Смольяков Э. Р.

Институт системного анализа РАН, Москва

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ И НОВЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ*

Предлагается в классическом анализе размерностей использовать принцип экстремальности, позволивший, как это демонстрируется в работе, существенно расширить возможности этого анализа в отношении обнаружения новых закономерностей в природе, предсказания новых фундаментальных физических постоянных и решения сложных задач. Предлагаемый расширенный анализ позволил понять, что во множестве всех величин в природе существуют иерархические связи, с которыми следует считаться, и предсказать новые фундаментальные постоянные, в частности, несколько аналогов постоянной Планка для миров разного размера (с одновременным предсказанием размеров этих миров) и возможность переноса основных результатов квантовой механики на макромир и другие миры, а также дал серьезные основания для сомнений в справедливости теории кварков.

Введение

Показывается, что если в классическом анализе размерностей использовать особые (вырожденные) экстремали, то возможности этого анализа существенно расширяются и он становится эффективным средством обнаружения новых закономерностей в природе, решения сложных задач и нахождения новых фундаментальных физических постоянных и параметров подобия. Этот расширенный и углубленный анализ размерностей позволил нам, в частности, определить границы трех смежных миров — субмикрокосмоса, микрокосмоса и макрокосмоса — и формирующие эти миры фундаментальные физические постоянные, а также показать, что квантовая механика должна быть справедлива для любых миров, для которых определена нижняя граница и найден отвечающий каждому миру

* Работа выполнена по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» РАН (проект № 1–3) и при поддержке РФФИ (проект № 06–01–00821).

аналог постоянной Планка. Отсюда сделан вывод, что энергия, момент количества движения и угловые скорости вращения невозмущенных или слабовозмущенных небесных тел должны подчиняться законам квантовой механики. Демонстрируется, что «постоянная тонкой структуры» может быть выражена через известные размерные фундаментальные физические постоянные. Предлагаемая экстремальная теория размерностей предоставила также серьезные основания для сомнений в справедливости теории кварков и в целесообразности предлагавшихся М. Планком постоянных для субмикрокосмоса.

Анализ размерностей и особые экстремали

1. Возможности и недостатки классического анализа размерностей

Анализ размерностей использовался в течение четырех последних столетий как средство предварительной оценки возможных решений сложных задач (нахождение решений которых традиционными математическими средствами оказывалось затруднительным), а также с целью поиска параметров подобия или неизвестных размерных коэффициентов. До наших дней этот анализ дошел по существу в том же виде [1–6], каковым он был известен еще И. Ньютону и его современникам. Правда, формально он все же был дополнен в 1914 г. так называемой П-теоремой [1], которая, однако, не содержит ничего принципиально нового, а всего лишь формулирует основной принцип анализа размерностей в компактной форме.

Серьезные затруднения в любых приложениях классического анализа размерностей возникают, во-первых, в связи с тем, что число основных (независимых) размерностей в большинстве задач оказывается меньше числа подлежащих определению неизвестных параметров, так что получаемая линейная система уравнений для их определения содержит неизвестных больше, чем имеющееся число уравнений для их определения. Практикуемая в течение четырехсот лет практика введения дополнительных основных размерностей является весьма искусственным и сомнительным выходом из этого положения и приводит зачастую или к несовместной системе уравнений, или к решению, не имеющему никакого отношения к той задаче, решение которой ищется. Во-вторых, — в связи с тем, что в классическом анализе размерностей решение всегда определяется только с точностью до неизвестной безразмерной постоянной, в то время как предлагаемые нами особые экстремали, когда в них возникает необходимость (т. е. когда число неизвестных параметров превосходит число основных размерностей), позволяют, как правило, найти и эту неизвестную безразмерную постоянную, а следовательно, получить законченное полное решение исследуемой задачи.

Несмотря на относительную простоту теории размерностей, в отношении нее до сих пор не утихают научные споры [1–6]. Остановимся только на основных разногласиях специалистов. Главное из них касается выбора основных (независимых) единиц измерения и их числа. Как пишет Л. А. Сена, одни считают, что число «основных единиц задано нам природой и определяется характером тех явлений, которые подлежат рассмотрению», [3, с. 30], а другие полагают, что поскольку «качества материального мира бесконечно многообразны, ..., то число таких единиц будет также бесконечно большим», [3, с. 30]. Немало и тех, кто считает, что «должна быть только одна основная единица», [3, с. 31].

Покажем, что неполнота и неудачное трактование анализа размерностей в мировой литературе явились причиной крайне ограниченного его использования, а затем продемонстрируем, как за счет всего лишь дополнения этого анализа процедурой поиска особых экстремалей приоткрываются новые возможности для физики и техники и разрешаются все споры между физиками в отношении анализа размерностей.

Продемонстрируем прежде всего, что любые формулы размерности в любой системе единиц выражают некоторые физические законы, причем как уже известные, так и еще неизвестные, которые науке предстоит открыть в будущем и в открытии которых теория размерностей (дополненная нами понятием особой экстремали [7]) может сыграть существенную роль (вопреки скептическому отношению к ней М. Планка [8] и солидарного с ним Л. А. Сена [3]). В подтверждение того, что формулы теории размерностей не бессмысленны (вопреки намекам Л. А. Сена [3] на их бессмысленность), рассмотрим тот же самый пример размерности электрической емкости (конденсатора) C, который приводится Л. А. Сена в качестве демонстрации абсурдности поиска физического смысла в формулах размерности. Л. А. Сена пишет: «...формула может приобрести довольно причудливый вид. Для примера приведем размерность емкости в Международной системе единиц», [3, с. 74]:

$$[C] = [L]^{-2}[M]^{-1}[T]^4[I]^2, \tag{1}$$

где $[L], [M], [T]$ и $[I]$ — размерности, соответственно, длины, массы, времени и силы тока.

Однако формула (1) вовсе не «причудлива», а выражает через себя неявно заложенные в ней уже известные нам законы физики. В самом деле, поскольку емкость C определяется как частное от деления заряда Q на напряжение U, то получаем для соответствующих размерностей

$$[C] = \left[\frac{Q}{U}\right] = \left[\frac{IT}{P/I}\right] = \left[\frac{I^2T}{P}\right] = \\ = \left[\frac{I^2T}{ML^2/T^3}\right] = \left[\frac{I^2T^2}{ML^2/T^2}\right] = [L]^{-2}[M]^{-1}[T]^4[I]^2,$$

где мы использовали определение заряда $Q = IT$ и мощности, с одной стороны, через посредство закона Ома $(P = IU)$, а с другой, через посредство формулы $P = W/T$, где W — работа. Таким образом, даже пример (1), специально выбранный Л. А. Сена для демонстрации отсутствия всякого смысла в формуле размерности емкости, демонстрирует, скорее, обратное, а именно, что эта размерность явно выражает именно те физические зависимости, через посредство которых емкость себя определяет и проявляет в различных явлениях.

Аналогичным образом, в гауссовой системе единиц СГС емкость характеризуется следующей цепочкой тождеств, завязанных через закон Кулона $F = Q^2/L^2$ и различные выражения для работы и мощности:

$$[C] = [L] = \left[\frac{Q}{U}\right] = \left[\frac{Q}{W/Q}\right] = \left[\frac{Q^2}{W}\right] = \left[\frac{Q^2}{FL}\right] = \left[\frac{Q^2}{(Q^2/L^2)L}\right] = [L].$$

Подобным же образом могут быть проанализированы любые формулы размерности в любых системах единиц. Причем подобный анализ в каких-то случаях позволит обнаружить совершенно новые физические законы. Продемонстрированный пример анализа подтверждает мнение А. Зоммерфельда, считавшего, что следует обращать внимание на размерность физических величин и сказавшего [9]: «Мы не придерживаемся точки зрения Планка, согласно которой вопрос о действительной размерности физической величины лишен смысла».

Несерьезным считаем мы и следующее возражение Л. А. Сена против физического смысла формул размерности: «И уж, конечно, никаких конкретных представлений не вызывают формулы размерности электрических единиц в системе СГС, в которой символы размерности основных единиц стоят в дробных степенях», [3, с. 74]. Но разве формула (1) для емкости в Международной системе (СИ) не может быть переписана, к примеру, в следующем эквивалентном (1) виде

$$[T] = [C]^{1/4}[M]^{1/4}[L]^{1/2}[I]^{-1/2}, \tag{2}$$

в котором она задается именно дробными степенями?

Вопрос о целых или дробных степенях — это вопрос лишь удобства пользования, а вовсе не принципиальный вопрос. Заметим, что уравнение (2) в дробных степенях можно возвести в четвертую степень и получить следующую формулу размерности уже в целых степенях

$$[T]^4 = [C][M][L]^2[I]^{-2},$$

абсолютно эквивалентную (1) и (2).

И все же, несмотря на вышеприведенные аргументы в подтверждение мнения А. Зоммерфельда, мы не можем не согласиться и с мнением М. Планка, считавшего, что вопрос об «истинной» размерности физических величин «имеет не более смысла, чем вопрос об „истинном“ названии какого-либо предмета» [8].

Покажем, что роль теории размерностей в развитии науки несомненно гораздо большая, чем мнение о ней М. Планка. В принципе, число произвольно выбираемых основных единиц измерения может быть любым. Однако, если довести число этих единиц до нуля, т. е. по существу полностью устранить само понятие размерности, то устраняется дополнительная возможность выявления еще неоткрытых связей (законов физики) между различными физическими величинами.

Если бы наука с самого своего зарождения и до настоящего времени опиралась на принцип безразмерности любых величин, то наверняка мы находились бы сейчас на гораздо более низком уровне технического развития. Современному научно-техническому прогрессу мы обязаны в немалой степени и тем, что в науке и технике широко использовались понятия размерности [1–6], поскольку основные законы физики были открыты все-таки с помощью анализа размерностей.

Л. А. Сена, «полностью разделяющий точку зрения М. Планка» [3, с. 78], тем не менее, прибегает не к процедуре уменьшения числа основных единиц (что естественно следовало бы из логики М. Планка и Л. А. Сена), а к процедуре искусственного расширения числа основных единиц в тех случаях, когда теория размерностей не позволяет получить числа уравнений, равного числу неизвестных величин, [3, с. 81–90]. Но и эта процедура лишь в отдельных случаях приводит к желаемой цели. И только предлагаемые в данной работе особые экстремали, по существу, решают все проблемы.

2. Экстремальная теория размерностей

Покажем, что предлагаемые в данной работе особые экстремали позволяют, с одной стороны, радикально устранить все указанные выше неприятности, а с другой, — понять, что в любой задаче всегда существуют и всегда могут быть найдены с помощью этих экстремалей некоторые «базовые» физические постоянные, через которые выражаются многие другие — «производные» постоянные. Чтобы наглядно продемонстрировать, что мы имеем в виду под «базовыми» и «производными» физическими величинами, обратимся к следующему примеру.

На рубеже XIX и XX веков М. Планк экспериментально обнаружил, что световая энергия излучается не непрерывно, а дискретными порциями — «квантами» и что энергия подобного кванта света пропорциональна частоте колебаний света ω с постоянным коэффициентом пропорциональности $\hbar$ (имеющим размерность момента количества движения $[ML^2T^{-1}]$), так что энергия кванта света равна $\hbar\omega$, где $\hbar = 1{,}0545887 \cdot 10^{-27}$ [СГС] (в гауссовой системе единиц: сантиметр, грамм, секунда). М. Планк мог попытаться вычислить эту постоянную на основе анализа размерностей, предположив, что она выражается через скорость света c и заряд электрона e в виде $\hbar = Ce^{\beta}c^{\gamma}$, где C — безразмерная постоянная. Перепишем это уравнение только в аргументах размерностей системы [СГС]:

$$[ML^2T^{-1}] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]^{\beta}[LT^{-1}]^{\gamma}.$$

Приравнивание степеней размерностей с обеих сторон дает $\beta = 2$, $\gamma = -1$, а следовательно, приводит к формуле $\hbar = Ce^2/c$. Эксперименты показали, что $C = 1/\alpha = 137{,}03604$. При этом до сих пор оказались непонятыми смысл величины $1/\alpha$, получившей позднее название «постоянной тонкой структуры», и смысл и роль постоянной $\widehat{h} \triangleq e^2/c$, которую, в соответствии с нижеизложенным, мы отнесем к «базовой» физической величине, а постоянную Планка $\hbar$, получаемую из «базовой» с помощью вспомогательного коэффициента, — к «производной» величине. Как следствие этого непонимания, непонятой оказалась как область применимости квантовой механики с найденной М. Планком постоянной $\hbar$, так и область применимости уравнения Шредингера, формально совершенно не привязанного к конкретной величине постоянной Планка и утверждающего лишь, что энергия и момент количества движения квантованы. И только предлагаемое нами понятие особой экстремали открыло дверь к пониманию подобных и многих других вещей.

Заметим, что в XVII веке основные законы движения были первоначально открыты с помощью именно анализа размерностей. Например, в 1641 г. Торричелли нашел скорость v истечения жидкости из сосуда (под действием силы тяжести — гравитационного ускорения g) в зависимости от высоты h верхнего уровня воды над отверстием ее истечения из сосуда. Классический анализ размерностей для этой задачи приводит к поиску постоянных α и β в формуле $v = Cg^{\alpha}h^{\beta}$. Сравнение размерностей с обеих сторон дает $v = C\sqrt{gh}$, где постоянная C может быть определена в данном случае только из эксперимента и равна $\sqrt{2}$. Эта же формула определяет и скорость падения тела с заданной высоты. Заметим, что многие из известных, начиная с XVII века, формул (например, $h = gt^2/2, v = gt$ и другие), а также многочисленные параметры подобия определялись с использованием анализа размерностей, но лишь с точностью до безразмерного коэффициента C, который приходилось искать экспериментально. Если бы Ньютону были известны особые экстремали, то найденные им уравнения и законы движения не нуждались бы даже в экспериментальном подтверждении, поскольку включали бы в себя точные значения даже всех безразмерных постоянных. Покажем, к примеру, как можно найти уравнения движения и все их решения в постоянном гравитационном поле с помощью особых экстремалей.

Особыми называют экстремали (или решения), в отношении которых возникают принципиальные затруднения в вопросе выяснения того, определяют они максимум, минимум или какие-то иные экстремальные состояния динамической системы. Например, в «невыпуклых» задачах оптимального управления, к которым относится подавляющая часть задач оптимизации, именно на особых экстремалях, на которых реализуются так называемые «скользящие режимы», зачастую и достигается глобальный максимум или минимум [7].

В предельно упрощенном виде существование особого решения можно продемонстрировать на задаче максимизации или минимизации линейной функции $y = kx$, определенной на множестве $(-\infty < x < +\infty)$. Формально особый экстремум этой линейной функции достигается в тех точках $x \in R$, в которых $dy/dx = 0$. Если $k \neq 0$, то множество подобных точек пусто, а если $k = 0$, то это множество совпадает с множеством R всех вещественных чисел. Следовательно, любая функция $y(x) = \text{const}$ формально является особой экстремалью. Использование этого, казалось бы, тривиального факта позволило в данной работе получить далеко не тривиальные результаты в отношении теории размерностей и фундаментальных физических постоянных.

Предположим, что требуется найти уравнение движения в постоянном гравитационном поле и все решения этого уравнения. Пусть $x(t)$ — решение, которое мы ищем, t — время, g — гравитационная постоянная, а $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ — соответственно первая и вторая производные по времени от положения $x(t)$ движущегося тела. Будем искать решение $x(t)$ в виде

$$x(t) = C\ddot{x}^k \cdot \dot{x}^l \cdot g^m \cdot t^n,$$

где C — неизвестная безразмерная постоянная. Запишем это уравнение в основных размерностях системы [СГС], принимая обозначения: $[L]$ — размерность длины, а $[T]$ — размерность времени. Получаем

$$[L] = \left[\frac{L}{T^2}\right]^k \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^l \cdot \left[\frac{L}{T^2}\right]^m \cdot [T]^n.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем следующую систему двух линейных уравнений с четырьмя переменными

$$1 = k + l + m, \quad 0 = 2k + l + 2m - n.$$

Выражая из этой системы любые две степени через остальные, получаем, например, $k = n - m - 1$, $l = 2 - n$. В результате, имеем

$$x = C\ddot{x}^{n-m-1} \cdot \dot{x}^{2-n} \cdot g^m \cdot t^n.$$

Логарифмируем это выражение и приравниваем нулю частные производные от $\lg x$ по m и n (т. е. определяем особые экстремали). В результате получаем

$$\frac{\partial \lg x}{\partial l} = -\lg \ddot{x} + \lg g = 0,$$
$$\frac{\partial \lg x}{\partial n} = \lg \ddot{x} - \lg \dot{x} + \lg t = 0.$$

Отсюда находим следующие два экстремальных решения: $\ddot{x} = g$ и $\dot{x} = \ddot{x}t = gt$. Подставляя эти решения в выражение для x, получаем $x = Cgt^2$, а подставляя это последнее уравнение в экстремальные решения, находим $C = 1/2$. Таким образом, анализ размерностей с учетом особых экстремалей позволил получить уравнение движения $\ddot{x} = g$ и найти его точные решения $x = gt^2/2$, $\dot{x} = gt$. Без использования особых экстремалей, на основе классического анализа размерностей получить приведенные точные решения без помощи экспериментов (позволяющих определить неизвестные безразмерные константы) было бы принципиально невозможно.

Только использование особых экстремалей позволило понять, что среди всех размерных величин в природе имеет место определенная иерархия, в соответствии с которой не каждую величину из любой рассматриваемой группы величин допустимо представлять в виде разложения через другие величины с безразмерным коэффициентом пропорциональности. Например, если в рассмотренном примере вместо поиска функции $x = x(\ddot{x}, \dot{x}, g, t)$ искать функцию $\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x}, x, g, t)$, то найденное «решение» $\dot{x} = Cgt$ окажется несовместимым с получаемыми при этом экстремальными «решениями» $\ddot{x} = g$ и $x = gt^2$. Недопустимо искать представление любой из пяти величин $(\ddot{x}, \dot{x}, x, g, t)$ через остальные, кроме $\ddot{x}(\dot{x}, x, g, t)$. Так что грамотное применение анализа размерностей требует предварительного выяснения, какие из величин являются «базовыми», а какие — «производными».

Из сформулированной ниже теоремы, использующей особые экстремали, следует, что постоянные (e, c, G) (где G — гравитационная постоянная) являются самыми универсальными и важными в нашем мире и что, независимо от числа анализируемых параметров, всегда число экстремальных уравнений равно числу анализируемых параметров, а следовательно, все системы счисления эквивалентны. Кроме того, эта теорема дает алгоритм итерационного поиска новых фундаментальных физических постоянных на основе уже известных.

Допущения. Пусть выбрана некоторая система единиц с основными единицами $B_1, \ldots, B_n$ (например, $B_1 = L$ — единица длины, $B_2 = M$ — единица массы и $B_3 = T$ — единица времени в гауссовой системе единиц (СГС): сантиметр, грамм, секунда) и заданы k известных экстремальных базовых постоянных $A_1, \ldots, A_k$ (например, заряд электрона $A_1 = e$, скорость света $A_2 = c$ и гравитационная постоянная $A_3 = G$) и $m - k$ произвольно выбранных физических параметров $A_{k+1}, \ldots, A_m$, имеющих размерности $[A_i] = [B_1]^{\alpha_{i1}}, \ \ldots, [B_n]^{\alpha_{in}}$, $i = 1, \ldots, m$. И пусть ищется представление через параметры A_i произвольного параметра X, имеющего размерность $[X] = [B_1]^{\beta_1}, \ \ldots, \ [B_n]^{\beta_n}$, которое запишем в виде, более удобном для наших дальнейших ссылок на него

$$R \stackrel{\triangle}{=} X - CA_1^{\alpha_1}, \ldots, A_m^{\alpha_m} = 0,$$

где C — произвольная безразмерная постоянная. Это равенство в аргументах размерностей принимает вид

$$[X] = [B_1]^{\beta_1} \dots [B_n]^{\beta_n} = \left([B_1]^{\alpha_{11}} \dots [B_n]^{\alpha_{1n}}\right)^{\alpha_1} \dots \left([B_1]^{\alpha_{m1}} \dots [B_n]^{\alpha_{mn}}\right)^{\alpha_m}.$$

Уравнивание размерностей с обеих сторон этого равенства приводит к линейной системе n уравнений с m неизвестными α_i:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\alpha_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если эта система несовместна, то это означает, что параметры A_i выбраны неудачно и их следует заменить. Если же система совместна, то, в зависимости от ранга n_0 матрицы $\{\alpha_{ij}\}$, она позволяет выразить n_0 параметров α_i $(n_0 \leqslant n)$ через остальные $(m - n_0)$, т. е. $\alpha_1(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_m)$, $\dots, \alpha_{n_0}(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_m)$.

Теорема 1. *В случае удовлетворения вышеприведенных допущений поставленная задача представления параметра X через параметры A_i, $i = 1, \dots, m$, позволяет найти $m - n_0$ экстремальных формул, связывающих между собой параметры A_i, с помощью особых экстремалей из условий $\partial \lg X/\partial\alpha_j = 0$, $j = n_0 + 1, \dots, m$, а также n_0 экстремальных формул, выражающих n_0 основных единиц через параметры A_i, $i = 1, \dots, m$, из условий $\partial \lg R/\partial\alpha_j = 0$, в которые вместо X по очереди подставляются параметры B_j, $j = 1, \dots, n_0$.*

Следствие 1. *Если некоторый параметр выражается только через экстремальные базовые параметры некоторой формулой, то этот параметр также является экстремальным базовым, причем существует множество и других, принципиально различных формул его представления через экстремальные базовые параметры. И все эти формулы определяют одно и то же численное значение для этого параметра, что принципиально отличает его от любого неэкстремального параметра.*

Следствие 2. *Если какая-либо формула содержит более одного неэкстремального параметра (как, например, в формуле $\hbar = (1/\alpha)\widehat{h}$ таковыми являются $\hbar$ и α, как это станет понятно из изложенного ниже), то подобную формулу следует считать неэкстремальной или ложной экстремальной, независимо от способа ее получения. Неэкстремальные параметры выражаются через любые заданные параметры, как правило, всего единственной формулой; в этом их существенное отличие от экстремальных базовых параметров.*

Продемонстрируем на следующих примерах возможности использования на практике теоремы 1 и следствий из нее.

Пример 1. Пусть $A_1 = e$, $A_2 = c$ и $A_3 = G$ — фундаментальные постоянные, которые можно назвать экстремальными базовыми, поскольку они удовлетворяют любым полученным на основе теоремы 1 экстремальным формулам, а $A_4 = h$ и $A_5 = L_0$ — произвольно выбранные постоянные, где h — некоторый аналог постоянной Планка, а L_0 — некоторая фундаментальная длина. Выразим константу мощности (P) через эти постоянные, рассматривая их все в системе СГС. Эту зависимость будем искать в следующем виде, опуская возможный безразмерный коэффициент:

$$P = e^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot L_0^{\delta} \cdot G^{p} \cdot h^{q}.$$

Запишем это представление для P в базовых размерностях системы СГС:

$$[P] \triangleq \left[\frac{ML^2}{T^3}\right] = \left[\frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T}\right]^{\beta} \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^{\gamma} \cdot \left[L\right]^{\delta} \cdot \left[\frac{L^3}{MT^2}\right]^{p} \cdot \left[\frac{ML^2}{T}\right]^{q}.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем систему трех линейных уравнений с пятью неизвестными

$$1 = \frac{1}{2}\beta - p + q, \;\; 2 = \frac{3}{2}\beta + \gamma + \delta + 3p + 2q, \;\; 3 = \beta + \gamma + 2p + q.$$

Решая ее относительно (β, γ, δ), находим

$$\beta = 2(1 + p - q), \quad \gamma = 1 - 4p + q, \quad \delta = -2(1 + p).$$

В результате получаем для P следующее представление (с точностью до безразмерного множителя):

$$P = e^{2(1+p-q)} \cdot c^{(1-4p+q)} L_0^{-2(1+p)} \cdot G^{p} h^{q}. \tag{3}$$

Логарифмируя (3) и приравнивая нулю частные производные от lgP по p и q (т. е. определяя особые экстремали), получаем следующие экстремальные базовые представления (причем именно экстремальные базовые, согласно следствиям 1 и 2) для h и L_0:

$$\begin{aligned} \widehat{h} &= \frac{e^2}{c} = 7{,}6957018 \cdot 10^{-30}\,\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с}}, \\ \widehat{L}_0 &= \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = 1{,}3804513 \cdot 10^{-34}\ \text{см}. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя найденные экстремальные базовые постоянные $\widehat{h}$ и $\widehat{L}_0$ в выражение (3) для константы мощности P, получаем для этого коэффициента одно из множества эквивалентных экстремальных базовых представлений:

$$\widehat{P} = \frac{c^5}{G} = 0{,}36295049 \cdot 10^{60}\ \text{СГС} = 0{,}36295049 \cdot 10^{53}\ \text{Вт}.$$

Следующий пример, рассматриваемый в самом общем виде, демонстрирует, каким образом можно находить множество всех возможных эквивалентных экстремальных формул и экстремальных базовых постоянных для любых физических величин.

Пример 2. Пусть $A_1 = e$, $A_2 = c$ и $A_3 = G$ — фундаментальные постоянные, которые можно назвать экстремальными базовыми, поскольку они удовлетворяют любым полученным на основе теоремы 1 экстремальным формулам, а $A_4 = h_0$ — аналог постоянной Планка, $A_5 = L_0$ — произвольно выбранная постоянная длины, $A_6 = T_0$ некоторая постоянная времени и $A_7 = M_0$ — постоянная массы. И пусть ищется представление некоторого параметра Y, размерность которого $[T]^k[L]^l[M]^m$, через параметры $A_1, \ldots, A_7$, причем, без потери общности, можно принять, что все величины задаются в системе СГС. Это представление ищется в следующем виде

$$R \stackrel{\triangle}{=} Y - C \cdot e^\beta \cdot c^\gamma \cdot L_0^\delta \cdot G^p \cdot h_0^q \cdot T_0^\theta \cdot M_0^\omega = 0. \tag{5}$$

где C — некоторый безразмерный коэффициент.

Запишем это представление для Y в базовых размерностях системы СГС:

$$[Y] \stackrel{\triangle}{=} [T]^k[L]^l[M]^m =$$
$$= \left[\frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T}\right]^\beta \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^\gamma \cdot [L]^\delta \cdot \left[\frac{L^3}{MT^2}\right]^p \cdot \left[\frac{ML^2}{T}\right]^q \cdot [T]^\theta \cdot [M]^\omega. \tag{6}$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем систему трех линейных уравнений с семью неизвестными (рациональные числа k, l, m здесь предполагаются заданными, так как они определяют конкретный параметр Y):

$$k = -\beta - \gamma - 2p - q + \theta,$$
$$l = \frac{3}{2}\beta + \gamma + \delta + 3p + 2q,$$
$$m = \frac{1}{2}\beta - p + q + \omega.$$

Решая ее относительно (β, γ, δ), находим

$$\beta = 2(m + p - q - \omega),$$
$$\gamma = q + 2\omega + \theta - 4p - k - 2m,$$
$$\delta = \omega - 2p - \theta + k + l - m.$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов β, γ и δ в (5), получаем для параметра Y следующее представление

$$R \stackrel{\triangle}{=} Y - Ce^{2(m+p-q-\omega)}c^{(2\omega+\theta+q-4p-k-2m)}L_0^{(\omega-2p-\theta+k+l-m)} \times$$
$$\times G^p h_0^q T_0^\theta M_0^\omega = 0. \tag{7}$$

Логарифмируя (7) и приравнивая нулю частные производные от $\lg Y$ по p, q, θ и ω (т. е. определяя особые экстремали), получаем следующие экстремальные базовые представления (причем именно экстремальные базовые, согласно следствиям 1 и 2) для L_0, h_0, T_0 и M_0:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \lg Y}{\partial p} = 2\lg e - 4\lg c - 2\lg L_0 + \lg G = 0, \quad \widehat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2},\\
&\frac{\partial \lg Y}{\partial q} = -2\lg e + \lg c + \lg h_0 = 0, \quad \widehat{h} = \frac{e^2}{c},\\
&\frac{\partial \lg Y}{\partial \theta} = \lg c + \lg T_0 - \lg L_0 = 0, \quad \widehat{T} = \frac{\widehat{L}}{c} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3},\\
&\frac{\partial \lg Y}{\partial \omega} = -2\lg e + 2\lg c + \lg L_0 + \lg M_0 = 0, \quad \widehat{M} = \frac{e^2}{c^2\widehat{L}} = \frac{e}{\sqrt{G}}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Эти экстремальные базовые параметры имеют следующие численные значения

$$
\begin{aligned}
\widehat{h} &= \frac{e^2}{c} = 7{,}6957018\cdot 10^{-30}\,\frac{\text{г}\cdot\text{см}^2}{\text{с}},\\
\widehat{L} &= \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = 1{,}3804513\cdot 10^{-34}\ \text{см},\\
\widehat{T} &= \frac{e\sqrt{G}}{c^3} = 4{,}6046906\cdot 10^{-45}\ \text{с},\\
\widehat{M} &= \frac{e}{\sqrt{G}} = 1{,}859544\cdot 10^{-6}\ \text{г}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Если же в (7) задать Y в виде $Y = T_0^k L_0^l M_0^m$ и приравнять нулю частные производные от $\lg R$ по k, l и m (т. е. найти особые экстремали), то снова приходим к уже найденным формулам (8). Однако теперь уже в явном виде получаем экстремальные формулы именно для основных n_0 единиц используемой системы счисления (в данном случае для L, M, T при $n_0 = 3$):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \lg R}{\partial k} = \lg T_0 - \lg e + 3\lg c - \frac{1}{2}\lg G = 0, \quad \widehat{T} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3},\\
&\frac{\partial \lg R}{\partial l} = \lg L_0 - \lg e + 2\lg c - \frac{1}{2}\lg G = 0, \quad \widehat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2},\\
&\frac{\partial \lg R}{\partial m} = \lg M_0 - \lg e + \frac{1}{2}\lg G = 0, \quad \widehat{M} = \frac{e}{\sqrt{G}}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что численное значение любой экстремальной базовой постоянной может быть найдено из множества эквивалентных экстремальных формул, например:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{h} = \frac{e^2}{c} = \frac{ec\widehat{L}_0}{\sqrt{G}} = \frac{c^3\widehat{L}_0^2}{G} = \frac{e^{(3/2)}\widehat{L}_0^{(1/2)}}{G^{(1/4)}} = \dots, \\
&\widehat{L} = \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = \frac{\widehat{h}\sqrt{G}}{ec} = \frac{\widehat{h}^2\sqrt{G}}{e^3} = \frac{\widehat{h}^5c^3\sqrt{G}}{e^9} = \dots, \\
&\widehat{T} = \frac{e\sqrt{G}}{c^3} = \frac{\widehat{h}^3\sqrt{G}}{e^5} = \sqrt{\frac{G\widehat{h}}{c^5}} = \dots, \\
&\widehat{M} = \frac{e}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{c\widehat{h}}{G}} = \frac{e^2}{c^2\widehat{L}} = \dots .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Подставляя найденные экстремальные базовые постоянные $\widehat{h}, \widehat{L}, \widehat{T}$ и $\widehat{M}$ в (7), получаем, что для произвольного физического параметра Y, имеющего размерность $[T]^k[L]^l[M]^m$, можно найти его представление через главные физические постоянные e, c, G:

$$
Y = Ce^{(k+l+m)}c^{-(3k+2l)}G^{\frac{1}{2}(k+l-m)}. \tag{11}
$$

Это равенство показывает, что если в задаче присутствует некоторое множество параметров A_i, среди которых имеются и параметры (e, c, G), то во множестве всех этих параметров проявляет себя некоторая иерархия, в которой эти три фундаментальных физических постоянных являются главными и через них выражаются остальные. Так что эта тройка параметров в некотором смысле является основой нашего мира.

Продемонстрируем, как общие результаты примера 2 использовать на практике. Пусть, например, $Y = \varphi$ — скалярный потенциал электромагнитного поля в некоторой точке пространства X, размерность которого в системе СГС равна

$$
[\varphi] = [L]^{-1/2}[M]^{1/2}[T]^{-1},
$$

а следовательно, имеем $k = -1$, $l = -1/2$, $m = 1/2$. Из (11) тогда получаем $\varphi = Cc^4/(eG)$, причем нетрудно найти, что $\widehat{\varphi} = c^4/(eG)$.

Аналогичным образом могут быть найдены эквивалентные экстремальные формулы и экстремальные базовые постоянные и для многих других физических величин, причем можно убедиться, что в основе определяющих их экстремальных формул лежат параметры (e, c, G), если они входят в число допущенных к рассмотрению.

Проведем сравнение полученных нами постоянных (9) с аналогичными постоянными, предложенными М. Планком. Рассмотрим только три следующих постоянных Планка:

$$L_{\text{Planck}} = \sqrt{G\hbar c^{-3}} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$
$$M_{\text{Planck}} = \sqrt{c\hbar G^{-1}} = 2{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ г}, \qquad (12)$$
$$T_{\text{Planck}} = \sqrt{G\hbar c^{-5}} = 5{,}4 \cdot 10^{-44} \text{ с}.$$

С помощью классического анализа размерностей можно найти множество формул представления любой конкретной физической величины через другие физические величины. Однако если эти формулы включают в себя неэкстремальные («производные») величины, то каждая из них дает, в общем случае, разные численные значения для этой величины. Например, если мы ищем формулы представления величины T через множество других физических величин $(e, c, G, h, \ldots)$, то в общем случае получаем

$$T_1 = \frac{(e\sqrt{G})}{c^3}, \quad T_2 = \frac{(h^3\sqrt{G})}{e^5}, \quad T_3 = \sqrt{\frac{(Gh)}{c^5}}, \quad \ldots .$$

Если эти формулы основываются на экстремальных базовых постоянных (т. е. полученных на основе особых экстремалей теоремы 1), то выполняются равенства $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = 4{,}6 \cdot 10^{-45}$ с. (см. (9), (10)). А если они включают в себя неэкстремальные («производные») базовые постоянные (например, постоянную Планка $\hbar$), то дают разные численные значения для T: $T_1 = 4{,}6 \cdot 10^{-45}$, $T_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-38}$ с, $T_3 = 5{,}4 \cdot 10^{-44}$ с,.... Следовательно, у Планка не имелось никаких оснований выбирать для расчета параметра T формулу $T = \sqrt{G\hbar c^{-5}}$, а не формулу $T = \hbar^3 G^{1/2} e^{-5}$ или какую-либо другую.

3. Аналоги постоянной Планка и границы трех миров

Таким образом, использование особых экстремалей закрывает проблему несовпадения числа определяемых параметров с числом основных единиц размерности, позволяет находить, не прибегая к эксперименту, даже безразмерные неизвестные коэффициенты и выявляет иерархию на множестве исследуемых величин. Из рассмотренного примера видно, что экстремальная постоянная $\widehat{h}$ всегда выступает в паре с экстремальным коэффициентом длины $\widehat{L}$, причем эта пара постоянных отвечает классической тройке фундаментальных физических постоянных (e, c, G) и, по-видимому, формирует некоторый мир, который назовем субмикрокосмосом, основу образования которого составляет, вероятно, некоторая элементарная субмикрочастица размером $\widehat{L}$. А это наводит на мысль, что и важнейшая в ядерной физике постоянная Планка $\hbar$ тоже должна быть связана с какой-то постоянной длины L_q (существование которой предполагал еще М. Планк), определяющей, по-видимому, нижнюю границу микрокосмоса. Но тогда логично предположить, что существуют и другие пары (h_k, L_k) «производных» фундаментальных физических постоянных, связанных с той же тройкой (e, c, G), удовлетворяющих лишь вполне определенным формулам (а не множеству эквивалентных экстремальных формул, которым должны удовлетворять экстремальные «базовые» постоянные). Попытаемся предсказать некоторые из «производных» фундаментальных постоянных.

«Постоянную тонкой структуры» $(1/\alpha)$, связывающую $\hbar$ с $\widehat{h}$, можно выразить через размерные фундаментальные физические постоянные, если воспользоваться разложением

$$\hbar = e^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot L_q^{\delta} \cdot G^{p},$$

для которого находим $\beta = 2 - \delta$, $\gamma = 2\delta - 1$, $p = -\delta/2$, а следовательно, имеем

$$\hbar = e^{(2-\delta)} \cdot c^{(2\delta-1)} \cdot L_q^{\delta} \cdot G^{(-\delta/2)}. \tag{13}$$

Если подставить в (13) $\delta \equiv 1/5$ и $L_q = 6{,}6710825 \cdot 10^{-24}$ см, то получаем следующую зависимость «постоянной тонкой структуры» через фундаментальные физические постоянные (e, c, G, L_q):

$$\hbar = e^{9/5} \cdot c^{-3/5} \cdot L_q^{1/5} \cdot G^{-1/10} = \frac{e^2}{c}\left[\left(\frac{c^2 L_q}{e\sqrt{G}}\right)^{1/5}\right] = \widehat{h}\left(\frac{L_q}{\widehat{L}_0}\right)^{1/5} = \widehat{h}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \tag{14}$$

Итак, помимо экстремальной пары фундаментальных констант $(\widehat{h}, \widehat{L})$ (ответственной за процессы в субмикрокосмосе), удовлетворяющей (13) при любом δ, этому равенству при $\delta = 1/5$ удовлетворяет также пара $(\hbar, L_q)$, предположительно ответственная за процессы в микрокосмосе, которыми занимается современная ядерная физика [10, 11]. Причем постоянная L_q оказалась выраженной весьма простой функцией от основных фундаментальных физических постоянных $(e, c, G, \hbar, 1/\alpha)$, очень близкой по значению к приближенно вычисленной В. С. Леоновым прачастице диаметром $7{,}4 \cdot 10^{-24}$ см, в связи с чем естественно предположить, что L_q — это не что иное, как уточнение размера этой прачастицы.

Таким образом, естественно допустить, что некоторая устойчивая гипотетическая частица размером $\widehat{L}$ формирует субмикрокосмос, а устойчивая частица («квантон») [12] размером L_q формирует известный нам мир элементарных частиц (микрокосмос). И покажем еще, что устойчивая частица протон размером L_p формирует окружающий нас материальный мир (макрокосмос) по крайней мере в диапазоне $10^{-13} - 10^{10}$ см (где верхняя граница, несущественная в наших дальнейших расчетах, пока еще нами строго не определена). Из того, что все рассмотренные выше экстремальные и неэкстремальные фундаментальные постоянные выражаются только через три константы (e, c, G), следует, что эти последние лежат в основе образования по крайней мере трех миров — субмикрокосмоса, микрокосмоса и макрокосмоса.

Поскольку теоретические основы квантовой механики [11] построены вне зависимости от того, какова конкретная величина постоянной Планка $\hbar$ (и отвечающей ей постоянной L_q), то эта механика должна быть справедлива не только для микрокосмоса, формируемого парой $(\hbar, L_q)$, но и для любых других миров, для которых лишь должны быть иными аналогичные пары постоянных (h_k, L_k). Между прочим, отсюда сразу следует, что угловые скорости вращения (зависящие от h_k) любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов из мира размером (L_k, L_{k+1}), формируемого парой констант (h_k, L_k), должны подчиняться уравнению

$$\frac{h_k}{2} = \int\limits_V \omega r^2 \rho\, dV = \mathrm{const}, \qquad (15)$$

где ρ — распределенная массовая плотность объекта, а ω угловая скорость его вращения. В (15) берется $h_k/2$ в соответствии с формулами (58.1) и (59.15) квантовой механики [11].

А из (15), в свою очередь, следует, что угловые скорости вращения любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов в любом мире вовсе не случайны и не произвольны. Они — квантованы. Так что, например, как бы любое невозмущенное или слабо возмущенное небесное тело искусственно не раскрутили (или не затормозили), оно (в отсутствие возмущений) неизбежно (вследствие электромагнитной природы вакуума) вернется к своей, предначертанной ей уравнением (15) угловой скорости вращения. А сильно возмущенные тела (например, Луна в поле Земли) условию (15) удовлетворить не в состоянии.

4. Пример предсказания фундаментальных постоянных для макрокосмоса

В качестве примера попробуем спрогнозировать хотя бы одну пару констант (h_p, L_p), ответственную за процессы в макрокосмосе. Успех предсказания существенно зависит от правильности выбора «эталонного» тела, в отношении которого должна быть уверенность, что его угловая скорость является результатом действия констант (h_k, L_k), а не результатом возмущения внешней среды. На роль подобного тела вполне может претендовать Земля, для которой известны угловая скорость вращения $\omega = 7{,}29213 \cdot 10^{-5}$рад/с и момент инерции $J = 8{,}104 \cdot 10^{44}$г$\cdot$см^2 [13], а следовательно, — и кинетический момент $h_e = \omega J = 5{,}9095422 \cdot 10^{40}$ г$\cdot$см^2/с. Земля расположена на столь больших расстояниях от Солнца и больших планет, что они относительно слабо влияют на ее угловую скорость вращения. Вследствие малости Луны по сравнению с Землей ее влияние на скорость вращения Земли также незначительно. Правда, обратное влияние Земли на Луну столь велико, что под действием мощного гравитационного поля Земли Луна полностью потеряла способность свободно вращаться вокруг своей оси.

На роль фундаментальной константы L_p для макрокосмоса вполне может претендовать диаметр протона $L_p = 1{,}628 \cdot 10^{-13}$ см. Причем требуется найти еще и соответствующую константе L_p постоянную h_p. В этом может помочь уравнение (13), если при этом окажется возможным выразить постоянные L_p и h_p через фундаментальные постоянные (e, c, G), используя степени, определяемые рациональными числами.

Подставив в уравнение (13) h_e вместо $\hbar$ и L_p вместо L_q и переписав его в виде, аналогичном уравнению (14), получаем $\delta \approx 3{,}3165 \approx 10/3$. Если же теперь в полученное уравнение подставить $\delta \equiv 10/3$, то мы найдем новую безразмерную физическую постоянную

$$1/\alpha_p \stackrel{\triangle}{=} h_p/\widehat{h} = (L_p/\widehat{L}_0)^{(10/3)} = 1{,}7329162 \cdot 10^{70}$$

и новую размерную фундаментальную физическую постоянную для макрокосмоса

$$h_p = 1{,}3336 \cdot 10^{41} \text{г} \cdot \text{см}^2/\text{с}.$$

Согласно (15) и формулам (58.1) и (59.15) из [11] кинетический момент Земли (спин) в отсутствие возмущений должен равняться величине $\widehat{h}_e = h_p/2 = 6{,}668 \cdot 10^{40}$ СГС, а рассогласование $\Delta h_e = \widehat{h}_e - h_e$ следует отнести на счет возмущения угловой скорости Земли Солнцем и другими планетами и (или) на счет неточного знания момента инерции Земли J, уточнить который для Земли и для таких слабо возмущенных планет, как Юпитер, Сатурн и Уран, можно с помощью уравнения (15).

Замечания в отношении теории кварков

В заключение укажем на некоторые обстоятельства, дающие почву для сомнений в справедливости теории «кварков», основанной на допущении, что элементарный электрический заряд равен одной трети от заряда электрона (или же — просто дробный). Экстремальные формулы (10) указывают на то, что в случае дробности заряда максимальная скорость распространения возмущений (скорость света c) должна была бы быть существенно меньше скорости света. В самом деле, чтобы не нарушились экспериментально подтвержденные равенства $\alpha\hbar = \widehat{h} = e^2/c$ в (10), в теории кварков необходимо величину c уменьшить в 9 раз, т. е. считать скорость распространения возмущений в 9 раз меньшей скорости света c, что явно противоречит современной физике. При этом из остальных равенств в (10) следует, что и фундаментальная длина $\widehat{L}$ в (9) должна быть в 27 раз больше, что хотя еще и не доступно проверке, но представляется сомнительным. К тому же за последние 40 лет так и не удалось подтвердить существование кварков экспериментально. Причем даже несмотря на теоретическое прогнозирование возможности существования хотя бы кварк-глюонной плазмы при энергиях взаимодействия около 200 ГЭв (достижимых на суперсинхрофазотроне SPS ЦЕРН), «до сих пор обнаружить четких указаний на проявление кваркглюонной плазмы не удалось», [11, с. 200].

Заметим, что экстремальная теория размерностей позволяет подтвердить справедливость результатов [15–18] также и для «магнитной» вселенной, двойственной к нашей «электрической» вселенной. «Магнитная» вселенная (в пространстве X^*, двойственном к нашему пространству X) образовалась одновременно с нашей и в ней полностью отсутствуют свободные электрические заряды и магнитные диполи, но имеется точно такое же количество свободных магнитных зарядов и электрических диполей, сколько в нашей вселенной имеется свободных электрических зарядов и магнитных диполей.

Литература

1. *Buckingham E.* // Phys. Rev. 1914. Vol. 4. P. 345.
2. *Бриджмен П. В.* Анализ размерностей. Л.; М.: ГТТИ, 1934.
3. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977.
4. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987.
5. *Спиридонов О. П.* Фундаментальные физические постоянные. М.: Высшая школа, 1991.
6. *Филиппов Г. Г.* Теория размерностей и LTM-физика. М.: КомКнига/URSS, 2007.
7. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
8. *Планк М.* Введение в теоретическую физику. Ч. 3: Электричество и магнетизм. Л.; М.: ГТТИ, 1933.
9. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.
10. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматлит, 2003.
11. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
12. *Леонов В. С.* Электрическая природа ядерных сил. М.: Агроконсалт, 2001.
13. Космонавтика. Маленькая энциклопедия / Под ред. В. П. Глушко. М.: Советская энциклопедия, 1970.
14. *Бопп Ф.* Введение в физику ядра, адронов и элементарных частиц. М.: Мир, 1999.
15. *Смольяков Э. Р.* Теоретическое обоснование межзвездных полетов. М.: URSS, 2005.
16. *Смольяков Э. Р.* Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН РФ. 2006. Т. 404. № 6. С. 734–737.
17. *Смольяков Э. Р.* Вариационные уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 4. С. 475–480.
18. *Смольяков Э. Р.* Интегралы движения в двойственном пространстве // ДАН РФ. 2007. Т. 414. № 4. С. 459–463.
19. *Смольяков Э. Р.* Теория движения электрически заряженных массивных тел в пространстве Минковского и двойственном к нему // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. 2007. Том 29. Вып. 11. С. 85–117.