Осовский Л. М.

Институт системного анализа РАН, Москва

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМОЙ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

1. Введение. Постановка задачи

Возможности ускорения центра тяжести тела за счет изменения формы его поверхности в аппаратах межгалактических полетов [1] открывают новые и, по-видимому, перспективные направления науки и техники. Между тем с математической точки зрения задача управления формой допустимой области пространственных переменных при задании краевых условий для уравнений математической физики является нетрадиционной. Здесь возникает неопределенность выбора модели объекта управления и соответственно выбора чем управлять. Для разрешения такой неопределенности предлагается использовать универсальный принцип Эмми Нетер [2]. Принцип имеет две формулировки, каждая из которых вносит свой вклад в решение общей задачи.

Первая формулировка: «Всякая симметрия в мире порождает закон сохранения». Она определила выбор содержательной модели объекта управления — систем линейных симметрических уравнений [3]:

$$A_o \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \sum_i A_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + C\bar{u} = \overline{F}, \tag{1.1}$$

где $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t) \in R^n$, $\overline{F} = \overline{F}(\bar{x}, t) \in R^n$; $A_o = A_o(\bar{x}, t)$, $A_i = A_i(\bar{x}, t)$, $C = C(\bar{x}, t)-$ линейные операторы из R^n в R^n. Операторы A_o и A_i удовлетворяют условию симметрии: $A_o^* = A$, $A_i^* = A_i$ [4, 5].

Содержательность этих уравнений заключается в том, что они тесно связаны с законами сохранения [6–9].

Вторая формулировка Э. Нетер: «Инвариантные системы дифференциальных уравнений относительно некоторой группы преобразований имеют следствием существование первого интеграла». Она стала источником идеи выбора чем управлять. В этой связи ставится задача: параметрическим управлением добиться того, чтобы для системы уравнений (1.1) с заданными начальными и краевыми условиями существовало решение в виде произведения скалярной функции, зависящей от пространственных переменных $\overline{x}$, и векторной функции, зависящей от времени.

Решение задачи стало возможным за счет разработки метода аннулирования влияния операторов, включающих частные производные по пространственным переменным. Полученные результаты расширяют рамки применения принципа абсолютной инвариантности В. С. Кулебакина [10].

2. Формирование модели параметрического управления

Утверждение 1. [3]: *Если*

$$A_0 \geqslant \alpha I, \tag{2.2}$$

где I — оператор тождественного преобразования, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, то система линейных симметрических уравнений (1.1) *приводится к виду, называемому «уравнения законов сохранения»*:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \sum_i B_i \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_i} + +C_1 \overline{V} = \overline{f}, \tag{2.3}$$

$$\overline{V} = A_0^{1/2} \overline{u}, \tag{2.4}$$

$$B_i = \left(A_0^{1/2}\right)^{-1} A_i \left(A_0^{1/2}\right)^{-1}, \tag{2.5}$$

$$\overline{f} = \left(A_0^{1/2}\right)^{-1} \overline{F}, \tag{2.6}$$

$$C_1 = \left(A_0^{1/2}\right)^{-1} \left[A_0 \frac{\partial \left(A_0^{1/2}\right)^{-1}}{\partial t} + \sum_i \left(A_i \frac{\partial \left(A_0^{1/2}\right)^{-1}}{\partial x_i} \right) + C \left(A_0^{1/2}\right)^{-1} \right]. \tag{2.7}$$

Доказательство. В силу (2.2) для A_0 однозначно определен «квадратный корень» $A_0^{1/2}$, который является симметричным положительно определенным. При этом $A_0^{1/2} \cdot A_0^{1/2} = A_0$. Умножая левую и правую части уравнения (1.1) на $\left(A_0^{1/2}\right)^{-1}$ и учитывая (2.4)–(2.7) получим (2.3), что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Операторы B_i являются симметричными. Поэтому (1.1) и (2.3) имеют структуру линейных симметрических уравнений.

Утверждение 2. *Произведение векторной функции от времени и скалярной функции от пространственных переменных*

$$\overline{V}(\overline{x},t) = \left[G(t)\overline{V_{10}} + \int\limits_0^t G(t)G^{-1}(\tau)\overline{f_1}(\tau)\,d\tau\right]\sqrt{1-\Phi(\overline{x})}, \tag{2.8}$$

где

$$G^1(t)G^{-1}(t) + C_1 = 0, G(0) = I, \tag{2.9}$$

$$\overline{f}(\overline{x},t) = \overline{f}_1(t)\sqrt{1-\Phi(\overline{x})}, \tag{2.10}$$

$$\Phi(\overline{x}) \in [0,1] - \text{скалярная функция} \tag{2.11}$$

будет решением системы уравнений законов сохранения (2.3), *с начальными условиями*

$$\overline{V}(\overline{x},0) = \overline{V}_{10}\sqrt{1-\Phi(\overline{x})} \tag{2.12}$$

и краевыми условиями

$$\lim_{\Phi(\overline{x})\to 1^-} \overline{V}(\overline{x},0) = \overline{0}, \tag{2.13}$$

$$\lim_{\Phi(\overline{x})\to 1^-} \left|\frac{\partial \overline{V}(\overline{x},t)}{\partial x_i}\right| = \overline{\infty}, \tag{2.14}$$

если операторы уравнения (2.3), *включающие частные производные по пространственным координатам* $\overline{x}$, *аннулируются параметрическим управлением, т. е. выполняется условие*:

$$\sum_i B_i(\overline{x},t)\frac{\partial \overline{V}(\overline{x},t)}{\partial x_i} \equiv \overline{0}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Условие (2.15) приводит систему линейных уравнений в частных производных (2.3) к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + C_1\overline{V} = \overline{f}. \tag{2.16}$$

Произведение (2.8) векторной функции от времени и скалярной функции от пространственных переменных удовлетворяет системе уравнений (2.16) с начальными условиями (2.12) и краевыми условиями (2.13), (2.14).

Действительно:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + C_1\overline{V} = \left[G'(t)\overline{V_{10}} + f_1(t) + \int\limits_0^t G'(t)G^{-1}(\tau)\,d\tau\right]\sqrt{1-\Phi(\overline{x})} + C_1\overline{V} =$$

$$= G'(t)G^{-1}(t)\left[G(t)\overline{V_{10}} + \int\limits_0^t G(t)G^{-1}(\tau)\overline{f_1}(\tau)\,d\tau\right]\sqrt{1-\Phi(\overline{x})} +$$

$$+ f_1(t)\sqrt{1-\Phi(\overline{x})} + C_1\overline{V} =$$

$$= \left[G'(t)G^{-1}(t) + C_1\right]\overline{V} + \overline{f}(t) = f(t). \tag{2.17}$$

Здесь используются условия (2.9) и (2.10). После дифференцирования (2.8) по пространственным переменным получим

$$\frac{\partial\overline{V}(\overline{x},t)}{\partial x_i} = \left[G(t)\overline{V_{10}} + \int\limits_0^t G(t)G^{-1}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau\right]\frac{\partial\sqrt{1-\Phi(\overline{x})}}{\partial x_i} =$$

$$= V(\overline{x},t)\left(\frac{-\partial\Phi/\partial x_i}{2(1-\Phi(\overline{x}))}\right). \tag{2.18}$$

Отсюда переходом к пределу убеждаемся, что произведение (2.8) удовлетворяет краевому условию (2.14). *Утверждение* 2 доказано. □

Замечание 2. Если потребовать положительности произведения (2.8), то краевые условия (2.13) и (2.14) приобретают содержательный смысл. В этом случае описание границы допустимой области пространственных переменных становится описанием границы области строго положительных решений системы уравнений законов сохранения (2.3). При этом краевое условие (2.14) служит для выделения предельно четкой границы.

3. Аннулирование операторов, содержащих частные производные пространственных переменных

Центральное место в формировании модели параметрического управления занимает вопрос о реализуемости условия (2.15).

Утверждение 3. *Если* $\Phi(\overline{x}) < 1$, *то условие* (2.15) *приводится к виду*:

$$B\overline{V} = \overline{0}, \tag{3.19}$$

где

$$B = \sum_i B_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \tag{3.20}$$

В этом можно убедиться, используя результаты вычислений частных производных (2.18).

Утверждение 4. *Если произведение* (2.8) *строго положительно, то уравнение* (3.19) *относительно матрицы* B *будет иметь решение только тогда, когда*

$$\det B = 0. \tag{3.21}$$

В противном случае (3.19) *можно записать* $\overline{V} = B^{-1}\overline{0} = \overline{0}$. *Но это противоречит условию, что вектор* $\overline{V}$ *строго положительный.*

Для решения уравнения (3.19) *используем математический аппарат полуобратных матриц* [11]. *В этой связи будем рассматривать вектор* $\overline{V}$ *как матрицу и писать* V.

Тогда (3.19) *становится матричным уравнением*

$$BV = 0. \tag{3.22}$$

Полуобратная матрица V^{-} *определяется условием*

$$VV^{-}V = V. \tag{3.23}$$

Утверждение 5. *Если* V_{*}^{-} *— любая полуобратная матрица к матрице* V, *то общий вид полуобратной матрицы выражается так*:

$$V^{-} = V_{*}^{-} + (I - V_{*}^{-}V)U_1 + U_2\big(I - VV_{*}^{-1}\big), \tag{3.24}$$

где U_1 *и* U_2 *— произвольные матрицы подходящих размеров.*

В этом можно убедиться непосредственно подстановкой (3.24) *в левую часть* (3.23):

$$\begin{aligned} VV^{-}V &= V\big[+(I - V_{*}^{-}V)U_1 + U_2\big(I - VV_{*}^{-1}\big)\big]V = \\ &= VV_{*}^{-}V + (V - VV_{*}^{-}V)U_1V + VU_2(V - VV_{*}^{-}V) = \\ &= VV_{*}^{-}V = V. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Утверждение 6. *Общее решение уравнения* (3.22) *относительно матрицы* B *выражается следующим образом*:

$$B = \Omega(I - VV^{-}), \tag{3.26}$$

где Ω *— произвольная матрица соответствующих размеров Действительно*:

$$BV = \Omega(I - VV^{-})V = \Omega(V - VV^{-}V) = 0. \tag{3.27}$$

Утверждение 7. *Если матрица* B *является симметричной, то*

$$B = (I - VV^{-})^{\mathrm{T}}(I - VV^{-}). \tag{3.28}$$

Действительно

$$B^{\mathrm{T}} = \big[\big(I - VV^{-}\big)\big]^{\mathrm{T}}\big[(I - VV^{-})^{\mathrm{T}}\big]^{\mathrm{T}} = \big(I - VV^{-}\big)^{\mathrm{T}}(I - VV^{-}) = B. \tag{3.29}$$

Замечание 3. Структура решения (3.31) не является единственной. Существуют такие решения, которые не требуют вычисления полуобратной матрицы.

Утверждение 8. *Матрица, имеющая структуру следующего вида*:

$$B = K\overline{V}\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}, \tag{3.30}$$

где K *— произвольная кососимметрическая матрица* $n \times n$, $\overline{V}$ *— вектор* $n \times 1$ *является решением уравнения*

$$B\overline{V} = 0. \tag{3.31}$$

Доказательство. Подставляя (3.30) в левую часть уравнения (3.31), получим

$$B\overline{V} = (K\overline{V}\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}})\overline{V} = K\overline{V}(\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V}) = 0, \tag{3.32}$$

так как квадратичная форма

$$\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V} = 0. \tag{3.33}$$

В этом нетрудно убедиться. Для квадратичной формы остаются правила транспонирования произведения

$$\left(\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\overline{V}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{V}^{\mathrm{T}}K\overline{V}. \tag{3.34}$$

С другой стороны для скалярных функций, к которым относятся квадратичные формы

$$\left(\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V}. \tag{3.35}$$

Отсюда

$$\overline{V}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\overline{V} = \frac{1}{2}\overline{V}^{\mathrm{T}}\left(K^{\mathrm{T}} + K\right)\overline{V} = 0, \tag{3.36}$$

так как для кососимметрических функций

$$K^{\mathrm{T}} + K = 0. \tag{3.37}$$

Утверждение 8 доказано. □

4. Реализуемость формального решения (2.8)

Аннулирование операторов, включающих частные производные по пространственным переменным, приводит систему уравнений в частных производных (2.3) к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (2.16) с начальными (2.12) и краевыми условиями (2.13) и (2.14). Ее решение (2.8) представляется так:

$$\overline{V}(\overline{x}, t) = \overline{V}_1(t)\sqrt{1 - \Phi(\overline{x})}. \tag{4.38}$$

При этом векторная функция

$$\overline{V}_1(t) = G(t)\overline{V}_{10} + \int_0^t G(t)G^{-1}(\tau)f_1(\tau)\,dt \tag{4.39}$$

является решением задачи Коши для системы уравнений

$$\frac{d\overline{V}_1}{dt} + C_1(t)\overline{V}_1 = \overline{f}_1(t) \tag{4.40}$$

при начальном условии

$$\overline{V}_1(0) = \overline{V}_{10}. \tag{4.41}$$

Здесь $G(t)$ — матрица, определяющая оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения (4.40). Формально $G(t)$ определяется решением матричного уравнения

$$\frac{dG}{dt} + C_1(t)G(t) = 0 \tag{4.42}$$

при начальном условии

$$G(0) = I. \tag{4.43}$$

При произвольной матричной функции $C_1(t)$ решение задачи (4.42), (4.43) не представляется в обозримом виде.

Однако нас интересует задача конструирования системы дифференциальных уравнений по выбранному поведению решения. Эта задача значительно проще. В этой связи пусть

$$G(t) = e^{A(t)}, \tag{4.44}$$

где $A(t)$ — матричная функция $n \times n$, причем $A(0) = 0$. Тогда решение задачи (4.40), (4.41) принимает вид:

$$\overline{V}_1(t) = e^{A(t)}\overline{V}_{10} + \int\limits_0^t e^{A(t)}e^{-A(\tau)}(\tau)\overline{f_1}(\tau)\,d\tau. \tag{4.45}$$

Однако при этом требуется, чтобы экспоненциальная матричная функция была дифференцируемой по t.

Утверждение 9. *Если матричная функция $A(t)$ дифференцируема, то экспоненциальная матричная функция* (4.44) *имеет производную, и она выражается формулой*:

$$\frac{de^{A(t)}}{dt} = e^{A(t)} \int\limits_0^t e^{-\tau A(t)}\frac{dA(t)}{dt}e^{\tau A(t)}\,d\tau. \tag{4.46}$$

Доказательство. Введем две экспоненциальные матричные функции от $\eta \in [0, 1]$:

$$e^{\eta A(t)} \quad \text{и} \quad e^{\eta A(t+\Delta t)}. \tag{4.47}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\eta}\left[e^{\eta A(t+\Delta t)} - e^{\eta A(t)}\right] = A(t+\Delta t)e^{\eta A(t+\Delta t)} - A(t)e^{\eta(t)} = \\ &= A(t)\left[e^{\eta A(t+\Delta t)} - e^{\eta A(t)}\right] + [A(t+\Delta t) - A(t)]e^{\eta A(t+\Delta t)}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Соотношение (4.48) будем рассматривать как неоднородную систему линейных матричных уравнений относительно разности

$$e^{\eta A(t+\Delta t)} - e^{\eta A(t)} \tag{4.49}$$

с нулевыми начальными условиями. Решение этой системы имеет вид:

$$e^{\eta A(t+\Delta t)} - e^{-\eta A(t)} = \int_0^{\eta} e^{(\eta-\tau)A(t)} \left[A(t+\Delta t) - A(t)\right] e^{\tau A(t+\Delta t)}\, d\tau. \tag{4.50}$$

Полагая $\eta=1$ и переходя к пределу в левой и правой части (4.50), получим

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{e^{A\,(t+\Delta t)} - e^{A(t)}}{\Delta t} = \int_0^1 e^{A(t)} e^{-\tau A\,(t)} \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}\right] e^{\tau A\,(t)}\, d\tau. \tag{4.51}$$

Отсюда следует справедливость *Утверждения* 9. □

Замечание 4. Подставляя формулу (4.46) в уравнение (4.42), находим матрицу

$$C_1 = -\int_0^t e^{-\tau A(t)} \frac{dA(t)}{dt} e^{\tau A(t)}\, d\tau. \tag{4.52}$$

Замечание 5. Выражение (4.52) существенно упрощается, если

$$A(t)\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt}A(t). \tag{4.53}$$

В этом случае

$$C_1 = -\frac{dA}{dt}. \tag{4.54}$$

5. Детализация в случае линейных уравнений законов сохранения масс

Здесь конкретизируется решение поставленной задачи на физически содержательном уровне.

Закон сохранения массы в физической системе, состоящей из веществ, участвующих в тех или иных превращениях внутри некоторой неподвижной замкнутой области V, ограниченной поверхностью S, представляется интегро-дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho_k\, dV = -\iint_S \rho(\overline{V}_k^{\mathrm{T}}\overline{n})\, dS = \iiint_V I_k\, dV, \tag{5.55}$$

где $\rho_k = \rho(\overline{x}, t)$, $I_k = I_k(\overline{x}, t)$, $\overline{V}_k = \overline{V}_k(\overline{x}, t)$ $(k = \overline{1, n})$ — соответственно плотность массы, интенсивность внутреннего источника (или стока), вектор переноса k-го вещества внутри трехмерной области V, $\overline{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленной на выход из области V, t — время, $\overline{x}^{\mathrm{T}} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — вектор пространственных переменных.

Применяя теорему Гаусса—Остроградского к сплошной среде, свойства которой не зависят от формы и размера области V, получаем дифференциальный аналог закона сохранения масс:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = I_k - \operatorname{div}(\rho_k \overline{V}_k) \quad (k = 1, n). \tag{5.56}$$

По физическому смыслу $\rho_k = \rho_k(\overline{x}, t) \geqslant 0$.

Замечание 6. Будем считать, что векторы переноса $\overline{V}_k$ каждого вещества являются свободными, как это принималось при выявлении ресурсов технологического управления в [12]. Более того, будем считать скалярные функции интенсивностей также свободными.

Утверждение 10 [13]. *Если выполняются условия*:

$$I_k = I_k^+ - \rho_k I_k^-, \tag{5.57}$$

$$I_k^+ - (\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}} \overline{V}_k \geqslant 0, \tag{5.58}$$

$$I_k^- + \operatorname{div} \overline{V}_k > 0, \tag{5.59}$$

то система уравнений (5.56) *имеет неотрицательный вектор решения, т. е.* $\rho_k \geqslant 0$.

Доказательство. Используя формулы векторного анализа и условие (5.57), перепишем (5.56) следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = (I_k^+ - \rho_k I_k^-) - (\rho_k \operatorname{div} \overline{V}_k + (\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}} \overline{V}_k) = \\ = (I_k^+ - (\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}} \overline{V}_k) - \rho_k \big(I_k^- + \operatorname{div} \overline{V}_k\big). \tag{5.60}$$

По критерию М. А. Красносельского условия (5.58) и (5.59) обеспечивают неотрицательность плотностей масс ρ_k. *Утверждение* 10 доказано. □

Утверждение 11. *Если векторы переноса выражаются через градиенты плотностей масс следующим образом*:

$$\overline{V}_k = \overline{g} \times \operatorname{grad} \rho_k (k = \overline{1, n}), \tag{5.61}$$

где векторная функция $\overline{g}_i = \overline{g}_i(\overline{x}, t)$ *свободная, то в правой части уравнения* (5.60) *аннулируется оператор, включающий частные производные по пространственным переменным*:

$$(\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}} \overline{V}_k \equiv 0. \tag{5.62}$$

Доказательство. Подставляя (5.61) в левую часть (5.62), получим

$$(\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}} (g_k \times \operatorname{grad} \rho_k) \equiv 0, \tag{5.63}$$

так как векторы $(\operatorname{grad} \rho_k)^{\mathrm{T}}$ и $(\overline{g}_k \times \operatorname{grad} \rho_k)$ ортогональны. Что и требовалось доказать. □

Замечание 7. В правой части уравнения (5.60) остался еще один оператор, включающий частные производные по пространственным переменным — $\operatorname{div}\overline{V}_k$.

Утверждение 12. *Если выбрать*

$$\bar{g}_k = \operatorname{grad}\varphi_k, \tag{5.64}$$

где $\varphi_k = \varphi_k(\overline{x}, t)$ *— свободная скалярная функция, то*

$$\operatorname{div}\overline{V}_k = 0. \tag{5.65}$$

Доказательство. Подставим (5.61) в левую часть (5.65) и используем формулы векторного анализа:

$$\operatorname{div}(\bar{g}_k \times \operatorname{grad}\rho_k) = (\operatorname{grad}\rho_k)^{\mathrm{T}} \operatorname{rot} g_k - g_k^{\mathrm{T}} \operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\rho_k. \tag{5.66}$$

Так как

$$\operatorname{rot}\bar{g}_k = \operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\varphi_k = \operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\rho_k = 0, \tag{5.67}$$

то *Утверждение* 12 доказано. □

Замечание 8. После аннулирования операторов, включающих частные производные по пространственным переменным, уравнение (5.60) принимает вид:

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial t} = -I_k^-\rho_k + I_k^+ (k = \overline{1, n}). \tag{5.68}$$

Замечание 9. Если выбрать I_k^- и I_k^- так, чтобы

$$I_k^- = I_k^-(t), \tag{5.69}$$

$$I_k^+ = I_k^+(t)\sqrt{1 - \Phi(\overline{x})}, \tag{5.70}$$

то решение уравнения (5.68) будет таким:

$$\rho_k(\overline{x}, t) = \left[e^{-\int\limits_0^t I_k^-(\eta)d\eta}\rho_{0k} + \int\limits_0^t e^{-\int\limits_\tau^t I_k^-(\eta)d\eta} I_{1k}^+(\tau)\,d\tau\right]\sqrt{1 - \Phi(\overline{x})}, \tag{5.71}$$

где

$$\rho_k(\overline{x}, 0) = \rho_{0k}\sqrt{1 - \Phi(\overline{x})}. \tag{5.72}$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям (2.12) и краевым условиям (2.13) и (2.14).

Замечание 10. Для аннулирования операторов, включающих частные производные по пространственным переменным, необходимо вычислять $\operatorname{grad}\rho_k$, а значит $\operatorname{grad}\Phi(\overline{x})$. Поэтому желательно иметь формулу градиента, пригодную для разнообразных форм допустимой области.

Утверждение 13. *Если*

$$\Phi(\overline{x}) = \overline{p}^{\mathrm{T}}(\overline{x})\overline{q}^{\mathrm{T}}(\overline{x}), \tag{5.73}$$

то формула градиента имеет вид:

$$\operatorname{grad}\Phi(\overline{x}) = \overline{p} \times \operatorname{rot}\overline{q} + \overline{q} \times \operatorname{rot}\overline{p} + \left[\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right]\overline{q} + \left[\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right]\overline{p}. \tag{5.74}$$

Доказательство. Вычислим первые два слагаемых в правой части (5.73) и представим их в векторно-матричной форме. После умножения матриц на соответствующие вектор-столбцы и приведения подобных членов получим

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1}p_1\right) + \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}p_2\right) + \left(\frac{\partial p_3}{\partial x_1}q_3 + \frac{\partial q_3}{\partial x_1}p_3\right) \\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial x_2}p_1\right) + \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial x_2}p_2\right) + \left(\frac{\partial p_3}{\partial x_2}q_3 + \frac{\partial q_3}{\partial x_2}p_3\right) \\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_3}q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial x_3}p_1\right) + \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_3}q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial x_3}p_2\right) + \left(\frac{\partial p_3}{\partial x_3}q_3 + \frac{\partial q_3}{\partial x_3}p_3\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{grad}\left(\overline{p}^{\mathrm{T}}\overline{q}\right) = \operatorname{grad}\Phi(\overline{x}) \qquad (5.75)$$

Такова схема доказательства *Утверждения* 13. □

6. Заключение

1. Пополнился арсенал подходов к решению проблем поиска чем управлять [14]. Используются методы аннулирования операторов, включающих частные производные по пространственным переменным.
2. Эти методы позволяют привести системы уравнений в частных производных к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. В результате получено решение систем исходных уравнений в виде произведения скалярной функции от вектора пространственных переменных и векторной функции от времени.
4. Такое разделение независимых переменных в решении исходной системы уравнений позволяет параметрически управлять формой допустимой области пространственных переменных.
5. На примере системы линейных уравнений законов сохранения массы конкретизируется физически содержательное решение задачи.

Литература

1. *Смольяков Э. Р.* Основы полетов с использованием двойственного пространства Минковского // Динамика неоднородных систем. 2005. № 9. С. 85–109.
2. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. Учебное пособие. М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1979. 432 с.
3. *Воеводин А. Ф.*, *Шугрин С. М.* Численные методы расчета одномерных систем / Под ред. акад. Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука, СО, 1981. 208 с.
4. *Friedrichs K. O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Annals Pure and Appl. Math. 1954. № 7. P. 345–392.

5. *Friedrichs K. O.* Symmetric positive linear differential equations // Annals Pure and Appl. Math. 1958. № 11. P. 333–448.
6. *Годунов С. К.* Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // УМН. 1959. Т. 14. № 6. С. 97–116.
7. *Годунов С. К.* Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 521–523.
8. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
9. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. Изд. 2-е. М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1979. 392 с.
10. *Кулебакин В. С.* О применении принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах // Докл. АН СССР. Т. 60. 1948. № 2.
11. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.
12. *Осовский Л. М.* Об основах теории максимально прибыльных непрерывных химико-технологических систем. Препринт. Воронеж: Воронеж. технол. ин-т, 1994. 16 с.
13. *Осовский Л. М.* Подход к стабилизации процессов оптимального превращения веществ в пространстве // Тез. 4-й Международной шк. «Прикладные проблемы управления макросистемами», Алма-Ата, 1–10 апреля 1992. М., 1992. С. 73–80.
14. *Осовский Л. М.* Об одной задаче расширения класса управлений // Динамика неоднородных систем. 2005. № 9. С. 20–32.