О полноте стратегий поиска вывода для множеств обобщенных хорновских дизъюнктов

А. Я. Подрабинович

В статье рассматривается обобщение понятия множества хорновских дизъюнктов (H_n-множество). Предлагается обобщение стратегии входной резолюции (G_n-резолюция). Доказывается полнота G_n-резолюции на H_n-множестве дизъюнктов. Показана неусиляемость полученного результата.

Важной задачей систем искусственного интеллекта, взаимодействующих с базами знаний, является обработка информации, хранящейся в таких базах. Среди способов обработки знаний, представление которых основано на логических исчислениях, наиболее широко распространены способы, использующие метод резолюций.

К одной из основных задач при автоматизации поиска логического вывода методом резолюций относится задача сокращения количества вновь образуемых дизъюнктов-резольвент. Каждый из этих дизъюнктов образуется в соответствии с правилом вывода из пары дизъюнктов-посылок. Такое сокращение можно получить, если в процессе вывода рассматривать не всевозможные пары дизъюнктов-посылок, а лишь пары, удовлетворяющие некоторым, заранее заданным ограничениям. Фиксируя тот или иной тип ограничений, можно получить соответствующее уточнение правила резолюции. Если уточнение обладает тем свойством, что из любого невыполнимого множества дизъюнктов можно вывести пустой дизъюнкт, используя только это уточнение, то оно называется полным.

Вообще говоря, само по себе стремление к полноте при построении уточнений правила резолюции не является самоцелью, так как иногда весьма полезным может быть такое уточнение, которое позволяет резко сократить количество генерируемых резольвент, хотя и не является полным. Тем не менее, желательно, чтобы множества дизъюнктов, из которых можно было бы вывести пустой дизъюнкт с помощью такого уточнения, были, в некотором смысле, емкими, представляющими достаточно интересные классы содержательных задач.

В связи с этим важной задачей является задача описания таких подклассов произвольного множества дизъюнктов, в рамках которых мощные, в смысле сокращения количества генерируемых резольвент, уточнения правила резолюции были бы полны.

Широкую известность получили такие уточнения метода резолюций, как входная резолюция и единичная резолюция.

Входная резолюция — это уточнение правила резолюции, при использовании которого хотя бы один из дизъюнктов-посылок является исходным дизъюнктом. Очевидно, что применение входной резолюции позволяет значительно сократить количество пар дизъюнктов-посылок, используемых при образовании резольвент в процессе логического вывода.

Единичная резолюция — это такое уточнение правила резолюции, при использовании которого хотя бы один из дизъюнктов-посылок является единичным дизъюнктом. Особенность единичной резолюции заключается в том, что помимо сокращения количества генерируемых резольвент, она генерирует резольвенты, длина которых, то есть количество литер в резольвенте, меньше, чем длина максимального из дизъюнктов-посылок. Тем самым, есть надежда на то, что единичная резолюция способствует более быстрому получению пустого дизъюнкта.

Чень [1] доказал эквивалентность входной и единичной резолюций. Эквивалентность состоит в том, что для произвольного множества дизъюнктов тогда и только тогда существует вывод пустого дизъюнкта с помощью входной резолюции, когда существует вывод пустого дизъюнкта с помощью единичной резолюции.

К сожалению, для произвольных множеств дизъюнктов входная и единичная резолюция не являются полными. Однако существует класс дизъюнктов, в рамках которого эти правила вывода будут полны. Это класс хорновских дизъюнктов.

Дизъюнкт называется хорновским, если он содержит не более одной положительной литеры.

Полнота правил входной и единичной резолюций в классе хорновских дизъюнктов была доказана в работах Хеншена, Кюнера и Уоса [2, 3].

В работе Петерсона [4] была предпринята попытка обобщить эти правила вывода с помощью понятий N-литерной резолюции и N-лемма резолюции.

N-литерная резолюция — это уточнение правила резолюции, при применении которого по крайней мере один из дизъюнктов-посылок содержит не более N литер. При $N = 1$ получается единичная резолюция.

N-лемма резолюция — такое уточнение правила резолюции, при применении которого, по крайней мере, один из дизъюнктов-посылок является либо исходным дизъюнктом либо леммой, то есть ранее сгенерированной резольвентой, причем в выводе допускается использование не более, чем N лемм. Очевидно, что при $N = 0$ N-лемма резолюция совпадает с входной резолюцией.

Учитывая эквивалентность единичной и входной резолюций, можно утверждать, что 1-литерная резолюция эквивалентна 0-лемма резолюции. Петерсон надеялся доказать эквивалентность N-литерной резолюции и $(N - 1)$-лемма резолюции для любого N. Он выяснил, что если из некоторого множества дизъюнктов можно вывести пустой дизъюнкт с помощью $(N - 1)$-лемма резолюции, то можно вывести пустой дизъюнкт и с помощью N-литерной резолюции. Однако обратная теорема неверна.

Возможен также другой подход. Можно искать полные аналоги и обобщения входной и единичной резолюций не на произвольных множествах дизъюнктов, а на некоторых подклассах таких множеств, по возможности более широких.

В частности, Петерсон рассматривал класс дизъюнктов, каждый из которых содержит не более 2-х положительных литер. Он пытался доказать, что на этом расширении класса хорновских дизъюнктов полна 2-литерная резолюция. Однако оказалось, что это утверждение неверно, хотя соответствующее доказательство не приводилось. Доказательство этого факта предложено в конце настоящей статьи.

Возникает вопрос, нельзя ли обобщить стратегию входной резолюции таким образом, чтобы она оставалась полной на более широких множествах дизъюнктов, чем множество хорновских дизъюнктов.

Введем следующие определения.

Определение. Назовем конечное множество дизъюнктов H_n-множеством, если каждый дизъюнкт этого множества содержит не более n положительных литер.

Определение. Пусть $R = \{D\}$ — множество дизъюнктов, каждый из которых либо принадлежит некоторому множеству S исходных дизъюнктов, либо получен из исходных дизъюнктов в процессе применения метода резолюций. Определим на этом множестве дизъюнктов целочисленную функцию $g(D)$ следующим образом:

(1) если D принадлежит S, то $g(D) = 0$;

(2) если D является резольвентой дизъюнктов $D1$ и $D2$, то $g(D) = \min(g(D1), g(D2)) + 1$.

Эту функцию будем называть глубиной дизъюнкта.

Определение. Назовем G_n-резолюцией, где $n \geqslant 1$, такое уточнение правила резолюции, при применении которого по крайней мере у одного из дизъюнктов-посылок глубина меньше, чем n. Вывод дизъюнкта D из множества S дизъюнктов называется G_n-выводом, если любой дизъюнкт в этом выводе либо принадлежит S, либо получен в результате применения G_n-резолюции. G_n-опровержением множества S дизъюнктов называется G_n-вывод из S пустого дизъюнкта.

Из последнего определения следует, что если существует G_n-вывод из множества дизъюнктов, то для любого дизъюнкта D в этом выводе $g(D) \leqslant n$.

Можно проследить следующую аналогию с введенными определениями. Хорновское множество дизъюнктов можно рассматривать как H_1-множество, так как каждый дизъюнкт этого множества содержит не более одной положительной литеры. С другой стороны, поскольку при применении входной резолюции хотя бы один из дизъюнктов-посылок имеет глубину 0, то входную резолюцию можно назвать G_1-резолюцией. Но входная резолюция полна на множестве хорновских дизъюнктов, то есть можно утверждать, что G_1-резолюция полна на H_1-множестве дизъюнктов.

Естественно, возникает вопрос о том, будет ли полна G_n-резолюция на H_n-множестве дизъюнктов. Оказывается, ответ на этот вопрос положительный. Можно доказать справедливость соответствующего утверждения.

Заметим, что сформулированное выше определение G_n-вывода делает его полным, по сути дела, на произвольном множестве дизъюнктов. Действительно, для любого произвольного множества дизъюнктов можно указать такое n, что это множество является H_n-множеством. А для H_n-множества G_n-вывод будет полным, в соответствии с приводимым ниже доказательством.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть S — конечное невыполнимое H_n-множество основных дизъюнктов. Тогда существует G_n-вывод пустого дизъюнкта из множества S.*

Доказательство. Пусть $A(S)$ — множество атомов, входящих в S, а k — количество элементов в этом множестве. Будем доказывать лемму индукцией по k.

Пусть $k = 1$, т. е. $A(S)$ состоит из одного элемента L. Так как S невыполнимо, то оно содержит дизъюнкты L и $\sim L$. При этом $g(L) = g(\sim L) = 0$, а пустой дизъюнкт выводится из L и $\sim L$ применением G_n-резолюции.

Таким образом, если $A(S)$ состоит из одного элемента, то лемма верна. Допустим теперь, что лемма верна для $k \leqslant m$, где $m \geqslant 1$, и докажем ее справедливость для $k = m + 1$. Рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть в множестве S имеется единичный дизъюнкт L. Удалим из S все дизъюнкты, содержащие L, и вычеркнем литеру $\sim L$ из остальных дизъюнктов. Полученное множество S' будет также невыполнимо и будет являться H_n-множеством, а количество атомов в $A(S')$ меньше или равно m. В силу индукционного предположения существует G_n-вывод V' пустого дизъюнкта из S'.

Вставим теперь литеру $\sim L$ во все дизъюнкты, из которых она была вычеркнута. В результате получим вывод либо пустого дизъюнкта либо дизъюнкта $\sim L$. Очевидно, что этот измененный вывод будет также G_n-выводом. Если был выведен пустой дизъюнкт, то полученный вывод и будет искомым G_n-выводом из множества S. Если же был выведен дизъюнкт $\sim L$, то из дизъюнктов L и $\sim L$ мы получим пустой дизъюнкт с помощью G_n-резолюции, так как $g(L) = 0$.

2-й случай. Пусть множество S не содержит единичных дизъюнктов. Используем тот факт, что правило положительной гиперрезолюции, то есть обобщение правила резолюции, в котором при формировании резольвенты дизъюнкты-электроны не содержат отрицательных литер, является полным. Поскольку при применении этого правила хотя бы один из дизъюнктов-посылок является положительным, то, в частности, в исходном множестве S должен существовать по крайней мере один положительный дизъюнкт D. Но так как S является H_n-множеством, то ни один дизъюнкт из S не содержит более n положительных литер.

С другой стороны, по предположению, S не содержит единичных дизъюнктов. Следовательно, D состоит из i положительных литер, где $1 < i \leqslant n$, то есть может быть представлен в виде $D = L1 \vee L2 \vee \vee \ldots \vee Li$. Удалим из множества S дизъюнкты, содержащие литеру $L1$, а затем вычеркнем литеру $\sim L1$ из дизъюнктов, которые ее содержат. Оставшееся множество $S1'$ невыполнимо и является H_n-множеством. Но так как количество атомов в множестве $A(S1')$ меньше или равно m, то, в силу индукционного предположения, существует G_n-вывод $V1'$ пустого дизъюнкта из $S1'$. Возвращая литеру $\sim L1$ в те дизъюнкты, из которых она была вычеркнута, мы получим G_n-вывод из множества S либо пустого дизъюнкта, либо дизъюнкта $\sim L1$. Если выведен пустой дизъюнкт, то все доказано. Если же выведен дизъюнкт $\sim L1$, то в этом случае удалим из множества S дизъюнкты, содержащие литеру $L2$, а затем вычеркнем литеру $\sim L2$ из дизъюнктов, которые ее содержат. Останется невыполнимое множество $S2'$, которое будет H_n-множеством.

Проводя дальнейшие рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили относительно литеры $L1$, мы получим, что из множества S можно получить G_n-вывод либо пустого дизъюнкта (и тогда доказательство леммы будет завершено) либо дизъюнкта $\sim L2$.

Проведем подобные рассуждения последовательно для всех литер Li дизъюнкта D, где $1 < i \leqslant n$. Если в процессе вывода для некоторого i будет получен пустой дизъюнкт, то доказательство леммы будет завершено, так как всякий раз применялся G_n-вывод. В противном случае, из множества S с помощью G_n-вывода будут получены дизъюнкты $\sim L1, \sim L2, \sim L3, \ldots, \sim Li$, где $1 < i \leqslant n$. При этом очевидно, что $g(\sim Li) < n$. Так как D — исходный дизъюнкт, то $g(D) = 0$. Поэтому с помощью G_n-резолюции из дизъюнктов $D = L1 \vee L2 \vee L3 \vee \ldots \vee Li$ и $\sim L1$ можно вывести дизъюнкт $D1 = L2 \vee L3 \vee \ldots \vee Li$, причем $g(D1) < 2$, а затем из дизъюнктов $D1$ и $\sim L2$ с помощью G_n-резолюции можно вывести $D2 = L3 \vee L4 \vee \ldots \vee Li$, где $g(D2) < 3$, и т. д. В конце концов, будет выведен дизъюнкт Li с помощью G_n-резолюции, поскольку $g(Li) < i \leqslant n$. Тогда из дизъюнктов Li и $\sim Li$ можно вывести пустой дизъюнкт. При этом, поскольку $i < n$, а $\sim Li$ выведен с помощью G_n-вывода, то, в соответствии с определением G_n-вывода, пустой дизъюнкт также получен с помощью G_n-вывода. Что и требовалось доказать. □

Теперь можно доказать теорему о полноте G_n-резолюции.

Теорема. *Пусть S — конечное невыполнимое H_n-множество дизъюнктов. Тогда существует G_n-вывод пустого дизъюнкта из этого множества S.*

Доказательство. Так как S невыполнимо, то, по теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество S' основных дизъюнктов, которые являются частными случаями дизъюнктов из S.

Согласно ранее доказанной лемме существует G_n-вывод V' пустого дизъюнкта из S'. Используя дерево вывода V', построим G_n-вывод V пустого дизъюнкта из S. Для этого каждой вершине дерева вывода V', которой соответствует дизъюнкт C' из S', поставим в выводе V в соответствие дизъюнкт C из S, частным случаем которого C' является. Заметим, что $g(C) = g(C') = 0$, так как C и C' — исходные дизъюнкты.

Пусть T — вершина дерева вывода V', непосредственным предшественникам которой соответствуют дизъюнкты $C1'$ и $C2'$, и пусть этим дизъюнктам уже поставлены в соответствие дизъюнкты $C1$ и $C2$ в выводе V, причем $g(C1) = g(C1')$ и $g(C2) = g(C2')$. Самой вершине T в выводе V' соответствует резольвента C' дизъюнктов $C1'$ и $C2'$. Тогда в выводе V дизъюнкту C' поставим в соответствие резольвенту C дизъюнктов $C1$ и $C2$, такую, что C' является частным случаем C. Такая резольвента существует согласно известной «лемме подъема» [5], которая утверждает, что, если $C1'$ и $C2'$ — примеры $C1$ и $C2$ соответственно и если C' — резольвента $C1'$ и $C2'$, то существует такая резольвента C из $C1$ и $C2$, что C' есть пример С.

При этом

$$g(C) = \min\bigl(g(C1), g(C2)\bigr) + 1 = \min\bigl(g(C1'), g(C2')\bigr) + 1 = g(C').$$

Отсюда следует, что, так как C' была получена из $C1'$ и $C2'$ с помощью G_n-резолюции, то и C получена из $C1$ и $C2$ с помощью G_n-резолюции.

Вершине, которой в выводе V' соответствует пустой дизъюнкт, в выводе V будет соответствовать также пустой дизъюнкт, так как пустой дизъюнкт может быть частным случаем только пустого дизъюнкта.

Теорема доказана. □

Можно показать, что теорема о полноте G_n-резолюции неусиляема в том смысле, что она неверна, если в качестве множества дизъюнктов рассматривать множество, не являющееся H_n-множеством.

Построим соответствующий пример для случая, когда $n = 2$.

Рассмотрим следующее невыполнимое множество S дизъюнктов:

(1)	0	$p \vee q \vee r$
(2)	0	$p \vee q \vee \sim r$
(3)	0	$p \vee \sim q \vee r$
(4)	0	$p \vee \sim q \vee \sim r$
(5)	0	$\sim p \vee q \vee r$
(6)	0	$\sim p \vee q \vee \sim r$
(7)	0	$\sim p \vee \sim q \vee r$
(8)	0	$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$

Здесь в первом столбце в скобках указан порядковый номер дизъюнкта, а во втором столбце — глубина дизъюнкта. Это множество не является H_2-множеством, так как дизъюнкт (1) состоит из трех положительных литер.

Будем осуществлять вывод резольвент из множества S методом насыщения уровней. Построим резольвенты 1-го уровня, указывая справа от дизъюнкта, из каких дизъюнктов он выведен применением правила резолюции.

(9)	1	$p \vee q$	(1),(2)
(10)	1	$p \vee r$	(1),(3)
(11)	1	$q \vee r$	(1),(5)
(12)	1	$p \vee \sim r$	(2),(4)
(13)	1	$q \vee \sim r$	(2),(6)
(14)	1	$p \vee \sim q$	(3),(4)
(15)	1	$\sim q \vee r$	(3),(7)
(16)	1	$\sim q \vee \sim r$	(4),(8)
(17)	1	$\sim p \vee q$	(5),(6)
(18)	1	$\sim p \vee r$	(5),(7)
(19)	1	$\sim p \vee \sim r$	(6),(8)
(20)	1	$\sim p \vee \sim q$	(7),(8)

Построим резольвенты 2-го уровня.

(21)	2	p(9),	(14)
(22)	2	q(9),	(17)
(23)	2	r(10),	(18)
(24)	2	$x \sim r$	(12),(19)
(25)	2	$\sim q$	(14),(20)
(26)	2	$\sim p$	(17),(20)

Далее строим резольвенты 3-го уровня.

(27) 3 (21),(26)

Отметим, что совпадение глубины дизъюнкта с номером уровня является чисто случайным, обусловленным спецификой исходного множества дизъюнктов. Фактически же при построении резольвент, скажем, 2-го уровня, возникают и дизъюнкты глубины 1, однако они либо совпадают с ранее построенными дизъюнктами, либо являются тавтологиями, и поэтому после насыщения уровня удаляются в соответствии со стратегией удаления тавтологий и поглощаемых дизъюнктов.

Мы видим, что дизъюнктами-посылками при получении пустого дизъюнкта являются дизъюнкты глубины 2, то есть он выведен не с помощью G_2-резолюции. Но так как дизъюнктами-посылками при выводе пустого дизъюнкта должны быть единичные дизъюнкты, а все построенные единичные дизъюнкты в нашем примере имеют глубину 2, то, следовательно, пустой дизъюнкт и нельзя получить с помощью G_2-резолюции.

Докажем теперь, что на H_2-множестве 2-литерная резолюция, то есть такое уточнение правила резолюции, при использовании которого хотя бы один из дизъюнктов-посылок содержит не более двух литер, неполна. Построим с этой целью противоречащий пример.

Рассмотрим следующее множество дизъюнктов:

(1)	$b \vee d$
(2)	$a \vee c \vee \sim b$
(3)	$a \vee \sim c \vee \sim b$
(4)	$\sim a \vee c \vee \sim b$
(5)	$\sim a \vee \sim c \vee \sim b$
(6)	$a \vee c \vee \sim d$
(7)	$a \vee \sim c \vee \sim d$
(8)	$\sim a \vee c \vee \sim d$
(9)	$\sim a \vee \sim c \vee \sim d$

Докажем невыполнимость этого множества дизъюнктов.

Будем строить резольвенты, указывая справа от дизъюнкта, из каких дизъюнктов он выведен с помощью применения правила резолюции:

(10)	$a \vee \sim b$	(2),(3)
(11)	$\sim a \vee \sim b$	(4),(5)
(12)	$\sim b$	(10),(11)
(13)	d	(1),(12)
(14)	$a \vee c$	(6),(13)
(15)	$a \vee \sim c$	(7),(13)
(16)	$\sim a \vee c$	(8),(13)
(17)	$\sim a \vee \sim c$	(9),(13)
(18)	a	(14),(15)
(19)	$\sim a$	(16),(17)
(20)		(18),(19)

Получен пустой дизъюнкт, следовательно, множество дизъюнктов невыполнимо. В то же время нельзя вывести пустой дизъюнкт с помощью 2-литерной резолюции, потому что единственным 2-литерным дизъюнктом в исходном множестве является дизъюнкт bVd, но если его использовать в качестве дизъюнкта-посылки при резольвировании с любым другим дизъюнктом, то будут получаться только 3-литерные дизъюнкты.

Литература

1. *Chang C. L.* The unit proof and the input proof in theorem proving // J. ACM, 17, 4 (Oct. 1970). P. 698–707.
2. *Henschen L. and Wos L.* Unit refutations and Horn sets // J. ACM, 21, 4 (Oct. 1974). P. 590–605.
3. *Kuehner D.* Some special purpose resolution systems. In Machine Intelligence. V. 7, B. Meltzer and D. Michie, Eds., American Elsevier, New York, 1972. P. 117–128.
4. *Peterson G. E.* Theorem Proving with Lemmas // J. ACM, 23, 4 (Oct. 1976). P. 573–581.
5. *Чень Ч.*, *Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983.