженная переменная $P_L(t)$ нормируется условием

$$
P_L(t) = -1. \tag{14}
$$

Из $\dot P_L = 0$ (10) следует $P_L(t)\equiv -1$ на всей оптимальной траектории.

Начальные условия для системы (10) неизвестны и являются параметрами задачи. Условия $P_L(t)\equiv -1$ и $\Pi(P,x,u)\equiv 0$ (13) по существу определяют два свободных параметра

$$P_\Theta(0) = C_1, \quad P_V(0) = C_2, \tag{15}$$

так как $P_H(0)$ определится из условия $\Pi(P, x, u) \equiv 0$.

В этом случае число контролируемых в конце траектории функций (7) совпадает с числом свободных параметров задачи (1)–(7), (9), (10), поскольку время T не фиксировано и является свободным параметром.

Согласно принципу максимума программа управления выбирается из условия

$$\begin{aligned} &\Pi \to \min_{C_y} \quad \text{при } L(T) \to \max, \\ &\Pi \to \max_{C_y} \quad \text{при } L(T) \to \min\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Выпишем ту часть функции Понтрягина (9), которая явно зависит от управления $C_y(t)$

$$\Pi_0 = P_\Theta \frac{C_y \rho V S}{2m} - P_V \frac{C_x \rho V^2 S}{2m}. \tag{17}$$

Управление $C_y(t)$ может принимать не только концевые значения (3), но также и промежуточное, которое определяется из условия

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial C_y} = 0, \quad C_y^* = \frac{P_\Theta}{2kP_V V}, \quad C_y^{\min} \leqslant C_y^* \leqslant C_y^{\max}. \tag{18}$$

Вычислим теперь три значения Π_0 (17)

$$\Pi_1 = \Pi_0(C_y^{\min}), \quad \Pi_2 = \Pi_0(C_y^{\max}), \quad \Pi_3 = \Pi_0(C_y^*)$$

и определим соответствующие минимальные и максимальные величины Π_0

$$\Pi_0^{\min} = \min\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}, \quad \Pi_0^{\max} = \max\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}. \tag{19}$$

Соотношения (19) определяют характер оптимального управления для задачи Понтрягина, т. е. при условии $n_\Sigma < N$. Решение поставленной задачи значительно упрощается, если правый конец траектории контролируется условием

$$H(T) = H_1. \tag{20}$$

В этом случае решение краевой задачи (1), (7) определяется граничными условиями

$$\Theta(T) = \Theta_1, \quad V(T) = V_1 \tag{21}$$

и зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 (15).

Таким образом, исходная задача сводится к двухпараметрической краевой задаче (1), (6), (10), (15), (21), а оптимальное управление $C_y(t)$ определяется в каждой точке t согласно принципу максимума (19).

3. Продолжение решений по параметру

Для задачи Понтрягина при $n_\Sigma < N$ множитель Лагранжа $\lambda(t) = 0$ (11). Непосредственное решение краевой задачи известным методом Ньютона [4] наталкивается на целый ряд принципиальных затруднений. Первый вопрос связан с выбором хорошего начального приближения. Второй вопрос касается обусловленности матрицы Якоби. При плохой обусловленности матрицы Якоби уменьшается скорость сходимости метода Ньютона и сужается область его сходимости.

В настоящей работе сначала рассматривается задача со свободным правым концом. В этом случае

$$P_\Theta(H_1) = 0, \quad P_V(H_1) = 0. \tag{22}$$

Пусть $H(t)$ является строго монотонной убывающей функцией. Разобьем отрезок интегрирования $[H_0, H_1]$ на систему вложенных отрезков

$$[H_0, H_{11}] \subset [H_0, H_{12}] \subset \ldots \subset [H_0, H_{1r}], \quad H_{1r} = H_1. \tag{23}$$

На отрезке $[H_0, H_{11}]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = f_i(x, u), && x_i(H_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1,4}, \\ &\dot{\psi}_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, && \psi_j(H_0) = C_{1j}, \quad j = \overline{1,4}, \\ &\psi_1(H_{11}) = P_\Theta(H_{11}) = 0, && \psi_2(H_{11}) = P_V(H_{11}) = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$x = (\Theta, V, H, L), \quad u = C_y, \quad \psi = (P_\Theta, P_V, P_H, P_L).$$

Так как отрезок $[H_0, H_{11}]$ достаточно мал, то краевая задача (24) легко решается методом Ньютона. Действительно, в этом случае в качестве начального приближения можно выбрать

$$\psi_1(H_0) = P_\Theta(H_0) = C_{11}, \quad \psi_2(H_0) = P_V(H_0) = C_{12} \tag{25}$$

близкими к концевым значениям $P_\Theta(H_{11})$ и $P_V(H_{11})$. Полученные значения C_{11} и C_{12} обозначим через $\overline{C}_{11}$ и $\overline{C}_{12}$ и далее на отрезке $[H_0, H_{12}]$ решим новую краевую задачу с условиями

$$\psi_1(H_{12}) = P_\Theta(H_{12}) = 0, \quad \psi_2(H_{12}) = P_V(H_{12}) = 0,$$

полагая $\psi_1(H_0) = \overline{C}_{11}$, $\psi_2(H_0) = \overline{C}_{12}$. Далее решение уточняется по методу Ньютона. Указанный процесс можно продолжать вплоть до значения $H_{1r} = H_1$.

На практике выбор точек разбиения отрезка $[H_0, H_1]$ проводится на основе принципа Рунге—Кутта, который применяется при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этой цели задают определенное число итераций в методе Ньютона и точку H_{11}. Если на интервале $[H_0, H_{11}]$ число итераций превышает заданное, то отрезок

$[H_0, H_{11}]$ делим пополам и т. д. После выбора H_{11} выбирают H_{12} путем удвоения длины отрезка $[H_0, H_{11}]$.

В указанном методе продолжения по параметру решается вопрос о выборе хорошего начального приближения для решения краевой задачи. Как правило, при хорошей обусловленности матрицы Якоби здесь не возникает никаких серьезных проблем вычислительного характера.

Ситуация значительно усложняется при росте числа обусловленности матрицы Якоби. Например, при входе аппарата в атмосферу с первой космической скоростью $V(H_0) = 8$ км/с, $H_0 = 100$ км на высоте $H = 35$ км построенный итеративный процесс практически перестает сходиться даже при дроблении отрезка интегрирования. На указанной высоте спектр матрицы Якоби имеет жесткую структуру [4].

Для преодоления возникших трудностей на отрезке $[H_0, H_{11}]$ выбиралась промежуточная точка H_{21} и первоначальный отрезок интегрирования разбивался на два интервала $[H_0, H_{21}]$ и $(H_{21}, H_{11}]$. На интервале $[H_0, H_{21}]$ системы (1), (5), (10) интегрировались слева направо, а на интервале $[H_{21}, H_{11}]$ эти же системы интегрировались справа налево. При этом свободные параметры задачи в точках H_0 и H_{11} подбирали из условия непрерывности основных и сопряженных переменных в точке H_{21}

$$\begin{aligned} &\Theta(H_{21}-0) = \Theta(H_{21}+0), \qquad V(H_{21}-0) = V(H_{21}+0),\\ &L(H_{21}-0) = L(H_{21}+0), \qquad P_\Theta(H_{21}-0) = P_\Theta(H_{21}+0),\\ &P_V(H_{21}-0) = P_V(H_{21}+0). \end{aligned} \tag{26}$$

При этом размерность краевой задачи увеличивается вдвое, однако улучшается обусловленность матрицы Якоби. При продолжении решения по параметру точка H_{21} также является текущей. Однако ее величина должна удовлетворять условию $H_{21} > 35$ км. Предложенный метод дает возможность продолжить решение до значения $H = H_1$.

В результате решения краевой задачи со свободным правым концом получаются определенные значения $\Theta(H_1)$ и $V(H_1)$, которые в общем случае не совпадают с требуемыми граничными условиями.

Для дальнейшего продолжения решений введем следующий функционал:

$$F(H_1) = \left\{[\Theta(h_1) - \Theta_1]^2 + [V(H_1) - V_1]^2\right\}^{1/2}, \tag{27}$$

где Θ_1 и V_1 являются заданными краевыми условиями.

Поиск минимума функционала (27) проводился методом Ньютона

$$\overline{C}_{k+1} = \overline{C}_k - [F''(\overline{C}_k)]^{-1}F'(\overline{C}_k), \quad \overline{C} = (C_1, C_2). \tag{28}$$

Здесь $F'(\overline{C}_k)$ — градиент функции (27) в точке $\overline{C}_k$, $F''(\overline{C}_k)$ — матрица Гессе. Вопросы поиска минимума функционала (27) при плохо обусловленной матрице Гессе рассмотрены в работе [5].

Обоснованию методов гомотопии посвящена работа [6]. В ней излагаются деформационные методы исследования различных классов вариационных задач, в том числе и задач оптимального управления. Идейно метод гомотопии связан с точкой минимума и гомотопическим инвариантом. Если исследуемая экстремаль в процессе деформации задачи равномерно изолирована по параметру, то ее свойство быть точкой минимума есть гомотопический инвариант.

4. Ограничение на перегрузку

Учет ограничений на перегрузку (2) существенно увеличивает трудности получения решения даже в регулярном случае. Первая проблема связана с вычислением множителя Лагранжа $\lambda(t)$ (11). При итеративном поиске оптимальной траектории наблюдается значительный рост множителей Лагранжа при $C_y(t) \to 0$. Указанную трудность можно преодолеть в рамках теории сингулярно-возмущенных систем [4, 7].

Вторая проблема в задачах оптимального управления при наличии ограничений типа неравенств связана с определением геометрии оптимальной траектории или, другими словами, множества активных индексов. Этот вопрос в определенной степени решается для задач, линейных по управлению. При этом исходная задача дискретизуется и затем решается задача линейного программирования большой размерности. Ее решение дает возможность оценить геометрию оптимальной траектории. При этом сужается число возможных альтернатив в характере оптимальной траектории. На базе полученного решения можно построить гипотезу о геометрии оптимальной траектории. Затем предполагаемую траекторию можно проверить на оптимальность, используя принцип максимума.

Следует заметить, что при решении задачи линейного программирования также появляются серьезные проблемы вычислительного характера, связанные с некорректностью рассматриваемой задачи [8].

В поставленной задаче трудность определения геометрии оптимальной траектории связана с определением момента схода с ограничения $n_\Sigma = N$ (2).

Заметим, что суммарная перегрузка n_Σ (2) имеет две компоненты n_x и n_y. Первая называется продольной перегрузкой, а вторая — нормальной:

$$n_y = \frac{\rho V^2 S}{2mg_0} C_y, \quad n_x = \frac{\rho V^2 S}{2mg_0} C_x, \quad n_\Sigma = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \tag{29}$$

Вместо ограничения (2) введем новое ограничение

$$|n_y| + n_x \leqslant N_1, \quad |n_y| + n_x - N_1 = \varphi(x, u) \leqslant 0. \tag{30}$$

При соответствующем выборе N_1 из справедливости неравенства (30) заведомо будет выполнено ограничение (2). Указанный факт следует из неравенства

$$N_1 \geqslant \big[|n_y| + |n_x|\big] \geqslant \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \tag{31}$$

причем равенство достигается при $C_y = 0$.

Вычислим теперь производную $\varphi(x, u)$ (30) по C_y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_y} = \frac{\rho V^2 S}{2mg_0}[\operatorname{sign} C_y + 2kC_y]. \tag{32}$$

В этом случае множитель Лагранжа $\lambda(t)$ для ограничения $\varphi(x, u) \leqslant 0$ (30) определяется по формуле

$$\lambda(t) = \frac{2\left(\dfrac{P_\Theta}{2} - kP_V C_y V\right) g_0}{V[\operatorname{sign} C_y + 2kC_y]}. \tag{33}$$

Из (33) видно, что множитель Лагранжа $\lambda(t)$ является ограниченным для любых значений C_y. Значение $\operatorname{sign} C_y$ при $C_y = 0$ доопределяем по непрерывности из условия $\operatorname{sign} C_y$ при $C_y \to 0$.

Указанный подход дает возможность проводить непрерывный итерационный процесс по поиску оптимальной траектории при значениях $C_y(t)$, близких к нулю.

При движении по ограничению типа (2) управление C_y^2 определяется из условия связи $n_\Sigma = N$

$$C_y^2 = \frac{(1 + 2kC_{x_0}) + \left[(1 + 2kC_{x_0})^2 + 4\left(\dfrac{Nmg_0}{Sq} - C_{x_0}\right)k^2\right]^{1/2}}{2k^2} = a_0, \tag{34}$$
$$C_{y_1} = \sqrt{a_0}, \quad C_{y_2} = -\sqrt{a_0}.$$

Оптимальное управление выбирается согласно принципу максимума (17). Для этой цели вычисляем

$$\Pi_4 = \Pi_0(C_{y_1}), \quad \Pi_5 = \Pi_0(C_{y_2}), \quad \Pi_0^{\max} = \max\{\Pi_4, \Pi_5\}. \tag{35}$$

Полученное значение управления из (35) подставляем в уравнения движения.

Для ограничения типа (30) имеем

$$|n_y| + n_x = N_1, \quad \frac{\rho V^2 S}{2mg_0}\big(|C_y| + C_{x_0} + kC_y^2\big) = N_1. \tag{36}$$

Тогда можно определить $C_y(t)$ из уравнения (36)

$$kC_y^2 + |C_y| - \frac{N_1 2mg_0}{\rho V^2 S} + C_{x_0} = 0,$$

$$C_{y_3} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k\left(\dfrac{2N_1 mg_0}{\rho V^2 S} - C_{x_0}\right)}}{2k}, \quad C_y > 0, \tag{37}$$

$$C_{y_4} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4k\left(\dfrac{2N_1 mg_0}{\rho V^2 S} - C_{x_0}\right)}}{2k}, \quad C_y < 0.$$

Необходимое управление определяется из принципа максимума (17). Здесь предполагается справедливым следующее неравенство

$$2N_1 mg_0 - C_{x_0}\rho V^2 S > 0.$$

В противном случае лишние корни также определяются из принципа максимума.

Величины N и N_1 определяются из решения задачи Понтрягина. Максимальное значение N вычисляется из условия максимума функции n_Σ на оптимальной траектории при фиксированных начальных данных (6) для фазовых координат. Аналогичным образом определяется параметр N_1.

Геометрия оптимальной траектории в задаче $L(T) \to \min$ связана со следующей теоремой.

Теорема 1. *Момент схода с ограничения $n_\Sigma = N$ в задаче $L(T) \to \min$ определяется равенством*

$$C_{y_2} = -\sqrt{a_0} = C_y^{\min}, \tag{38}$$

где C_{y_2} вычисляется по формуле (34).

5. Необходимые условия экстремума в нерегулярном случае

Рассмотрим теперь случай, когда оптимальная траектория содержит интервал, где $n_\Sigma = N$, и на этом интервале в какой-нибудь точке $\partial n_\Sigma / \partial C_y = 0$.

Множество точек, определяемое уравнениями

$$\frac{\partial n_\Sigma}{\partial C_y} = 0, \quad n_\Sigma = N, \tag{39}$$

следуя работе [2], назовем **нерегулярными точками**. Для рассматриваемой задачи $\partial n_\Sigma / \partial C_y = 0$ при $C_y = 0$.

В нашем случае для решения поставленной задачи воспользуемся результатами работ А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина [2, 3].

Согласно [2, 3] при наличии нерегулярных точек система сопряженных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{P}_\Theta &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta},\\
\dot{P}_H &= -\frac{\partial \Pi}{\partial H} + \lambda(t)\frac{\partial n_\Sigma}{\partial H} + \frac{d\mu}{dt}\,\frac{\partial n_\Sigma}{\partial H},\\
\dot{P}_V &= -\frac{\partial \Pi}{\partial V} + \lambda(t)\frac{\partial n_\Sigma}{\partial V} + \frac{d\mu}{dt}\,\frac{\partial n_\Sigma}{\partial V},\\
\dot{P}_L &= 0.
\end{aligned}\tag{40}$$

Здесь $\lambda(t)$ — множитель Лагранжа, $d\mu/dt$ — обобщенная функция. Для указанных объектов выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\lambda(t)(n_\Sigma - N) = 0, \quad C_y\frac{d\mu}{dt} = 0.\tag{41}$$

Случай, когда нерегулярная точка является концом траектории, не исключается.

Из (40) следует, что в нерегулярной точке (39) сопряженные переменные P_H и P_V будут испытывать скачок на величины $\mu\partial n_\Sigma/\partial H$ и $\mu\partial n_\Sigma/\partial V$ соответственно, причем $\mu > 0$. В этом состоит существенное отличие нерегулярного случая от регулярного, где сопряженные переменные являются непрерывными функциями для смешанных ограничений класса $\varphi(x, u) \leqslant 0$ [2, 3].

Кроме условий (39)–(41) на оптимальной траектории должны быть выполнены условия интегрируемости множителей Лагранжа и условия нормировки (условия нетривиальности принципа максимума)

$$\int\limits_0^T \lambda(t)\,dt0, \quad \lambda(t) > 0.\tag{42}$$

По существу условие интегрируемости следует из условия нормировки.

6. Структура множества нерегулярных точек

Теорема 2. *Оптимальная траектория в случае ограничения $n_\Sigma = N$ содержит конечное число нерегулярных точек.*

Доказательство. Пусть

$$n_\Sigma = q\frac{S}{G}\sqrt{C_x^2 + C_y^2} = N.$$

Положим
$$w = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}.$$
Тогда
$$w = \frac{NG}{qS}, \quad w(t_*) = w(C_y = 0) = w_*. \tag{43}$$
Покажем, что
$$\frac{d^2 w_*}{dt^2} > 0.$$
Предположим противное, т. е.
$$\lim_{t \to t_*} \frac{w - w_*}{(t - t_*)^2} = 0.$$
Тогда
$$\lim_{t \to t_*} \frac{w - w_*}{(t - t_*)^3}$$
существует и тоже равен нулю. Докажем это.

$C_y^2 = 0$ при $t = t_*$ и непрерывно в этой точке. В этом случае
$$\lim_{t \to t_*} \frac{w - w_*}{t - t_*} = \dot{w}\big|_{t=t_*} = 0,$$
$$\lim_{t \to t_*} \frac{w - w_*}{(t - t_*)^2} \cong \lim_{t \to t_*} \frac{\dot{w}}{t - t_*} = -\lim_{t \to t_*} \frac{Sw^2}{NG} \frac{\dot{q}}{t - t_*} = -\frac{Sw_*^2}{NG} \lim \frac{\dot{q}}{t - t_*};$$
$$\dot{q} = \frac{\dot{\rho} V^2}{2} + \dot{V} V \rho, \quad \dot{\rho} = -\rho V \sin \Theta \rho,$$
$$\dot{V} = -\frac{C_x \rho V^2 S}{2m} - g \sin \Theta.$$

Но $\dot{\rho}$, $\dot{V}$, ρ, V непрерывно дифференцируемы в точке t_*. Следовательно,
$$\lim_{t \to t_*} \frac{\dot{q}}{t - t_*}$$
существует. В результате имеем
$$\ddot{q} = \frac{\ddot{\rho} V^2}{2} + 2\dot{V}\dot{\rho} V + \ddot{V} V \rho\big|_{t=t_*} = 0.$$
Покажем теперь, что
$$\lim_{t \to t_*} \frac{w - w_*}{(t - t_*)^3}$$
существует.
$$\lim \frac{w - w_*}{(t - t_*)^3} \cong \lim \frac{\dot{w}}{(t - t_*)^2} - \frac{Sw_*^2}{NG} \lim \frac{\dot{q}}{(t - t_*)^2} \cong \lim \frac{\ddot{q}}{t - t_*}.$$

Так как $\ddot{q}$ — непрерывно дифференцируемая функция в точке t_*, то

$$\lim_{t\to t_*}\frac{\ddot{q}}{t-t_*}$$

существует и равен нулю, ибо w_* — точка минимума w, т. е. $\dddot{q}(t_*)=0$.

В результате получаем систему

$$C_{x_0}=\frac{NG}{Sq},\quad \dot{q}(t_*)=0,\quad \ddot{q}(t_*)=0,\quad \dddot{q}(t_*)=0. \tag{44}$$

Система (44) имеет единственное решение относительно H, V, Θ, N при фиксированных значениях C_{x_0}, S, G. При всех остальных значениях H, V, Θ, N приходим к противоречию.

Таким образом,

$$\lim\frac{w-w_*}{(t-t_*)^2}>0,$$

т. е. точка t_* является изолированной. Отсюда следует, что на оптимальной траектории, как и на любой другой траектории с ограничением $n_\Sigma=N$, число точек w_* конечно. □

7. Непрерывность $|\dot{C}_y|$ в точке t_*

Теорема 3. *Функция $|\dot{C}_y|$ непрерывна в точке t_*.*

Доказательство. Если оптимальная траектория удовлетворяет ограничению $n_\Sigma=N$ на интервале ненулевой меры, то $\dot{n}_\Sigma=\ddot{n}_\Sigma=\dddot{n}_\Sigma=0$.

$$\begin{aligned}\dot{n}_\Sigma&=\dot{q}(C_x^2+C_y^2)+C_y\dot{C}_y[1+2kC_{x_0}]q=0,\\ \ddot{n}_\Sigma&=\ddot{q}(C_x^2+C_y^2)+C_y\ddot{C}_y[1+2kC_{x_0}]q+\dot{C}_y^2[1+2kC_{x_0}]q+\\&\quad+3\dot{q}C_y\dot{C}_y[1+2kC_{x_0}]+4k^2C_y^2\dot{C}_y^2q=0.\end{aligned}$$

Предположим противное. Пусть

$$C_y=A(t-t_*)^\alpha,\quad 0<\alpha<1.$$

Тогда

$$\dot{C}_yA\alpha(t-t_*)^{\alpha-1},\quad C_y\dot{C}_y=A^2\alpha(t-t_*)^{2\alpha-1}.$$

Так как $\dot{q}(t_*)=0$, то из $\dot{n}_\Sigma=0$ следует $C_y\dot{C}_y=0$. Тогда $2\alpha-1>0$, $\alpha>1/2$. Вычислим теперь

$$C_y\ddot{C}_y=A(t-t_*)^\alpha A\alpha(\alpha-1)(t-t_*)^{\alpha-2}.$$

С другой стороны

$$\dot{C}_y^2=A^2\alpha^2(t-t_*)^{2(\alpha-1)}.$$

Так как $\ddot{q}(t_*)$ ограничено, то из $\ddot{n}_\Sigma = 0$ следует

$$\left[\dot{C}_y \ddot{C}_y + \dot{C}_y^2\right](1 + 2kC_{x_0})q = 0.$$

Отсюда получаем

$$-\alpha^2 = \alpha(\alpha - 1), \quad 2\alpha^2 - \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

Получили противоречие. Таким образом, $\alpha \geqslant 1$. В этом случае

$$\dot{C}_y^2 = -\frac{\ddot{q}\left(C_x^2 + C_y^2\right)}{q[1 + 2kC_{x_0}]}. \tag{45}$$

Согласно (45), из непрерывности $\ddot{q}$ в точке t_* следует непрерывность $|\dot{C}_y|$ в точке t_*. □

8. Нерегулярная оптимальная траектория

Из непрерывности $|\dot{C}_y|$ в нерегулярной точке t_* и условия интегрируемости множителя Лагранжа $\lambda(t)$ (42) следует

$$P_\Theta(t_*) = 0. \tag{46}$$

В результате совокупность условий в нерегулярной точке имеет вид

$$\dot{q}(t_*) = 0, \quad P_\Theta(t_*) = 0, \quad C_y = 0, \quad n_\Sigma = N. \tag{47}$$

Указанным условиям можно удовлетворить за счет выбора произвольных постоянных для сопряженных переменных $P_V(0), P_\Theta(0)$ (15). В этом случае левый кусок оптимальной траектории, включающий нерегулярную точку на правом конце, определяется однозначно.

Рассмотрим теперь вопрос продолжения оптимальной траектории через нерегулярную точку. Для простоты анализа полагаем, что имеется единственная нерегулярная точка на всей оптимальной траектории.

Для определения правого куска траектории в задаче со свободным правым концом необходимо удовлетворить двум краевым условиям (22). Однако в нашем распоряжении имеется только один свободный параметр $\mu > 0$, который определяет величину скачка для сопряженных переменных в нерегулярной точке

$$\begin{aligned} P_V(t_* + 0) - P_V(t_* - 0) &= \mu \frac{\partial n_\Sigma}{\partial V}, \\ P_H(t_* + 0) - P_H(t_* - 0) &= \mu \frac{\partial n_\Sigma}{\partial H}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Невозможность удовлетворить краевым условиям (22) на правом конце оптимальной траектории свидетельствует о нарушении необходимых условий экстремума на всей оптимальной траектории.

Обратимся теперь к условию нормировки (42). Совершенно очевидно, что основную роль в этом условии будет играть множитель Лагранжа $\lambda(t)$. Рассмотрим теперь возможность существования нерегулярной оптимальной траектории при

$$P_L(t) \equiv 0. \tag{49}$$

В этом случае левый кусок оптимальной нерегулярной траектории также определяется однозначно за счет выбора $P_\Theta(0)$ и $P_V(0)$. При этом можно удовлетворить краевым условиям (22) на правом конце, положив

$$P_V(t_* + 0) = 0. \tag{50}$$

Из (49), (50) и (47) следует

$$P_V(t) \equiv 0, \quad P_H(t) \equiv 0, \quad P_\Theta(t) \equiv 0, \quad t \in (t_*, T].$$

Таким образом, на правом конце нерегулярной траектории принцип максимума выполняется тривиально. Так как левый кусок траектории определяется однозначно, то на отрезке $(t_*, T]$ можно рассматривать любую задачу оптимального управления. Указанные задачи на левом конце будут содержать нерегулярную точку t_*, в которой выполнены условия (47).

Здесь возникает вопрос о построении оптимальной траектории с вырожденным принципом максимума на правом конце [9, 10].

9. Регуляризация вырожденного принципа максимума

Одним из возможных способов построения оптимальной невырожденной траектории является изменение структуры ограничения (29). Ограничение вида (30) использовалось нами ранее для устойчивого итеративного поиска оптимальной траектории для малых значений $C_y(t)$. При этом множитель Лагранжа вычислялся по формуле (33). Изменение структуры смешанного ограничения (29) не накладывает дополнительных требований на функцию $P_\Theta(t)$ в нерегулярной точке ($P_\Theta(t_*) = 0$). Однако для продолжения траектории через точку t_* необходимо выполнить условие $\dot{q}(t_*) = 0$. В результате мы получаем три условия на нерегулярной оптимальной траектории

$$\dot{q}(t_*) = 0, \quad P_V(T) = 0, \quad P_\Theta(T) = 0, \tag{51}$$

которые можно выполнить за счет выбора скачков сопряженных переменных вида (48) и произвольных постоянных $P_V(0)$ и $P_\Theta(0)$.

При таком подходе мы получаем невырожденный принцип максимума на всей оптимальной траектории.

Наличие нескольких нерегулярных точек также не приводит к вырождению принципа максимума, однако усложняет поиск оптимальной траектории.

Рассмотрим теперь другой подход к построению невырожденного принципа максимума. Для этой цели при построении функции Понтрягина (9) член

$$P_\Theta \frac{C_y \rho V S}{2m}$$

считаем малым параметром при достаточно малых $C_y(t)$. Тогда выражение для множителя Лагранжа $\lambda(t)$ принимает вид

$$\lambda(t) = -\frac{2kP_V}{1+2kC_x}\, g_0 \sqrt{C_x^2 + C_y^2}. \tag{52}$$

В этом случае условия интегрируемости $\lambda(t)$ выполняются автоматически.

В результате мы получаем невырожденный принцип максимума с нерегулярными точками. Кроме того, выражение (52) позволяет проводить устойчивый итеративный поиск оптимальной траектории для малых $C_y(t)$.

Укажем еще один способ регуляризации вырожденного принципа максимума. Пусть на оптимальной траектории выполнено условие $n_\Sigma = N(2)$. Тогда имеем

$$\frac{1}{2}\ln\left(C_x^2 + C_y^2\right) + \ln\frac{\rho V^2 S}{2mg_0} = \ln N. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь отдельно члены (53), которые связаны с управлением

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(C_x^2 + C_y^2\right) &= \frac{1}{2}\ln\left[(C_x + C_y)^2 - 2C_yC_x\right] = \\ &= \frac{1}{2}\ln\,(C_x + C_y)^2\left[1 - \frac{2C_yC_x}{(C_y + C_x)^2}\right] = \\ &= \ln\,(C_x + C_y) + \frac{1}{2}\ln\left[1 - \frac{2C_yC_x}{(C_y + C_x)^2}\right].\end{aligned} \tag{54}$$

Вычисление производных (54) по C_y дает

$$\left[\ln\,(C_x + C_y)\right]'_{C_y} = \frac{1+2kC_y}{C_x + C_y},$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln\left[1 - \frac{2C_yC_x}{(C_y + C_x)^2}\right]\right\}'_{C_y} - \\ - \frac{\left[(C_x + 2kC_y)(C_y + C_x)^2 - 2(C_y + C_x)(1+2kC_y)C_yC_x\right]}{(C_y + C_x)^4\left[1 - \dfrac{2C_yC_x}{(C_y + C_x)^2}\right]}.$$

Полученные выражения не имеют особенностей при $C_y = 0$. Последнее означает, что в этом случае множитель Лагранжа $\lambda(t)$ для ограничения (53) будет конечным. Таким образом, нерегулярная точка не накладывает никаких ограничений на сопряженную переменную $P_\Theta(t)$. В результате получаем невырожденный принцип максимума.

Из приведенных рассуждений легко получить алгоритм построения нерегулярной траектории. На первом этапе определяется левый кусок нерегулярной траектории по условиям (47). При этом мы используем условия регуляризации множителя Лагранжа $\lambda(t)$. На втором этапе определяется правый кусок траектории по граничным условиям на правом конце вида (7) или (22). Здесь предполагается существование единственной нерегулярной точки.

При поиске правого куска траектории вводим новые свободные параметры $P_\Theta(t_* + 0)$ и $P_V(t_* + 0)$. Далее выбираем их таким образом, чтобы удовлетворить заданным краевым условиям.

Наличие нескольких нерегулярных точек не меняет наших рассмотрений, поскольку каждый кусок траектории определяется независимо.

Замечание. *Отметим, что в нерегулярной точке t_* мы допускаем возможность разрыва сопряженной переменной $P_\Theta(t)$.* ▶

Траектория, определенная по кускам, служит в качестве первого приближения для получения решения на базе невырожденного принципа максимума. Здесь $P_\Theta(t)$ будет непрерывной функцией на всей оптимальной траектории.

Литература

1. *Кир Б. А., Бебенин Г. Г., Ярошевский В. А.* Маневрирование космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1970.
2. *Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. В.* Необходимое условие в принципе максимума. М.: Наука, 1990.
3. *Дикусар В. В., Милютин А. А.* Количественные и качественные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989.
4. *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решений по параметру и наилучшая параметризация. М.: URSS, 1999.
5. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
6. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
7. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
8. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.
9. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
10. *Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А.* Критерий существования содержательного принципа максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1634–1640.