III. Методы решения задач

Бакушинский А. Б.

Институт системного анализа РАН, Москва

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА*

Предлагается новый общий метод исследования погрешностей широкого класса аппроксимаций элементов гильбертова пространства с помощью заданной ортонормированной системы.

1.

В различных разделах математики широко используются разложения функций в ряд Фурье по тригонометрической, или какой либо иной ортонормированной системе функций. Пусть φ_k, $k = 1, \infty$ — ортонормированная система элементов гильбертова пространства H. Любому элементу $x \in H$ можно сопоставить его ряд Фурье по этой системе

$$\sum_1^\infty (x, \varphi_k)\varphi_k \tag{1.1}$$

Обозначим через S_n сумму $\sum\limits_1^n (x, \varphi_k)\varphi_k$ и через r_n выражение $\|x - S_n\|$. Хорошо известно, если система φ_k, $k = 1, \infty$ полная, то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0, \tag{1.2}$$

для любого элемента пространства H.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06–01–00282а и № 07–01–92104).

Известно много других аппроксимаций элементов гильбертова пространства с помощью заданной полной ортонормированной системы. Можно, например, аппроксимировать $x \in H$ чезаровскими средними сумм S_n. В этом случае соотношение, подобное соотношению (1.2) также будет справедливо. А. Н. Тихоновым [1, с. 224] было рассмотрено семейство аппроксимаций вида

$$R(\alpha, \xi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha\xi_k}(x, \varphi_k)\varphi_k, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{1.3}$$

где φ_k, ξ_k — система собственных функций и соответствующих собственных значений задачи Штурма—Лиувилля с нулевыми граничными значениями. Аппроксимацию, аналогичную аппроксимации (1.3) можно рассмотреть в произвольном гильбертовом пространстве (в этом случае φ_k, $k = \overline{1, \infty}$ — полная ортонормированная система, а ξ_k — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел). Можно показать, что

$$||R(\alpha, \xi) - x|| \to 0, \quad \text{если } \alpha \to 0 \tag{1.4}$$

Естественным следующим действием после доказательства соотношений типа (1.2), (1.4) было бы установление квалифицированной оценки их левых частей в зависимости от параметров n и α. Получению таких оценок для классических аппроксимаций типа частных сумм ряда Фурье посвящено большое количество работ. Однако известные автору исследования и соответствующие оценки существенно опираются на конкретный вид гильбертова пространства и ортонормированной системы его элементов. В этих исследованиях в качестве H обычно фигурирует то или иное пространство Соболева, а в качестве ортонормированной системы, система собственных функций некоторого эллиптического оператора. Здесь уместно упомянуть работы М. А. Красносельского, В. А. Ильина, О. А. Ладыженской и др. (см. например [2] и приведенные там ссылки). Квалифицированные оценки для параметрических аппроксимаций (1.3) ранее видимо не выписывались.

В этой заметке предлагается общий метод исследования широкого класса аппроксимаций элементов гильбертова пространства с помощью полной ортонормированной системы его элементов, в том числе и получение квалифицированных оценок сходимости. Этот метод основан на общей конструкции аппроксимации решений линейных операторных уравнений с вполне непрерывным симметричным оператором в гильбертовом пространстве [3, 4]. Приводятся примеры конкретных результатов, которые могут быть получены с его помощью.

2.

Пусть φ_k, $k = \overline{1, \infty}$ полная ортонормированная система элементов гильбертова пространства H и $\lambda_k, \lambda_k \geqslant \lambda_{k+1}$, $k = \overline{1, \infty}$ последовательность положительных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0 \tag{2.5}$$

Выбранная система элементов и положительных чисел порождает в пространстве H самосопряженный, положительный вполне непрерывный оператор, действующий по формуле

$$Ax = \sum_1^\infty \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k. \tag{2.6}$$

Так как ни одно из чисел λ_k не равно 0, то $\ker A = 0$.

Обозначим через $\vartheta(\lambda, \alpha)$ некоторую функцию двух переменных, определенную на множестве $[0, \lambda_1] \times (0, \infty)$ и кусочно-непрерывную по λ при любом допустимом значении α.

Известно ([3, 4]), что подходящий выбор этой функции обеспечивает возможность аппроксимации решение операторного уравнения

$$Ax = u \tag{2.7}$$

в смысле теории регуляризации.

Нетрудно видеть, что тот же выбор функции $\vartheta(\lambda, \alpha)$ порождает по формуле $\vartheta(A, \alpha)$ аппроксимации любого элемента x из пространства H. Возможный выбор порождающей функции $\vartheta(\lambda, \alpha)$ очень широк. Аппроксимации этого вида включают в частности аппроксимации упомянутые в § 1. Результаты, приведенные в [3, 4], позволяют единообразно исследовать эти аппроксимации. Справедливо следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 1 [4, с. 23].

Теорема 1. *Пусть функция $\vartheta(\lambda, \alpha)$ подчинена условию*

$$\sup_{\lambda\in[0,\lambda_1]} |1 - \vartheta(\lambda, \alpha)\lambda|\, \lambda^p \leqslant C(p)\alpha^p \quad p \in [0, p_0], \alpha \in (0, \infty) \tag{2.8}$$

и кроме того при $p = 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0} |1 - \vartheta(\lambda, \alpha)\lambda| = 0 \quad \lambda \in (0, \lambda_1] \tag{2.9}$$

Тогда $\forall\, x \in H$

$$||A^q[\vartheta(A, \alpha)Ax - x|| \leqslant C(q)\alpha^q ||x|| \quad q \in (0, p_0] \tag{2.10}$$

и

$$\lim_{\alpha\to 0} ||[\vartheta(A, \alpha)Ax - x|| = 0 \tag{2.11}$$

Следствие. *Если элемент $x \in H$ удовлетворяет условию истокопредставимости*

$$x = A^p v \tag{2.12}$$

то справедлива оценка

$$||A^q[\vartheta(A, \alpha)Ax - x|| \leqslant C(q + p)\alpha^{p+q} ||v|| \quad q + p \in (0, p_0] \tag{2.13}$$

Из соотношения (2.6) вытекает, что элемент $\vartheta(A,\alpha)Ax$ аппроксимирует элемент$x \in H$, а неравенства (2.10), (2.13) оценивают погрешность такой аппроксимации в зависимости от параметра α и показателя истокопредставимости в равенстве (2.9).

В силу представления (2.6) справедливо представление для $\vartheta(A,\alpha)Ax$ вида

$$\vartheta(A,\alpha)Ax = \sum_{1}^{\infty} \vartheta(\lambda_k,\alpha)\lambda_k(x,\varphi_k)\varphi_k(14). \tag{2.14}$$

Эта формула позволяет получить явный вид таких аппроксимаций в зависимости от выбора последовательности λ_k и функции ϑ.

Пример 1. Функция

$$\vartheta(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\lambda+\alpha} \tag{2.15}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Если обозначить $\xi_k = 1/\lambda_k$, то правая часть соотношения (2.14) совпадет с правой частью (1.3). Для функции (2.11) условие (2.5) справедливо только при $p \in [0,1]$ (см. [3, 4]). Если $p > 1$, то гарантированная оценка левой части неравенств (2.5) и (2.7) будет $O(\alpha)$ (явление «насыщения»). Таким образом, утверждения теоремы 1 позволяют дать квалифицированную оценку погрешности абстрактного аналога аппроксимации Тихонова (1.3). Возможны различные конкретизации этого абстрактного результата.

Выберем в качестве пространства H пространство $L_2(0,\pi)$. Пусть

$$\lambda_k = \frac{1}{k^2}, \quad \varphi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, \quad k = 1,\infty. \tag{2.16}$$

Порождаемый системой (2.16) оператор (2.6) интегральный, ядро которого функция Грина для задачи Штурма—Лиувилля с оператором $-y''$ и краевыми условиями $y(0) = y(\pi) = 0$.

Базовый выбор (2.16) допускает различные интерпретации утверждений теоремы 1 и ее следствия. В частности пусть функция $x(t) \in L_2(0,\pi)$ имеет квадратично интегрируемую вторую производную и обращается в 0 на концах отрезка $[0,\pi]$. В этом случае выполнено условие истокопредставимости (2.9) с $p = 1$ и следствие теоремы 1 гарантирует оценку $O(\alpha)$ погрешности аппроксимации (1.3). Так как оператор (2.6) имеет гладкое ядро, он переводит множество, ограниченное в $L_2(0,\pi)$в компактное в $C_0(0,\pi)$ множество. Следовательно, так построенные аппроксимации вида (1.3) сходятся к аппроксимируемой функции равномерно. Ранее другим способом это утверждение было установлено А. Н. Тихоновым [1]. Если условие истокопредставимости (2.9) выполнено при $p > 1$, то в этом случае следствие теоремы 1 позволяет получить квалифицированную оценку скорости аппроксимаций (1.3) в метрике $C_0(0,\pi)$. Аналогичные результаты можно получить и для пространства $L_2(D)$, D- область в конечно мерном евклидовом пространстве, если в качестве$\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ взять собственные функции и собственные значения самосопряженного положительно определенного эллиптического оператора.

Пример 2. Функция

$$\begin{aligned} \vartheta(\lambda,\alpha) &= \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \geqslant \alpha, \\ \vartheta(\lambda,\alpha) &= 0, \quad \lambda < \alpha, \end{aligned} \tag{2.17}$$

также удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Для нее $p_0 = \infty$ и $C(p) \equiv 1$.

Функция (2.17) порождает аппроксимацию элемента $x \in H$ частичными суммами его ряда Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ и число членов, используемых в аппроксимирующей сумме, управляется последовательностью $\{\lambda_k\}$.

Например, если функция $x(t) \in L_2(0,\pi)$ имеет квадратично интегрируемую вторую производную и обращается в 0 на концах отрезка, то (в случае системы (2.16))

$$\|x - S_k\| = O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{2.18}$$

Как и в примере 1, если функция $x(t) \in L_2(0,\pi)$ истокопредставима с достаточно высоким показателем, сходимость частных сумм ее ряда Фурье по системе (2.16) будет равномерной. Справедливы многомерные аналоги утверждения (2.18), подобные тем, которые упомянуты в конце описания примера 1.

Пример 3. Функция

$$\begin{aligned} \vartheta(\lambda,\alpha) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad \lambda \geqslant \alpha \\ \vartheta(\lambda,\alpha) &= 0, \qquad\qquad \lambda < \alpha \end{aligned} \tag{2.19}$$

соответствует чезаровскому суммированию ряда Фурье. Условия теоремы 1 для функции (2.12) выполнены, только если $p \in [0, 1]$, как и для функции (2.11).

3.

Утверждение следствия из теоремы 1 допускает частичное обращение. Из теоремы 4 [4, с. 30] следует

Теорема 2. *Пусть порождающая аппроксимацию функция $\vartheta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-2\tau-1}\,|\,1 - \vartheta(\lambda,\alpha)\lambda|\,d\alpha \geqslant \frac{c(\tau)}{\lambda^{2\tau}}, \quad \lambda \in (0,\lambda_1], \quad \tau \in (0,p_0). \tag{3.20}$$

Если для каких-то показателей $p, q, p+q \in (0, p_0)$ *справедлива оценка* (3.20), *то*

$$x \in A^{p-\varepsilon}(H) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, p). \tag{3.21}$$

В [4] показано, что порождающая функция (2.11) удовлетворяет условию (3.20).

Легко проверить выполнение условия (3.20) для функций (2.17) и (2.12). При проверке этого условия для функции (2.12) нужно обратить внимание на то, что в этом случае $\tau \in (0, 1)$.

Если H пространство $L_2(0, \pi)$ и ортонормированная система в нем — система (2.16), то условие (3.21) влечет существование определенного числа производных у аппроксимируемой функции. Например, в силу теоремы 2 соотношение

$$\|x - S_k\| = O\left(\frac{1}{k^{2p}}\right), \quad p > 1$$

влечет существование, по крайней мере [2p] производных у функции $x(t) \in L_2(0, \pi)$. Приведенные следствия из теорем 1, 2 в случае системы (2.16) и порождающей функции (2.17) являются аналогами известных теорем Джексона и Бернштейна в конструктивной теории функций.

Литература

1. *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Красносельский М. А.*, *Забрейко П. П. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
3. *Бакушинский А. Б.*, *Гончарский А. В.* Итерационные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. *Бакушинский А. Б.*, *Кокурин М. Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: URSS, 2002.