Типичные свойства некоторых классов моделей проектирования сложных технических систем*

А. А. Ахрем

В статье исследуется ряд типичных характеристических свойств специальных классов динамических моделей проектирования сложных технических систем. Для таких моделей получены различные алгебраические и геометрические достаточные условия их устойчивости, условной устойчивости, грубой асимптотической устойчивости. Дано также описание типичных множеств подпространств линейных динамических дифференциальных моделей с квазипериодическими и почти-периодическими коэффициентами.

Введение

При конструировании и исследовании прототипов проектируемых сложных технических систем одно из важных мест занимает вопрос о нахождении их типичных характеристических свойств. Напомним, что некоторое свойство E элементов метрического (топологического) пространства Y является типичным, если оно выполняется для почти всех $y \in Y$, т. е.

$$\overline{Y}(E) = Y,$$

где $Y(E)$ — подмножество элементов y пространства Y, обладающих свойствами E; $\overline{Y}(E)$ — замыкание множества $Y(E)$.

Приведем ряд важных примеров типичных свойств некоторых известных пространств систем-прототипов.

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (проект № 2.44).

Пример 1. В данном примере мы будем рассматривать множество $F(ST)$ структурно устойчивых полей на двумерной сфере S^2. Из общей теории динамических систем известно (см., например, [1, 2]), что множество $F(ST)$ открыто и всюду плотно во множестве всех векторных полей $F(S^2)$ на двумерной сфере S^2. Кроме того, элемент $f \in F(S^2)$ является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда он обладает следующими пятью характеристическими свойствами [1, 2]:

1) векторное поле f имеет конечное число особых точек;
2) все особые точки поля f невырождены;
3) ни одна выходящая сепаратриса седла не является входящей;
4) поле f имеет конечное число замкнутых фазовых кривых;
5) все замкнутые фазовые кривые — невырожденные циклы.

Таким образом, каждое из перечисленных выше пяти свойств является типичным для систем-аналогов из пространства векторных полей $F(S^2)$.

Пример 2. В качестве данного примера мы рассмотрим пространство $F(M^m)$ гладких отображений $f\colon M^m \to R$ замкнутого многообразия (т. е. компактного многообразия без края) M^m размерности m на прямую R.

Перечислим ряд важных характеристических свойств элементов множества $F(M^m)$ [2–4].

1. Устойчивые отображения $f\colon M^m \to R$ замкнутого многообразия M^m на прямую образуют всюду плотное (типичное) множество в пространстве всех гладких отображений.
2. Для того, чтобы отображение f было устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:
   — Отображение f устойчиво в каждой точке (иначе говоря, все критические точки функции f невырождены).
   — Все критические значения функции f различны.
3. Отображение $f\colon M^m \to R$ устойчиво в точке $x_0 \in M^m$ тогда и только тогда, когда в окрестностях точек $x_0, y_0 = f(x_0)$ $(y_0 \in R)$ можно так ввести координаты $x_1, ..., x_m, y$,

что отображение запишется в одном из следующих $m+2$ видов:

$$y = x_1,$$
$$y = x_1^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_m^2 \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Таким образом, утверждение 1 показывает, что устойчивые отображения $f\colon M^m \to R$ типичны во множестве гладких отображений замкнутого многообразия M^m на прямую. Эти отображения обладают типичными характеристическими свойствами, указанными в утверждениях 2, 3.

Пример 3. В качестве настоящего примера мы будем рассматривать банахово пространство $C(M)$ непрерывных функций на компакте M. Определим в $C(M)$ операцию поточечного умножения:

$$x \cdot y(t) = x(t) \cdot y(t) \quad (x(t), y(t) \in C(M)).$$

Линейное подмножество E в $C(M)$ называется подалгеброй, если из $x, y \in E$ следует $x \cdot y \in E$. Через $1(t)$ обозначим функцию, тождественно равную единице на M.

Имеет место следующая теорема Стоуна—Вейерштрасса [5, 6]

Теорема 1. *Пусть E — подмножество вещественного банахова пространства $C(M)$. Пусть выполнены следующие условия:*

а) *E — подалгебра;*

б) $1(t) \in M$;

в) *E разделяет точки на M, т. е. для любых $t_1, t_2 \in M$, $t_1 \neq t_2$, найдется функция $x \in E$, для которой $x(t_1) \neq x(t_2)$. Тогда E всюду плотно в $C(M)$.*

Пусть E — подмножество комплексного банахова пространства $C(M)$. Пусть выполнены условия а)–в) утверждения теоремы 1 и дополнительно:

г) *если $x \in E$, то $\widehat{x} \in E$, где $\widehat{x}(t) = x(\widehat{t})$, а знак $\widehat{\ }$ означает комплексное сопряжение.*

Тогда E всюду плотно в $C(M)$.

Отметим, что прямыми следствиями утверждения теоремы 1 являются следующие классические результаты математического анализа.

1. Множество многочленов плотно во множестве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций.

2. Множество всех тригонометрических многочленов вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

плотно в нормированном пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций, удовлетворяющих граничному условию

$$x(-\pi) = x(\pi)$$

с нормой

$$||x|| \equiv \max_{t \in [-\pi, \pi]} |x(t)|.$$

В следующем параграфе мы изучим типичные свойства моделей-аналогов из множества линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Системы такого вида используются, например, в теории управления при исследовании различных асимптотических свойств решений квазилинейных динамических систем управления, а также линеаризаций нелинейных дифференциальных систем [7–10].

1. Типичные свойства линейных дифференциальных систем-прототипов

I. Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = A(t) \cdot x \quad (x \in R^n, t \geqslant 0), \tag{1}$$

где R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство;
$A(t)\colon\ R^+ \to \mathrm{Hom}(R_n, R_n)$ — непрерывная ограниченная при $t \in R^+ \equiv [0, +\infty)$ операторная функция;
$\|A(t)\| \equiv \sup\limits_{|x|=1} |A(t) \cdot x| \leqslant a$ при всех $t \geqslant 0$, где а – некоторая положительная постоянная.

Обозначим через LS — метрическое пространство всех систем вида (1) с расстоянием

$$\rho(A_1(t), A_2(t)) \equiv \sup_{t \geqslant 0} \|A_1(t) - A_2(t)\|.$$

Напомним (см. [7–11]), что характеристическим показателем Ляпунова решения $x(t)$ системы (1) называется число

$$\lambda = \lambda(x(t)) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Показатель $\lambda(x(t))$ оценивает экспоненциальный рост (убывание) решения $x(t)$. Отметим, что как установлено А. М. Ляпуновым, линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) не может иметь более n ненулевых решений с попарно различными характеристическими показателями Ляпунова.

Для дальнейшего изложения нам потребуются также следующие понятия общей теории линейных дифференциальных динамических систем [7–11].

Определение 1. Характеристические показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что из

$$\|M(t)\| < \sigma$$

вытекает, что $|\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon \ \ (i = 1, \ldots, n)$, где λ_i, μ_i — характеристические показатели Ляпунова соответственно линейных систем (1) и

$$\dot{q} = (A(t) + M(t))q \quad (q \in R^n, t \geqslant 0),$$

занумерованных в порядке убывания.

Определение 2. Линейное преобразование

$$x = L(t) \cdot r \quad (L(t) \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n); t \geqslant 0)$$

называется ляпуновским, если существуют операторы $L^{-1}(t), \dot{L}(t)$ и при всех $t \geqslant 0$ ограничены нормы операторов $L(t), \dot{L}(t), L^{-1}(t)$:

$$\max(\|L(t)\|, \|\dot{L}(t)\|, \|L^{-1}(t)\|) \leqslant f \quad (t \geqslant 0),$$

где $f = \text{const} > 0$.

Определение 3. Пусть задана линейная ω-периодическая система

$$\dot{\theta} = S(t) \cdot \theta \quad (S(t+\omega) \equiv S(t), t \geqslant 0, \theta \in R^n),$$

где $S(t)$ — непрерывная, ω-периодическая операторная функция. Оператором монодромии системы $\dot{\theta} = S(t) \cdot \theta$ называется линейный оператор M_s: $R^n \to R^n$, переводящий начальное условие при $t = 0$ в значение решения $\theta(t)$ с этим начальным условием при $t = \omega$. Собственные числа $m_1 \dots m_n$ линейного оператора M_s называются мультипликаторами периодической системы $\dot{\theta} = S(t) \cdot \theta$. Характеристические показатели Ляпунова ω-периодической линейной системы $\dot{\theta} = S(t) \cdot \theta$ вычисляются по следующим формулам [7–11]:

$$\lambda_i(S(t)) \equiv \frac{1}{\omega} \ln |m_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 4. Открытым ядром непустого множества P метрического пространства LS называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в P.

Определение 5. Линейная система (1) называется приводимой, если существует преобразование Ляпунова

$$x = L(t) \cdot y,$$

приводящее систему (1) к системе с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = F \cdot y \quad (F \in \text{Hom}(R^n, R^n), y \in R^n, t \geqslant 0).$$

Отметим, что характеристическими показателями Ляпунова $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ приводимой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа (1) являются вещественные части собственных значений линейного оператора $F \in \text{Hom}(R^n, R^n)$.

Определение 6. Система (1) называется системой с интегральной разделенностью, если она имеет решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ такие, что

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(\tau)|} : \frac{|x_{i+1}(t)|}{|x_{i+1}(\tau)|} \geqslant c \cdot e^{d \cdot (t-\tau)} \tag{2}$$

для некоторых констант $c > 0$, $d > 0$ и всех чисел $t \geqslant \tau \geqslant 0$; $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Обозначим через T множество всех обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральной разделенностью из пространства LS. Отметим, что с точки зрения асимптотического поведения решений системы из множества T занимают особое место, так как обладают рядом исключительных свойств, грубых по отношению к малым возмущениям системы. Так, например, в работах Б. Ф. Былова, Н. А. Изобова [12, 13], В. М. Миллионщикова [14, 15] установлено, что наличие интегральной разделенности является главной причиной устойчивости характеристических показателей Ляпунова и различных асимптотических свойств линейной системы. В той или иной форме интегральная разделенность проявляется во всех исследованиях, связанных с изучением асимптотического характера решений системы при действии возмущений. Содержательность этого понятия особенно усиливается фактом, установленным В. М. Миллионщиковым, всюду плотности линейных систем с интегральной разделенностью [16]:

$$\overline{T} = LS.$$

Таким образом, линейные системы с интегральной разделенностью являются типичными представителями линейных дифференциальных систем сравнения из метрического пространства LS.

Приведем теперь еще ряд важных характеристических свойств множества T и линейных дифференциальных систем сравнения, входящих в это множество.

Теорема 2 [14]. *Множество T совпадает открытым ядром множества линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида* (1) *с устойчивым спектром $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристических показателей Ляпунова.*

Следствие 1 теоремы 2. *Линейная дифференциальная система типа* (1) *с интегральной разделенностью обладает грубо устойчивыми характеристическими показателями Ляпунова.*

Теорема 3 [14]. *Множество T совпадает с открытым ядром множества линейных дифференциальных систем, приводящихся ляпуновскими преобразованиями* (*морфизмами*) *к диагональному виду.*

Следствие 2 теоремы 3. *Линейная дифференциальная система с интегральной разделенностью является грубо диагонализируемой.*

Теорема 4 [17]. *Множество T связно в метрическом пространстве LS.*

Теорема 5 [18–21]. I. *Условие интегральной разделенности* (2) *эквивалентно следующему условию*: *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma > 0$ такое,* *что если*

$$\rho(A(t), B(t)) < \sigma,$$

то для всякого ненулевого решения $z(t)$ *дифференциальной системы*

$$\dot{z} = B(t) \cdot z \quad (z \in R^n,\ B \in LS, t \geqslant 0)$$

найдется ненулевое решение $x(t)$ *системы* (1), *для которого*

$$(x(t), y(t)) < \varepsilon$$

при всяком $t \geqslant 0$ (x, z) *— угол между ненулевыми векторами* x, z *евклидова вещественного пространства* R^n *размерности* n).

II. *Пусть* $A \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ *— фиксированный линейный оператор. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.*

1. *Оператор* A *имеет* n *различных вещественных собственных значений*;
2. *Линейная дифференциальная система*

$$\dot{\chi} = A\chi \quad (\chi \in R^n, t \geqslant 0)$$

удовлетворяет условию интегральной разделенности (2);

3. *Система* $\dot{\chi} = A\chi$ *обладает следующим геометрическим свойством*: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что если*

$$B \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n), \quad d(A, B) \equiv \sup_{\chi \in R^n |\chi|=1} |(A - B) \cdot \chi| < \delta,$$

то для всякого ненулевого решения $\eta(t)$ *системы*

$$\dot{\eta} = B\eta \quad (\eta \in R^n, t \geqslant 0)$$

найдется ненулевое решение $\chi(t)$ *системы*

$$\dot{\chi} = A\chi$$

удовлетворяющее условию

$$\sup_{t \geqslant 0}(\chi(t), \eta(t)) < \varepsilon.$$

III. *Пусть задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\varphi} = A_p(t) \cdot \varphi \quad (\varphi \in R^n, t \geqslant 0),$$

где $A_p(t)$: $R \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ *— непрерывное* ω*-периодическое по* $t \in R$ *отображение*:

$$A_p(t + \omega) \equiv A_p(t) \quad (t \in R).$$

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1. *Система* $\dot{\varphi} = A_p(t) \cdot \varphi$ *имеет* n *различных по абсолютной величине вещественных мультипликаторов*;
2. *Периодическая система* $\dot{\varphi} = A_p(t) \cdot \varphi$ *является интегрально разделенной*;
3. *Система* $\dot{\varphi} = A_p(t) \cdot \varphi$ *удовлетворяет следующему геометрическому условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякого решения* $\psi(t) \neq 0$ *периодической системы*

$$\dot{\psi} = B_p(t)\psi,$$

$$d(A_p(t), B_p(t)) \equiv \max\nolimits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|A_p(t) - B_p(t)\| < \delta,$$

найдется решение $\varphi(t) \neq 0$ *системы* $\dot{\varphi} = A_p(t) \cdot \varphi$, *для которого*

$$\sup_{t \geqslant 0}(\varphi(t), \psi(t)) < \varepsilon.$$

IV. *Пусть задана приводимая линейная дифференциальная система*

$$\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu \quad (\mu \in R^n, t \geqslant 0),$$

где $A_r(t)\colon R \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ — *непрерывное ограниченное отображение. Для системы* $\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu$ *следующие три утверждения равносильны.*

1. *Приводимая система* $\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu$ *имеет* n *различных характеристических показателей Ляпунова*;
2. *Система* $\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu$ *интегрально разделена*;
3. *Приводимая система* $\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu$ *удовлетворяет следующему геометрическому условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для всякого ненулевого решения* $\gamma(t)$ *приводимой линейной дифференциальной системы*

$$\dot{\gamma} = R_r(t) \cdot \gamma \quad (\gamma \in R^n, t \geqslant 0),$$

где $d(A_r(t), B_r(t)) \equiv \sup\limits_{t \in R} \|A_r(t) - B_r(t)\| < \delta$, *найдется ненулевое решение* $\mu(t)$ *системы* $\dot{\mu} = A_r(t) \cdot \mu$ *такое, что*

$$\sup_{t \geqslant 0}(\mu(t), \gamma(t)) < \varepsilon.$$

Отметим, что в частном случае $n = 2$ в работах авторов [19–21] геометрические достаточные условия интегральной разделенности были существенно ослаблены, а именно было установлено следующее утверждение.

Теорема 6. *Двумерная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{u} = C(t) \cdot u \quad (u \in R^2, t \geqslant 0)$$

является системой с интегральной разделенностью тогда и только тогда, когда она имеет нормальный базис решений $u_1(t)$, $u_2(t)$, *обладающий следующим геометрическим свойством: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* $V \subset LS$ *такая, что для всякого* $D \in V$ *линейная дифференциальная система*

$$\dot{w} = D(t) \cdot w \quad (w \in R^2, t \geqslant 0)$$

имеет ненулевые решения $w_1(t)$, $w_2(t)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\sup_{t \geqslant 0}(u_i(t), w_i(t)) < \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Имеют место также следующие геометрические критерии интегральной разделенности линейных двумерных почти-периодических и квазипериодических дифференциальных систем.

Теорема 7. *Пусть задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{f} = A_q(t) \cdot f \quad (f \in R^2, t \geqslant 0), \tag{3}$$

где $A_q(t)$ — *непрерывная квазипериодическая операторная функция с конечным базисом частот* $\omega_1, ..., \omega_k$ (*см.* [22–24], *а также приложение настоящей работы, в котором собраны основные понятия и факты общей теории квазипериодических и почти-периодических функций*). *Тогда двумерная линейная система* (3) *является системой с интегральной разделенностью тогда и только тогда, когда она имеет нормальную фундаментальную систему решений* $f_1(t)$, $f_2(t)$, *обладающую следующим геометрическим свойством: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у всякой двумерной системы*

$$\dot{l} = B_q(t) \cdot l \quad (l \in R^2, t \geqslant 0),$$

где $B_q(t)$ — *непрерывная квазипериодическая операторная функция с тем же базисом частот* $\omega_1, ..., \omega_k$;

$$d(A_q(t), B_q(t)) \equiv \sup_{t \geqslant 0} \|A_q(t) - B_q(t)\| < \sigma,$$

найдутся ненулевые решения $l_1(t)$, $l_2(t)$, *для которых*

$$\sup_{t \geqslant 0}(f_i(t), l_i(t)) < \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Теорема 8. *Пусть задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{b} = A_{qp}(t) \cdot b \quad (b \in R^2, t \geqslant 0), \tag{4}$$

где $A_{qp}(t)\colon R^+ \to \mathrm{Hom}(R^2, R^2)$ — *непрерывная почти-периодическая операторная функция.*

Тогда система (4) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она имеет нормальный базис решений* $b_1(t)$, $b_2(t)$, *удовлетворяющий следующему геометрическому условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у всякой двумерной системы*

$$\dot p = B_{qp}(t)\cdot p \quad (p \in R^2, t \geqslant 0),$$

где $B_{qp}(t)$ — *непрерывная почти-периодическая операторная функция*;

$$d(A_{qp}(t), B_{qp}(t)) \equiv \sup_{t\geqslant 0} \|A_{qp}(t) - B_{qp}(t)\| < \sigma,$$

существуют ненулевые решения $p_1(t)$, $p_2(t)$ *такие, что*

$$\sup_{t\geqslant 0}(b_i(t), p_i(t)) < \varepsilon.$$

Дадим геометрические критерии интегральной разделенности двумерных стационарных, приводимых, периодических линейных дифференциальных систем.

Теорема 9. I. *Пусть дана двумерная стационарная линейная система*

$$\dot\varphi' = A\varphi' \quad (\varphi' \in R^2, t \geqslant 0)$$

Тогда следующие три условия эквивалентны.

1. *Система* $\dot\varphi' = A\varphi'$ *интегрально разделена*;
2. *Оператор* A *имеет различные вещественные собственные значения*;
3. *Стационарная система* $\dot\varphi' = A\varphi'$ *обладает следующим условием геометрической регулярности: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у всякой линейной стационарной системы*

$$\dot\psi' = B\cdot\psi' \quad (\psi' \in R^2, t \geqslant 0),$$

где $d(A, B) \equiv \sup_{\varphi'\in R^2} \|(A - B)\varphi'\| < \sigma$, *найдется ненулевое решение* $\psi'_B(t)$, *для которого*

$$\sup_{t\geqslant 0}(\psi'_B(t), \varphi'_B(t)) < \varepsilon$$

для некоторого ненулевого решения $\varphi'_B(t)$ *системы* $\dot\varphi' = A\varphi'$.

II. *Пусть задана двумерная приводимая линейная система*

$$\dot\eta' = A_r(t)\eta' \quad (\eta' \in R^2, t \geqslant 0),$$

где $A_r(t)$ — *непрерывная ограниченная операторная функция.*

Тогда следующие три условия равносильны.

1. *Система* $\dot{\eta}' = A_r(t)\eta'$ *является интегрально разделенной*;
2. *Система* $\dot{\eta}' = A_r(t)\eta'$ *имеет различные характеристические показатели Ляпунова*;
3. *Для двумерной приводимой системы* $\dot{\eta}' = A_r(t)\eta'$ *выполнено следующее условие геометрической регулярности*: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у двумерной приводимой системы*

$$\dot{\gamma}' = B_r(t) \cdot \gamma' \quad (\gamma' \in R^2, t \geqslant 0),$$

$$d(A_r(t), B_r(t)) \equiv \sup_{t \in R} \|A_r(t) - B_r(t)\| < \sigma,$$

найдется ненулевое решение $\gamma'_{B_r}(t)$, *для которого*

$$\sup_{t \geqslant 0}(\gamma'_{B_r}(t), \eta'_{B_r}(t)) < \varepsilon$$

для некоторого ненулевого решения $\eta'_{B_r}(t)$ *системы* $\dot{\eta}' = A_r(t)\eta'$.

III. *Пусть дана двумерная* ω*-периодическая система*

$$\dot{\mu}' = A_p(t)\mu' \quad (\mu' \in R^2, A_p(t + \omega) \equiv A_p(t), t \geqslant 0),$$

где $A_p(t)$ — *непрерывная операторная функция.*
Тогда следующие три условия эквивалентны.

1. *Система* $\dot{\mu}' = A_p(t)\mu'$ *интегрально разделена*;
2. *Периодическая система* $\dot{\mu}' = A_p(t)\mu'$ *имеет различные по абсолютной величине*, *одинаковые по знаку вещественные мультипликаторы*;
3. *Для этой двумерной периодической системы справедливо следующее условие геометрической регулярности*: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\sigma > 0$, *что у любой* ω*-периодической системы*

$$\dot{\chi}' = B_p(t) \cdot \chi' \quad (\chi' \in R^2, t \geqslant 0),$$

$$d(A_p(t), B_p(t)) \equiv \max\nolimits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|A_p(t) - B_p(t)\| < \sigma,$$

найдется ненулевое решение $\chi'_{B_p}(t)$, *для которого*

$$\sup_{t \geqslant 0}(\mu'_{B_p}(t), \chi'_{B_p}(t)) < \varepsilon$$

для некоторого ненулевого решения $\mu'_{B_p}(t)$ *системы* $\dot{\mu}' = A_p(t)\mu'$.

Прямым следствием теорем 5–9 является следующая теорема, дающая геометрические условия грубой асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову ряда специальных классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 10. I. *Пусть для n-мерной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\beta} = W(t)\beta \quad (\beta \in R^n, t \geqslant 0),$$

принадлежащей пространству LS, *выполнены следующие условия*:

а$_1$) *старший характеристический показатель Ляпунова* $\lambda_1(W)$ *меньше нуля*

$$\lambda_1(W) < 0;$$

б$_1$) *рассматриваемая система обладает геометрическим свойством из утверждения* I *теоремы* 5.

Тогда нестационарная система $\dot{\beta} = W(t)\beta$ *является грубо асимптотически устойчивой.*

II. *Пусть для двумерной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\beta}' = V(t)\beta' \quad (\beta' \in R^2, t \geqslant 0)$$

справедливы следующие условия:

а$_2$) *старший характеристический показатель Ляпунова* $\lambda_1(V)$ *меньше нуля*

$$\lambda_1(V) < 0;$$

б$_2$) *рассматриваемая двумерная система обладает геометрическим свойством из теоремы* 6.

Тогда двумерная нестационарная система $\dot{\beta}' = V(t)\beta'$ *является грубо асимптотически устойчивой.*

III. *Пусть для двумерной квазипериодической линейной системы с базисом частот* $\omega_1, ..., \omega_k$

$$\dot{\gamma}' = W_q(t)\gamma' \quad (\gamma' \in R^2, t \geqslant 0)$$

справедливы следующие условия:

а$_3$) *старший характеристический показатель Ляпунова* $\lambda_1(W_q)$ *меньше нуля*

$$\lambda_1(W_q) < 0;$$

б$_3$) *рассматриваемая двумерная квазипериодическая система обладает геометрическим свойством из теоремы* 7.

Тогда двумерная нестационарная система $\dot{\gamma}' = W_q(t)\gamma'$ *является грубо асимптотически устойчивой.*

IV. *Пусть для двумерной почти-периодической системы*

$$\dot{\theta}' = W_{qp}(t)\theta' \quad (\theta' \in R^2, t \geqslant 0)$$

справедливы следующие условия:

a_4) *старший ляпуновский показатель* $\lambda_1(W_{qp})$ *меньше нуля*

$$\lambda_1(W_{qp}) < 0;$$

$б_4$) *почти-периодическая двумерная система* $\dot{\theta}' = W_{qp}(t)\theta'$ *обладает геометрическим свойством из теоремы* 8.

Тогда почти-периодическая двумерная система $\dot{\theta}' = W_{qp}(t)\theta'$ *грубо асимптотически устойчива.*

V. *Пусть для стационарной n-мерной дифференциальной системы*

$$\dot{\chi} = C \cdot \chi \quad (\chi \in R^n, t \geqslant 0)$$

справедливы следующие условия:

$а_5$) *старший характеристический показатель Ляпунова* $\lambda_{\max}(C)$ *равен нулю*

$$\lambda_{\max} = 0;$$

$б_5$) *стационарная система* $\dot{\chi} = C \cdot \chi$ *обладает геометрическим свойством из утверждения* II *теоремы* 5.

Тогда система $\dot{\chi} = C \cdot \chi$ *является устойчивой по Ляпунову.*

Отметим, что теоремы 2–5 описывают структуру ряда подмножеств n-мерных ($n > 2$) линейных динамических систем-прототипов (систем сравнения) с интегральной разделенностью. Теоремы 6–8 дают геометрическое описание множеств общих двумерных нестационарных систем, систем с квазипериодическими и почти-периодическими коэффициентами, удовлетворяющих условию интегральной разделенности. Теорема 9 дает геометрическое описание множеств двумерных стационарных дифференциальных систем, операторы которых имеют различные вещественные собственные значения, двумерных периодических систем, обладающих различными по абсолютной величине, одинаковыми по знаку вещественными мультипликаторами, двумерных приводимых линейных систем, обладающих различными характеристическими показателями Ляпунова. Теорема 10 устанавливает геометрические достаточные условия грубой асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову различных множеств линейных динамических дифференциальных систем.

2. Типичные свойства линейных почти-периодических дифференциальных моделей

Напомним, что как уже упоминалось в пункте 1 настоящей работы, множество линейных систем с интегральной разделенностью T является всюду плотным в метрическом пространстве LS всех линейных динамических дифференциальных систем:

$$\overline{T} = LS$$

Введем следующие обозначения: TS — множество линейных стационарных систем с интегральной разделенностью;

TP — множество линейных периодических систем с условием интегральной разделенности решений;

TQP — множество квазипериодических систем с интегральной разделенностью;

TPP — множество почти-периодических линейных дифференциальных систем, удовлетворяющих условию интегральной разделенности.

Обозначим также через S, P, QP, PP соответственно подпространства (пространства LS) систем с постоянными, периодическими, квазипериодическими, почти-периодическими коэффициентами. Для линейных дифференциальных систем из этих подпространств справедливы следующие утверждения.

Теорема 11 [20]. *Множество TS не плотно во множестве S.*

Теорема 12 [21, 25]. *Множество TP не является плотным множеством пространства P.*

Теорема 13 [26, 27]. *Множества TPQ и TPP не плотны соответственно в подпространствах PQ и PP.*

Отметим, что теоремы 11–13 показывают, что свойство интегральной разделенности решений не является типичным для пространств S, P, PQ, PP метрического пространства LS всех линейных дифференциальных динамических систем. Поэтому представляет интерес задача отыскания типичных свойств элементов из перечисленных подпространств линейных систем с постоянными, периодическими, квазипериодическими, почти-периодическими коэффициентами. В настоящем разделе мы приведем ряд типичных свойств линейных дифференциальных моделей из множеств PQ и PP.

Напомним (см., например, [28, 29]), что линейная система дифференциальных уравнений типа (1) называется почти приводимой к системе

$$\dot{u} = D(t) \cdot u \quad (u \in R^n),$$

если для любого $\sigma > 0$ существует ляпуновское преобразование (морфизм)

$$u = M_\sigma(t)x,$$

переводящее ее в систему

$$\dot{v} = (D(t) + D_\sigma(t))v \quad (v \in R^n)$$

с выполненным неравенством

$$\|D_\sigma(t)\| \leqslant \sigma,$$

и просто почти приводимой, если при этом матрица D(t) оказывается постоянной

$$D(t) = D \quad \forall\, t, -\infty < t < +\infty.$$

Для линейных систем с почти-периодическими и квазипериодическими коэффициентами имеют место следующие утверждения.

Теорема 14 [30]. *Для устойчивости показателей Ляпунова почти-периодической системы типа* (1) *необходимо и достаточно, чтобы эта система была почти приводимой.*

Теорема 15 [31, 32]. *В пространстве QP всюду плотно множество почти приводимых систем.*

Теорема 16 [33, 34]. *В пространстве PP всюду плотно множество почти приводимых систем.*

Из теорем 14–16 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 17. *В пространстве PP всюду плотно множество систем, удовлетворяющих условию устойчивости показателей Ляпунова.*

Отметим, что теорема 14 дает критерий устойчивости спектра характеристических показателей Ляпунова почти периодической линейной динамической системы типа (1). Теоремы 15-17 дают описание типичных множеств элементов пространств QP и PP.

Заключение

Таким образом, в работе изучен ряд классов линейных динамических моделей процессов проектирования сложных технических систем. Дано алгебро-геометрическое описание типичных свойств моделей из этих классов. Получены также различные алгебраические и геометрические критерии их асимптотической устойчивости.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Баггис Г. Ф.* Грубые системы двух дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. № 4. С. 101–126.
3. *Арнольд В. И.*, *Варченко А. Н.*, *Гусейн-заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
4. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: URSS, 2004.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. *Зубов В. М.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1978.
10. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управления систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987.
11. *Розенвассер Е. Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М.: Наука, 1977.
12. *Былов Б. Ф.*, *Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1785–1793.
13. *Былов Б. Ф.*, *Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
14. *Миллионщиков В. М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
15. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 387–390.
16. *Миллионщиков В. М.* Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1167–1170.
17. *Диб К. А.* Связность некоторых множеств линейных систем с интегральной разделенностью // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 4. С. 659–664.
18. *Миллионщиков В. М.* Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Математические заметки. 1968. Т. 4. № 2. С. 173–178.
19. *Ахрем А. А.* Некоторые свойства специального класса линейных систем дифференциальных уравнений. М.: МИРЭА, 1983. Деп. в ВИНИТИ 4.02.83. № 5294–83. Деп.
20. *Ахрем А. А.* Геометрический критерий интегральной разделенности для линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 228–229.
21. *Ахрем А. А.* Об одном свойстве специального класса линейных периодических систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 914–915.
22. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, АН БССР, 1963.
23. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.
24. *Бор Г.* Почти-периодические функции. М.: Книжный дом ”ЛИБРОКОМ”/URSS, 2009.

25. *Макаров И. М., Ахрем А. А., Рахманкулов В. З.* О некоторых математических задачах общей теории проектирования сложных технических систем // Управление информационными потоками. М.: URSS, ИСА РАН, 2002. С. 236–245.
26. *Бронштейн И. У., Черний В. Ф.* Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 201–207.
27. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В.* О топологических препятствиях к блочной диагонализации некоторых экспоненциально расщепленных почти-периодических систем: Препринт № 69 ИПМ АН СССР. М.: ИПМ, 1977.
28. *Былов Б. Ф.* Почти приводимые системы // Сибирский математически журнал. 1966. Т. 7. № 7. С. 751–784.
29. *Фалько Н. С.* Двумерные почти приводимые системы с почти-периодическими коэффициентами // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. № 7. С. 199–227.
30. *Миллионщиков В. М.* О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти-периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3. № 12. С. 2127–2134.
31. *Фалько Н. С.* О почти приводимых системах с квазипериодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 3. С. 467–473.
32. *Фалько Н. С.* О почти приводимых трехмерных системах с квазипериодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 646–651.
33. *Новиков В. Л.* О почти приводимых системах с почти-периодическими коэффициентами // Математические заметки. 1974. Т. 16. № 5. С. 789–799.
34. *Миллионщиков В. М.* О типичности почти приводимых систем с почти-периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 634–636.

Приложение. Основные свойства пространства почти-периодических функций

Определение 1 П. Числовое множество $\Omega = \{\omega\}$ называется относительно плотным на оси времени $(-\infty; +\infty)$, если существует число $l > 0$ такое, что каждый отрезок $a \leqslant t \leqslant a + l$ длины l содержит хотя бы один элемент множества Ω:

$$[a, a + l] \cap \Omega \neq 0.$$

Примеры [22–24]. Множество $\Omega_1 \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ является относительно плотным множеством. Здесь можно положить $l = 1$.

Множество $\Omega_1 \equiv \{0, \pm 1^2, \pm 2^2, ...\}$ не является относительно плотным ввиду того, что

$$\sup_m |(m+1)^2 - m^2| = +\infty.$$

Определение 2 П. Число $\tau = \tau_f(\varepsilon)$ называется почти периодом функции $f(t)$ с точностью до ε, если для любого $t \in (-\infty; +\infty)$ имеет место неравенство

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Заметим, что:

а) период функции есть ее почти период для любого $\varepsilon > 0$;

б) 0 есть почти период для любого $\varepsilon > 0$;

в) если τ есть ε — почти период функции $f(t)$, то τ есть также ε — почти период этой функции;

г) сумма и разность ε — почти периодов функции $f(t)$ есть так же почти период ее с точностью до 2 ε.

Определение 3 П. Функция $f(t)$, непрерывная на оси времени $(-\infty; +\infty)$ называется почти периодической в смысле Бора, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество почти периодов τ функции $f(t)$ с точностью ε, т. е. существует такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит по меньшей мере одно число τ, удовлетворяющее соотношению

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Перечислим ряд важных свойств почти-периодических функций.

Если $f(t)$ — почти-периодическая функция, то $\alpha f(t) + \beta$ $(\alpha, \beta$ — комплексные числа) и $f(at + b)$ $(a, b$ — действительные числа) также почти периодичны.

Если комплекснозначная функция $f(t)$ — почти-периодична, то $\operatorname{Re} f(t), \operatorname{Im} f(t), |f(t)|, \overline{f}(t)$ — также почти-периодичные функции.

Если E — множество значений почти-периодической функции $f(t)$ и $F(u)$ — равномерно непрерывная на E функция, то сложная функция $F(f(t))$ — почти-периодична.

Почти-периодическая функция равномерно ограничена на временной оси $(-\infty; +\infty)$.

Почти-периодическая функция равномерно непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

Сумма конечного числа почти-периодических функций есть функция почти-периодическая.

Линейная комбинация $f(t) = \sum\limits_{K=1}^{n} C_K \cdot f_K(t)$ (где C_K — постоянные) почти-периодических функций $f_K(t)$ есть функция почти-периодическая.

Тригонометрический полином $F(t) = \sum\limits_{K=1}^{n} f_K \cdot e^{i\lambda_K \cdot t}$ $(\lambda_K$ — действительные числа) является почти-периодической функцией.

Произведение конечного числа почти-периодических функций есть функция почти-периодическая.

Частное $f(t)/g(t)$ двух почти-периодических функций $f(t), g(t)$, где $\inf\limits_{t} |g(t)| > 0$ есть функция почти-периодическая.

Если последовательность почти-периодических функций $f_1(t), f_2(t)$, ..., $f_n(t), \ldots$ равномерно сходится на всей числовой оси, то предельная функция $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ является почти-периодической.

Каждая функция $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t)$, допускающая равномерную аппроксимацию конечными тригонометрическими полиномами

$$P_n(t) = \sum_{K=1}^{N_n} C_K^{(n)} \cdot e^{i\lambda_K^{(n)}\cdot t}$$

является почти-периодической. Обратно, каждая почти-периодическая функция является равномерным пределом некоторой последовательности тригонометрических полиномов.

Для каждой почти-периодической функции $f(t)$ существует конечное среднее значение

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,dt.$$

Если почти-периодическая функция $f(t) \neq 0$, то

$$M(|f|) > 0.$$

Для почти-периодических функций $f(t), g(t)$ справедливо неравенство Коши—Буняковского:

$$|M(f\cdot g)|^2 \leqslant M(|f|^2)\cdot M(|g|^2).$$

Определение 4 П. Под скалярным произведением двух почти-периодических функций $f(t), g(t)$ понимается число

$$(f, g) \equiv M(f, \bar{g}).$$

Из этой формулы следует, что для скалярного произведения (f, g):

$$(f, f) \equiv M\{|f(t)|^2\} \geqslant 0,$$

причем $(f, f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(t) \equiv 0$;

$$(g, f) = \overline{(f, g)};$$

$$(\alpha f, g) = \alpha(f, g); \quad (f, \alpha g) = \bar{\alpha}\cdot(f, g) \quad (\alpha \text{ — комплексное число});$$

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g); \quad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$$

(где f_1, f_2, g_1, g_2 — почти периодические функции).

Определение 5 П. Под нормой функции $f(t)$ из множества PPF почти периодических функций понимается число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = [M(|f(t)|^2)]^{1/2}.$$

Для нормы $\|f\|$ выполнено:

$$\|f(t)\| \geqslant 0,$$

причем

$$\|f(t)\| = 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0;$$
$$\|\alpha f(t)\| = |\alpha| \cdot \|f\|;$$
$$\|f(t) + g(t)\| \leqslant \|f\| + \|g\| \quad (f, g \in PPF).$$

Для $f, g \in PPF$ введем расстояние $\rho(f, g)$ по формуле

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \equiv \sqrt{M(|f - g|)^2}.$$

Определение 6 П. Почти-периодические функции f, g называются ортогональными, если

$$(f, g) \equiv M(f \cdot \bar{g}) = 0.$$

Функция $f(t) \in PPF$ называется нормированной, если

$$\|f(t)\| = 1.$$

Для любого действительного числа λ положим

$$f_\lambda \equiv e^{i\lambda t}.$$

Отметим, что функция f_λ является нормированной

$$|e^{i\lambda t}| = 1,$$

причем при $\lambda \neq 0 \quad f_\lambda$ имеет период $t_\lambda = 2\pi \cdot |\lambda|^{-1}$.

Утверждение 1 П [22–24]. *Совокупность функций $\{f_\lambda\}$ образует ортогональную и нормированную систему в пространстве почти периодических функций PPF.*

Для любой почти периодической функции $f(t)$ ее спектральная функция

$$a(\lambda) \equiv M(f(t) \cdot e^{-i\lambda t})$$

отлична от нуля лишь для конечного или счетного множества значений аргумента λ.

Определение 7 П. Те значения λ, при которых $a(\lambda) \neq 0$, называются показателями Фурье почти-периодической функции $f(t)$.

Числа $a(\lambda_n) = A_n$ $(a(\lambda_n) \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами Фурье функции $f(t) \in PPF$.

Совокупность всех показателей Фурье почти-периодической функции $f(t)$ называется ее спектром.

Рядом Фурье почти-периодической функции $f(t)$ называется конечный или бесконечный тригонометрический ряд

$$\sum_n A_n \cdot e^{i\lambda_n \cdot t},$$

где $\{\lambda_n\}$ — спектр функции $f(t)$;
A_n — коэффициенты Фурье почти-периодической функции $f(t)$, $n = 1, 2, \ldots$

Утверждение 2 П [22–24]. *Для всякой почти-периодической функции $f(t)$ имеет место равенство Парсеваля*:

$$\sum_n |A_n|^2 = M(|f(t)|^2).$$

Для всякой почти-периодической функции $f(t)$ ее ряд Фурье сходится в среднем к $f(t)$ (при любом порядке слагаемых):

$$M\{|f(t) - S_N(t)|^2\} \to_{N\to\infty} 0,$$

где $S_N \equiv \sum\limits_{n=1}^{N} A_n \cdot e^{i\lambda_n \cdot t}$ — N-ая частная сумма ряда Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{i\lambda_n \cdot t}$.

Определение 8 П. Если среди частот $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ ряда Фурье почти-периодической функции $f(t)$ существует конечный базис частот $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, ..., \lambda_{n_S}$, с помощью которых все остальные частоты представляются в виде суммы

$$\lambda_S = \sum_{j=1}^{S} K_j \cdot \lambda_{n_j},$$

где K_j — целые числа, то такой частный случай почти-периодической функции называется квазипериодической функцией.