technology developed by US companies to take care of those coming back from Afghanistan and and Iraque with lost limbes or with severe disabilities. The goal is to give a full life by using not only the best technology, but by creating it, and to train the unfortunates to be able to live their new lives to the fullest degree.

This is important because it reflect the filosophy inherent in human mind, to create society and to shape the future and push the frontier forward.

The awful worry is that comflicts and wars seem to be the very best innovative forces, leaving us with an even worse question: Do we need wars to renew our technology, or do the systems work for wars?

Technology is not free of charge, it requires change and resources, resources in the fullest extent of the word.

And it requires people with training, not a handful, but a critical mass, enough to implement ideas and products and put them to the market.

New technology is today making change in the most remote places, and linking people together in a way never foreseen. When great accidents or catastrophs happened 150 years ago, people did not know and could not do anything. Today we can, we know immediately, and relief systems can be operational within hours. Such logistical operations require massive use of IT and reliable and valid datas.

New ways to make statistical data operational and fit for scientific work will come and change science also. Above all, to make it possible not only to descibe the past, some of the present, but also to describe future ways and future scenarios. Today some of the litterature within social sciences do not come up with the best solutions, the best options. Science is too often too slow to push forward new solutions, new practises, not only because of lack of relevant and sufficient data, but because the courage and relevant understanding is lacking.

In short: Even if we lack data, we know what is reality, what is good and not good, what is just, and not just, what is a good distribution of wealth and opportunities and what is not. Science does not exist for itself and for the people lucky enough to make a living of it, it has a defined role in any society.

Новый подход к устойчивости дискретных систем

А. И. Баркин

Институт системного анализа РАН, Москва

1. Введение

Теория дискретных систем находит применение в таких областях техники, как системы с ЭВМ в контуре управления и импульсные системы с различными типами модуляции. Исторически эта теория развивалась как отражение теории непрерывных систем, поскольку наблюдалась параллельность в развитии понятий и подходов в решении традиционных задач автоматического управления. При достаточно малом периоде временного квантования свойства дискретных и непрерывных систем одинаковы, что и утверждает известная теорема Котельникова. Однако никакая аналогия не бывает полной.

Действительно, в дискретных системах наблюдаются виды движения, которые не существуют в непрерывных системах: процессы конечной длительности, скрытые колебания, почти периодические колебания. Частотная характеристика линейной дискретной системы периодична, что связано со стробоскопическим эффектом.

В области теории абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем широко известный критерий Попова—Цыпкина полностью аналогичен круговому критерию. Однако усиление этого критерия на базе квадратичного преобразования [1, 2] приводит уже к результату, не повторяющему в новых терминах круговой критерий.

В настоящей работе рассматривается модернизация критерия абсолютной устойчивости дискретных систем [1, 2], использующего метод квадратичного преобразования вектора состояния. Цель модернизации состоит в получении формы критерия, которая не зависит явно от понятий этого метода. Новая формулировка позволяет проводить все вычисления в пространстве исходной размерности, что уменьшает трудоемкость решения задачи. Данная работа представляет собой развитие подхода, предложенного в [3] для непрерывных систем.

2. Постановка задачи

Рассматриваются системы с дискретным временем вида

$$x(t+1) = Ax(t) + b\xi(t), \quad t = 0, 1, 2\ldots \tag{1}$$

$$\xi(t) = \varphi(\sigma, t), \tag{2}$$

$$\sigma(t) = c'x(t), \tag{3}$$

где $x \in R^n$, $\xi \in R^1$, $A - n \times n$ — матрица, собственные значения которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по модулю меньше единицы. Нелинейная функция $\varphi(\sigma, t)$ удовлетворяет условию принадлежности к сектору $[0, k]$:

$$0 \leqslant \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \leqslant k. \tag{4}$$

Хорошо известен [4] достаточный критерий абсолютной устойчивости системы (1–4):

$$ReW(e^{i\omega}) + k^{-1} > 0, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{5}$$

где

$$W(z) = c'(A - zI)^{-1}b \tag{6}$$

— передаточная функция линейной части системы, штрихом обозначена операция транспонирования матрицы. Отметим, что передаточная функция является отношением полиномов от переменной z: $W(z) = N(z)/D(z)$.

Критерий (5) прост и эффективно проверяем, но недостаточно точен. Повышение точности определения области устойчивости в пространстве параметров может быть получено с помощью метода квадратичного преобразования [1, 2]. В этом методе вектор состояния $x \in R^n$ преобразуется в вектор y размерности $m = n(n+1)/2$, элементами которого являются линейно независимые лексикографически упорядоченные произведения $\alpha_{jk}x_jx_k$, где $\alpha_{jk} = \sqrt{2}$, если $j \neq k$, и $\alpha_{jk} = 1$, если $j = k$. Соотношения алгебры степенных преобразований даны в [2, 3]. Применение квадратичного преобразования к уравнению (1) приводит к следующему:

$$y(t+1) = A^{[2]}y(t) + b^{[2]}(\xi(t))^2 + b_{[2]}A\eta(t), \tag{7}$$

где $\eta(t) = \xi(t)x(t)$ и матрицы $A^{[2]}$, $b^{[2]}$ и $b_{[2]}$ имеют размерности соответственно $m \times m$, $m \times 1$ и $m \times n$. Собственные значения матрицы $A^{[2]}$

лежат внутри единичного круга, поскольку они являются произведениями $\lambda_j\lambda_k$ собственных значений матрицы A. Как показано в [5], абсолютная устойчивость системы (1)–(4) эквивалентна абсолютной устойчивости системы (1)–(3) с переменным коэффициентом:

$$\xi = u(t)\sigma(t), \tag{8}$$

причем коэффициент $u(t)$ — это кусочно-постоянная функция, принимающая только два значения $u(t) = 0$ и $u(t) = k$. Поэтому $u^2(t) = ku$, $\xi^2 = kc'\eta$, и модель (7) принимает вид:

$$y(t+1) = A^{[2]}y(t) + b_{[2]}A_1\eta, \quad A_1 = A + kbc'/2. \tag{9}$$

Неравенство (4) также может быть записано в новых координатах:

$$\eta'Q(s - k^{-1}\eta) \geqslant 0, \tag{10}$$

где $s = 0{,}5c'_{[2]}y$, Q — произвольная положительно определенная матрица общего вида (Q может быть несимметричной). Основной результат [1, 2] представляет

Теорема 1. *Система* (1)–(4) *абсолютно устойчива, если существует такая $n \times n$ матрица $Q > 0$, для которой выполнено условие*

$$\operatorname{Re} Q(\Phi(e^{i\omega}) + k^{-1}I) > 0 \quad \forall\, \omega \in [0, \pi], \tag{11}$$

где

$$\Phi(z) = 0{,}5c'_{[2]}(A^{[2]} - zI)^{-1}b_{[2]}A_1 \tag{12}$$

— передаточная матрица преобразованной системы.

Как показано в [1, 2, 6], критерий (11) является более сильным, чем критерий (5). Однако вычисление передаточной матрицы (12) для произвольной размерности является громоздкой задачей. Как видно из (12), для вычисления $n \times n$ матрицы $\Phi(z)$ требуется вычислить и обратить матрицу $A^{[2]} - zI$ гораздо более высокой размерности $m = n(n+1)/2$, причем в процессе оптимизации параметрической области устойчивости эти операции приходиться выполнять многократно. В настоящей работе предлагается описание матрицы $\Phi(z)$, не использующее понятий квадратичного преобразования и позволяющее производить все вычисления в R^n.

3. Основной результат

Отметим сначала, что решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{(t-1-\tau)}b\xi(\tau). \tag{13}$$

Используя z-преобразование, из (1) получаем

$$\widetilde{\sigma}(z) = zc'(Iz - A)^{-1}x(0) - c'(A - zI)^{-1}b\widetilde{\xi}(z), \tag{14}$$

где волной сверху обозначены z-преобразования от соответствующих координат. Отсюда следует выражение для импульсной характеристики $w(t)$, являющейся оригиналом для изображения $W(z)$:

$$w(0) = 0, \quad w(t) = -c'A^{t-1}b, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{15}$$

Рассмотрим теперь импульсную характеристику $\vartheta(t)$, являющуюся обратным z-преобразованием от матрицы $\Phi(z)$. По аналогии с (15) получаем:

$$\vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(t) = -0{,}5c'_{[2]}(A^{t-1})^{[2]}b_{[2]}A_1, \quad t = 1, 2, \dots . \tag{16}$$

В соответствии с алгеброй степенных преобразований [2, 3], для любых векторов b, c и любой $n \times n$ матрицы Gвыполнены тождества:

$$G^{[2]}b_{[2]} = (Gb)_{[2]}G, \quad \frac{1}{2}c'_{[2]}(Gb)_{[2]} = Gbc' - c'GbI. \tag{17}$$

Используя (17), в (16) получаем

$$\vartheta(t) = (\phi_1(t) + \phi_2(t))A_1, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} &\phi_1(t) = -w(t)A^{t-1}, \quad \phi_2(t) = -A^{t-1}bc'A^{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \\ &\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Найдем z-преобразование $\Phi_1(z)$ от $\phi_1(t)$. По определению

$$\Phi_1(z) = \sum_{t=1}^{\infty} z^{-t}w(t)A^{t-1}. \tag{20}$$

Дальнейшие выкладки ограничим случаем некратных собственных значений λ_i матрицы A.

Можно показать, что окончательные формулы сохраняют свой вид и в случае кратных собственных значений. Представим матрицу Aв виде суммы

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, \tag{21}$$

где P_i — проекторы, обладающие свойствами:

$$P_iP_j = 0, \quad P_iP_i = P_i, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = I.$$

Из представления (21) имеем

$$A^{t-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t-1}P_i, \tag{22}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{t=1}^{\infty} z^{-t}w(t)\lambda_i^{t-1}. \tag{23}$$

Обозначим

$$S(z, \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} z^{-t}w(t)\lambda^{t-1}. \tag{24}$$

Очевидно, что

$$S(z, \lambda) = \lambda^{-1}W(z\lambda^{-1}), \quad \lambda \neq 0; \quad S(z, 0) = 0. \tag{25}$$

Итак:

$$\Phi_1(z) = \sum_{i=1}^{n} P_i\lambda_i^{-1}W(z\lambda_i^{-1}). \tag{26}$$

Последнее выражение представляет собой матричную функцию

$$\Phi_1(z) = A^{-1}W(zA^{-1}) = A^{-1}N(zA^{-1})(D(zA^{-1}))^{-1}. \tag{27}$$

Отметим, что обращать матрицу A для вычисления (27) не нужно. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} N(z) &= b_0z^k + b_1z^{k-1} + \dots + b_k, \\ D(z) &= a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n, \end{aligned} \tag{28}$$

где $k < n$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = (&b_0z^kA^{n-k-1} + b_1z^{k-1}A^{n-k} + \dots + b_kA^{n-1}) \times \\ &\times (a_0z^nI + a_1z^{n-1}A + \dots + a_nA^n)^{-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Формула (29) позволяет производить вычисления и для вырожденных матриц A.

Получим теперь z-преобразование $\Phi_2(z)$ от$\phi_2(t)$. Для произвольного вектора $g \in R^n$ получаем

$$g'\phi_2(t) = -g'A^{t-1}bc'A^{t-1} = c'A^{t-1}w_g(t), \tag{30}$$

где скалярная функция $w_g(t) = -g'A^{t-1}b$ имеет z-преобразование $W_g(z)$. Подвергая (30) z-преобразованию, получим

$$g'\Phi_2(z) = c'\sum z^{-t}w_g(t)A^{t-1}, \tag{31}$$

что аналогично выражению (20). Повторяя вышеприведенные рассуждения, получим

$$g'\Phi_2(z) = c'A^{-1}W_g(zA^{-1}). \tag{32}$$

Удобно взять в качестве g единичный вектор e_k с единицей на k-ой позиции. Тогда формула (32) даст k-ую строку матрицы $\Phi_2(z)$. Итак:

$$\Phi_2(z) = \begin{bmatrix} c'A^{-1}W_{e_1}(zA^{-1}) \\ c'A^{-1}W_{e_2}(zA^{-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c'A^{-1}W_{e_n}(zA^{-1}) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Окончательно получаем выражение для передаточной матрицы

$$\Phi(z) = (\Phi_1(z) + \Phi_2(z))\left(A + \frac{kbc'}{2}\right), \tag{34}$$

где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ определяются формулами (29) и (33) соответственно.

Таким образом, критерий устойчивости может быть сформулирован в виде, который не использует явно терминов и понятий метода степенных преобразований.

Теорема 1. *Система* (1)–(4) *абсолютно устойчива, если существует такая* $n \times n$ *матрица* $Q > 0$, *для которой выполнено условие* (11), *где передаточная матрица* $\Phi(z)$ *определяется формулой* (34).

Пример. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1\xi(t), \\ x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2\xi(t), \\ \sigma(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t), \quad t = 0, 1, 2\dots . \end{aligned} \tag{35}$$

В данном случае

$$W(z) = \frac{q_1z + q_0}{z^2 + s_1z + s_0}, \tag{36}$$

где

$$s_1 = -(a_{11} + a_{22}), \qquad s_0 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$q_1 = -(c_1b_1 + c_2b_2), \quad q_0 = c_1(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) + c_2(a_{11}b_2 - a_{21}b_1).$$

Соответственно получаем

$$S(z, \lambda) = \lambda^{-1}W(z\lambda^{-1}) = \frac{q_1z + q_0\lambda}{z^2 + s_1z\lambda + s_0\lambda^2}. \tag{37}$$

В соответствии с (29) имеем

$$\Phi_1(z) = (q_1zI + q_0A)(z^2I + s_1zA + s_0A^2)^{-1} \tag{38}$$

Используя теорему Гамильтона—Кели, получаем $A^2 = -s_1A - s_0I$,

$$\Phi_1(z) = (z - s_0)^{-1}(q_1zI + q_0A)((z + s_0)I + s_1A)^{-1}. \tag{39}$$

Проведя несложные подстановки и преобразования, получим

$$\Phi_1(z) = D^{-1}(z)\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} D(z) &= (z - s_0)(z^2 + (2s_0 - s_1^2)z + s_0^2), \\ \varphi_{11} &= (q_1z + q_0a_{11})(z + s_0 + s_1a_{22}) - q_0s_1a_{12}a_{21}, \\ \varphi_{12} &= (q_1z + q_0a_{11})(-s_1a_{12}) + q_0a_{12}(z + s_0 + s_1a_{11}), \\ \varphi_{21} &= q_0a_{21}(z + s_0 + s_1a_{22}) - s_1a_{21}(q_1z + q_0a_{22}), \\ \varphi_{22} &= -q_0s_1a_{12}a_{21} + (q_1z + q_0a_{22})(z + s_0 + s_1a_{11}). \end{aligned}$$

Отметим, что если λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A, то корнями многочлена $D(z)$ являются числа $\lambda_1\lambda_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2$.

Для вычисления $\Phi_2(z)$ отметим, что

$$W_{e_1}(z) = \frac{q_1'z + q_0'}{z^2 + s_1z + s_0}, \quad W_{e_2}(z) = \frac{q_1''z + q_0''}{z^2 + s_1z + s_0},$$

где

$$q_1' = -b_1, \quad q_0' = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$
$$q_1'' = -b_2, \quad q_0'' = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

После несложных выкладок получаем

$$\Phi_2(z) = D^{-1}(z)\begin{bmatrix} c_1\varphi_{11}' + c_2\varphi_{21}' & c_1\varphi_{12}' + c_2\varphi_{22}' \\ c_1\varphi_{11}'' + c_2\varphi_{21}'' & c_1\varphi_{12}'' + c_2\varphi_{22}'' \end{bmatrix}, \tag{41}$$

где $\varphi_{11}', \varphi_{12}', \varphi_{21}', \varphi_{22}'$ получены соответственно из выражений для $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}$ путем замены q_1 на q_1' и q_0 на q_0', а полиномы $\varphi_{11}'', \varphi_{12}'', \varphi_{21}'', \varphi_{22}''$ получены из тех же выражений путем замены q_1 на q_1'' и q_0 на q_0''. Окончательно получаем

$$\Phi(z) = (\Phi_1(z) + \Phi_2(z))\begin{bmatrix} a_{11} + 0{,}5kb_1c_1 & a_{12} + 0{,}5kb_1c_2 \\ a_{21} + 0{,}5kb_2c_1 & a_{22} + 0{,}5kb_2c_2 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ определяются по (40) и (41) соответственно.

4. Заключение

Получена новая форма частотного критерия абсолютной устойчивости дискретных систем, усиливающая дискретный вариант кругового критерия. Эта форма выведена с помощью метода степенного преобразования вектора состояния. Тем не менее окончательная формулировка критерия не использует терминов этого преобразования, а все вычисления производятся в пространстве исходной размерности.

Литература

1. *Баркин А. И.*, *Зеленцовский А. Л.* Метод нелинейного преобразования координат для исследования абсолютной устойчивости систем управления // Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИСИ, 1982. С. 41–50.
2. *Баркин А. И.*, *Зеленцовский А. Л.*, *Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. *Баркин А. И.*, *Рокин Д. Н.* Модернизация одного критерия абсолютной устойчивости // АиТ. 2008. № 5. С. 20–25.
4. *Цыпкин Я. З.* Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 52–55.
5. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нелинейных импульсных систем нестационарной нелинейностью // АиТ. 1970. № 8. С. 50–58.
6. *Баркин А. И.* О двух критериях абсолютной устойчивости дискретных систем // АиТ. 1996. № 1. С. 21–26.

Приближенное описание множеств притяжения систем с ограниченным управлением

П. С. Щербаков

Институт проблем управления РАН, Москва

Исследуется задача описания множества притяжения линейной системы, заданной в пространстве состояний. Рассматриваются ограниченные управления в виде линейной обратной связи по состоянию, а также управления с насыщением. Множество притяжения таких систем описывается в терминах инвариантных эллипсоидов с применением техники линейных матричных неравенств и задач полуопределенного программирования. Для управлений с насыщением используется идеология теории абсолютной устойчивости.

1. Введение

Необходимость описания областей притяжения возникает во многих практических приложениях, например, при исследовании поведения и управлении механическими системами. При этом как правило ресурс управления ограничен, а модель системы известна неточно и имеются неконтролируемые внешние возмущения. Общий подход к решению некоторых типов таких задач впервые представлен А. М. Формальским в [1], позже им изучалась возможность применения разработанных методов к различным задачам механического происхождения, например, таким как стабилизация положения шарика на подвижной плоскости и др. [2, 3]. В работах А. Б. Куржанского и соавторов [5] изучалась задача успокоения многозвенной пружинной системы, в [4] строились аппроксимации областей притяжения для синтеза управлении колесным роботом; приложение к нелинейным системам предложено в [12]. Из последних публикаций