Литература

1. *Баркин А. И.*, *Зеленцовский А. Л.* Метод нелинейного преобразования координат для исследования абсолютной устойчивости систем управления // Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИСИ, 1982. С. 41–50.
2. *Баркин А. И.*, *Зеленцовский А. Л.*, *Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. *Баркин А. И.*, *Рокин Д. Н.* Модернизация одного критерия абсолютной устойчивости // АиТ. 2008. № 5. С. 20–25.
4. *Цыпкин Я. З.* Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 52–55.
5. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нелинейных импульсных систем нестационарной нелинейностью // АиТ. 1970. № 8. С. 50–58.
6. *Баркин А. И.* О двух критериях абсолютной устойчивости дискретных систем // АиТ. 1996. № 1. С. 21–26.

Приближенное описание множеств притяжения систем с ограниченным управлением

П. С. Щербаков

Институт проблем управления РАН, Москва

Исследуется задача описания множества притяжения линейной системы, заданной в пространстве состояний. Рассматриваются ограниченные управления в виде линейной обратной связи по состоянию, а также управления с насыщением. Множество притяжения таких систем описывается в терминах инвариантных эллипсоидов с применением техники линейных матричных неравенств и задач полуопределенного программирования. Для управлений с насыщением используется идеология теории абсолютной устойчивости.

1. Введение

Необходимость описания областей притяжения возникает во многих практических приложениях, например, при исследовании поведения и управлении механическими системами. При этом как правило ресурс управления ограничен, а модель системы известна неточно и имеются неконтролируемые внешние возмущения. Общий подход к решению некоторых типов таких задач впервые представлен А. М. Формальским в [1], позже им изучалась возможность применения разработанных методов к различным задачам механического происхождения, например, таким как стабилизация положения шарика на подвижной плоскости и др. [2, 3]. В работах А. Б. Куржанского и соавторов [5] изучалась задача успокоения многозвенной пружинной системы, в [4] строились аппроксимации областей притяжения для синтеза управлении колесным роботом; приложение к нелинейным системам предложено в [12]. Из последних публикаций отметим книгу [6], которая отражает современный взгляд на решение описываемого круга задач.

Недавно к анализу рассматриваемого круга задач стали применяться методы теории линейных матричных неравенств (LMI); например, см. [4, 7–9]. Преимущества этого подхода заключаются в том, что он охватывает разнообразные постановки задач анализа и синтеза, применим к системам больших размерностей и использует простые и удобные вычислительные средства, совместимые со стандартным пакетом Matlab. Важно отметить, что в рамках этого подхода удается получать отдельные результаты и для нелинейных систем на основе идей теории абсолютной устойчивости, [4, 9, 10].

В настоящей работе предпринята попытка соединить возможности подхода на основе инвариантных эллипсоидов с идеями теории абсолютной устойчивости, — для синтеза ограниченного управления, максимизирующего область притяжения замкнутой системы. При этом основное внимание уделяется управлению с насыщением. Полученные результаты представляют собой первый шаг к решению более реалистично поставленных задач, например, учитывающих наличие внешних возмущений и др.

2. Определения и обозначения

Рассмотрим непрерывную линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad x(0) = 0, \quad A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbf{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

у которой пара (A, B) управляема, а $w(t) \in \mathbf{R}^m$ представляет собой внешнее возмущение, о котором предполагается известным лишь ограниченность в любой момент времени:

$$w^T(t)w(t) \leqslant 1 \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{2}$$

Такие возмущения, определенные для $t \in [0, \infty)$, называем *допустимыми*, и их совокупность обозначаем через W. Через W_T обозначим множество допустимых возмущений, определенных на $[0, T]$ при некотором конечном $T > 0$.

Для системы (1) определим *достижимое множество в момент* T:

$$R(T) = \big\{x(T)\ (1) \text{ для данного } T \geqslant 0 \text{ и некоторого } w \in W_T\big\}. \tag{3}$$

Это есть совокупность концов траекторий системы, рассматриваемой на конечном отрезке времени $[0, T]$, при действии того или иного допустимого возмущения $w \in W_T$.

Определим далее (предельное) *достижимое множество* системы (1):

$$R = \big\{x(t)\ (1) \text{ для некоторого } t \geqslant 0 \text{ и некоторого } w(t) \in W\big\} \tag{4}$$

(совокупность точек всех траекторий системы при действии любого из допустимых возмущений). Имеем

$$R = \bigcup_{t\geqslant 0} R(t) = R(\infty).$$

Нетрудно установить следующие свойства достижимых множеств.

1. Замкнутость, ограниченность, выпуклость и центральная симметрия множества $R(T)$.
2. Монотонность: $R(T_1) \subset R(T_2)$ для $T_1 < T_2 < \infty$.
3. Множество R ограничено тогда и только тогда, когда A устойчива.
4. Инвариантность R: если $x(0) \in R$, то $x(t) \in R$ при всех $t > 0$.
5. Минимальность по включению множества R среди всех инвариантных множеств.
6. «Притягиваемость» для устойчивой A: для любого $x_0 \notin R$ имеем $x(x_0, t) \to R$, $t \to \infty$.

Описание множества достижимости. Классический способ описания замкнутого выпуклого ограниченного множества $X \subset \mathbf{R}^n$ — через его опорную функцию

$$\varphi_X(c) = \max_{x\in X} c^T x, \quad c \in \mathbf{R}^n,$$

как пересечения всех *опорных полупространств*

$$\big\{x : c^T x \leqslant \varphi_X(c) \text{ для некоторого } \|c\| = 1\big\}.$$

Так и достижимое множество $R(T)$ можно описывать с помощью опорной функции:

$$R = \big\{x : c^T x \leqslant \varphi_{R(T)}(c) \text{ при всех } \|c\| = 1\big\}, \quad \varphi_{R(T)}(c) = \max_{x\in R(T)} c^T x. \tag{5}$$

Выписывая решение (1), для $\varphi_{R(T)}(c)$ нетрудно получить ([7], § 3.5.2)

$$\varphi_{R(T)}(c) = \int_0^T \big\|B^T e^{A^T\tau} c\big\| d\tau. \tag{6}$$

Для данного c величину $\varphi_{R(T)}(c)$ можно эффективно вычислять, решая некоторую систему дифференциальных уравнений. На этом пути эффективно характеризовать достижимое множество можно лишь в двумерном случае.

3. Множество притяжения

Определим *множество притяжения* для системы (1) в момент T:

$$Q(T) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : x(T) = 0 \text{ при } x(0) = x_0, \text{ данном } T \geqslant 0 \\ \text{и некотором } w \in W_T\},$$

которое есть совокупность точек фазового пространства, из которых система может быть приведена в начало координат в момент T с помощью допустимых *управлений* w.

Нетрудно видеть, что множество $Q(T)$ имеет свойства, аналогичные свойствам $R(T)$, в частности, выпуклость, ограниченность, центральную симметрию, монотонность ($Q(T_1) \subset Q(T_2)$ для $T_1 < T_2$) и инвариантность.

Мы будем изучать предельные множества $Q = Q(\infty)$. В отличие от R, множество притяжения ограничено тогда и только тогда, когда матрица A *неустойчива*.

Описание множества притяжения. Множество притяжения является «множеством достижимости для обратного времени $-t$», что описывается следующим образом.

Лемма 1. *Множество притяжения $Q(T)$ системы (1) совпадает с множеством достижимости $R(T)$ системы*

$$\dot{x} = -Ax + Bw, \quad x(0) = 0, \quad w \in W_T. \tag{7}$$

Действительно,

(i) если x_1 — решение системы (1) в момент T при некотором $w(t)$ и начальных условиях x_0, то x_0 — решение системы

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) - Bw(T - t)$$

в момент T при начальных условиях x_1;

(ii) если $w(t) \in W_T$, то и $-w(t) \in W_T$ (симметричность W_T).

Полезно следующее представление:

$$Q(T) = e^{-AT} R(T).$$

В самом деле, по определению, точка $x_0 \in Q(T)$ тогда и только тогда, когда найдется $w(\tau) \in W_T$ и $t \leqslant T$, такие, что

$$e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bw(\tau)\, d\tau = 0,$$

т. е.

$$x_0 = -\int_0^t e^{-A\tau} Bw(\tau)\, d\tau = -e^{-A\tau} \int_0^t e^{-A\tau} Bw(\tau)\, d\tau,$$

где второй сомножитель есть $R(T)$, когда $w(\tau)$ пробегает все W_T.

Как и для множеств достижимости, эффективно описывать множества притяжения с помощью опорных функций удается лишь при $n = 2$, поэтому предлагается приближенный способ описания, основанный на понятии *инвариантных эллипсоидов*.

4. Инвариантные эллипсоиды

Инвариантность является одним из ключевых свойств введенных выше множеств, поэтому в качестве приближений будем пользоваться также инвариантными множествами, но имеющими более простую структуру, — инвариантными эллипсоидами. Эллипсоид

$$E = \{x \in \mathbf{R}^n : x^T P^{-1} x \leqslant 1\}, \quad P > 0,$$

называется инвариантным для системы (1), если для любого $x_0 \in E$ траектория системы остается внутри E при всех $w \in W$ и всех $t > 0$.

Удобство использования инвариантных эллипсоидов заключается в их прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова и наличием хорошо развитого аппарата линейных матричных неравенств, который и будет использоваться ниже для построения эллипсоидальных оценок множеств притяжения.

5. Линейное ограниченное управление

Пусть сигнал $w(t)$ имеет смысл управления; будем обозначать его через $u(t)$, и в качестве допустимых управлений рассматривать не функции времени, а линейные обратные связи $u = Kx$ при ограничении $\|u\| \leqslant u_{\max}$, т. е. оставаться в более узком классе. В следующем разделе рассмотрим управление с насыщением.

Целью является построить управление такого типа, описать множество точек, из которых оно приводит систему в начало координат и оптимизировать это множество по размеру.

Рассмотрим систему с *линейным управлением*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx, \quad \|u\| \leqslant u_{\max}. \tag{8}$$

Здесь и далее A, B фиксированы и известны, ограничение $u_{\max}$ на величину управления известно, а K подлежит выбору. Для любого фиксированного K дадим определение:

Определение 1. Областью притяжения Q_{lin} линейной системы (8) назовем совокупность всех начальных условий $x_0 = x(0)$, для которых $x(x_0, t) \to 0$.

Как отмечено выше, будем рассматривать лишь неустойчивые разомкнутые системы, — в противном случае, применяя тривиальное ограниченное управление $u = 0x \equiv 0$, получаем, что Q_{lin} совпадает со всем пространством. Интересно, что этого же результата удается добиться с помощью тождественно не равных нулю управлений с насыщением $u = \mathrm{s}at(Kx)$ (они рассматриваются в разделе 4).

Определение 2. Эллипсоид

$$E_{lin}(P) = \{x \in \mathbf{R}^n : \ x^T P^{-1} x \leqslant 1\}, \qquad P > 0, \tag{9}$$

назовем инвариантным притягивающим для (8), если для любого $x_0 \in E_{lin}$ будет $x(x_0, t) \to 0$ и $x(x_0, t) \in E_{lin}$ для всех $t \geqslant 0$.

Нас интересует стабилизирующее ограниченное управление по состоянию $u = Kx$, $\|u\| \leqslant u_{\max}$, при котором эллипсоид E_{lin} *максимален*. Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть P, Y — решения задачи полуопределенного программирования (SDP)*

$$\begin{aligned} &\max f(P) \quad \textit{при ограничениях} \\ &(AP + PA^T + BY + Y^T B^T) < 0, \\ &\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & u_{\max}^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{10}$$

относительно матричных переменных $P = P^T$ и Y. Тогда управление $u = Kx$, $K = YP^{-1}$ стабилизирует систему и является ограниченным $\|u\| \leqslant u_{\max}$ на эллипсоиде $E_{lin}(P)$ (9), который максимален по принятому критерию среди инвариантных эллипсоидов. При этом

$$V(x) = x^T P^{-1} x$$

будет функцией Ляпунова для замкнутой системы $\dot{x} = (A + BK)x$.

Этот результат является прямой модификацией результата из [8]. Первое LMI («ляпуновское») гарантирует, что управление $u = Kx$ стабилизирующее, второе — что оно ограниченное (см. [8]), а критерий дает наилучшее среди таких управлений.

В качестве критерия $f(P)$ может приниматься, например, след матрицы P или ее минимальное собственное значение, сохраняющие SDP-структуру задачи (минимизация линейной функции при LMI-ограничениях). Мы будем пользоваться критерием следа.

Можно показать, что решения P, Y задачи (10) дают регулятор $K = YP^{-1}$, для которого замкнутая система с матрицей $A_c = A + BK$ находится на границе устойчивости: $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \approx 0$. Иными словами, построенный эллипсоид (будучи инвариантным) не является притягивающим в смысле Определения 1, — траектории системы не стягиваются в начало координат.

Чтобы обеспечить $x(t) \to 0$, потребуем некоторой гарантированной скорости убывания функции Ляпунова: $\dot{V}(x) \leqslant -t\|x\|^2$ с некоторым заданным $t > 0$:

$$(A + BK)^T P^{-1} + P^{-1}(A + BK) \leqslant -tI.$$

Домножим это неравенство слева и справа на P, тогда в переменных P и $Y = PK$ это условие запишется как линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T & P \\ P & -I/t \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

которое следует использовать в (10) вместо «ляпуновского» неравенства. Таким образом, получаем

Теорема 2. *Пусть $P = P^T$, Y — решения задачи SDP*

$$\begin{aligned} &\max f(P) \quad \textit{при ограничениях} \\ &\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T & P \\ P & -I/t \end{pmatrix} \leqslant 0, \\ &\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & u_{\max}^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда управление $u = Kx$, $K = YP^{-1}$, является стабилизирующим, матрица P определяет для замкнутой системы притягивающий эллипсоид $E_{lin}(P)$, на котором управление ограничено, $\|u\| \leqslant u_{\max}$, причем этот эллипсоид является максимальным по всем линейным управлениям по состоянию, для которых функция Ляпунова $V(x) = x^T P^{-1} x$ убывает не медленнее, чем $-t\|x\|^2$.

Отметим, что в рассматриваемой задаче (без внешних возмущений) максимально допустимая величина управления $u_{\max} > 0$ может быть любой, поскольку ограничения всегда совместны (при меньших $u_{\max}$ лишь получаем меньший эллипсоид притяжения). Поэтому везде далее считаем $u_{\max} = 1$.

6. Управление с насыщением

Построенный эллипсоид соответствует линейным управлениям $u = Kx$. Расширим класс. Рассмотрим случай скалярного управления ($K^T \in \mathbf{R}^n$), и пусть в системе (8) оно имеет вид

$$u = \mathrm{sat}(Kx) = \begin{cases} -1 & \text{при } Kx < -1; \\ Kx & \text{при } |Kx| \leqslant 1; \\ +1 & \text{при } Kx > 1. \end{cases}$$

Как и выше, построим управление такого вида, дающее максимальный притягивающий инвариантный эллипсоид. Поскольку замкнутая система нелинейна, то воспользуемся подходом теории абсолютной устойчивости.

Очень кратко приведем идею построений. Пусть искомый регулятор K построен; для $\gamma \geqslant 1$ рассмотрим сектор, ограниченный прямыми $u = Kx$ и $u = Kx/\gamma$, и все ограниченные нелинейности $-1 < u \leqslant 1$, лежащие в этом секторе (см. рис. 1). Найдем квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T P_{sat}^{-1} x, \quad P_{sat} > 0,$$

для которой $\dot V(x) < 0$ на траекториях системы при всех нелинейностях из сектора. Для этого достаточно будет построить такую функцию для двух «крайних» систем: одна соответствует $u = Kx$ (т. е. $\gamma = 1$), а другая — максимально возможной величине γ (максимальному раствору сектора). Кроме того, потребуем, чтобы искомый эллипсоид $\{x^T P_{sat}^{-1} x \leqslant 1\}$ лежал

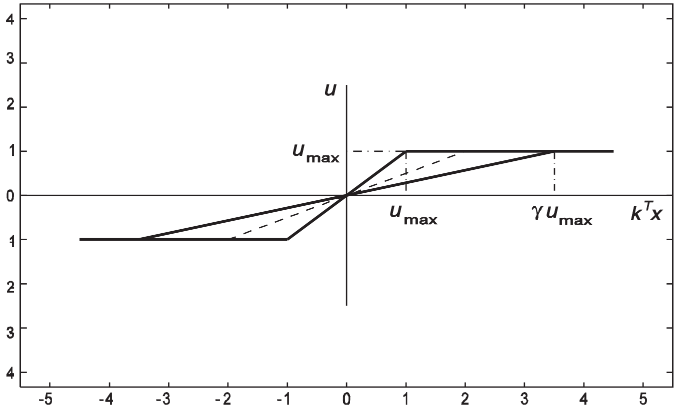

Рис. 1. Управление с насыщением

в полосе $S = \{|Kx| \leqslant \gamma\}$. Записывая эти условия в виде квадратичных ограничений, используя S-теорему, и (как и в Теоремах 1 и 2) переходя к переменным P, Y, получаем следующий результат (ниже обозначено $\mu = 1/\gamma$).

Теорема 3. *Если Y_{sat}, P_{sat} доставляют решения параметрической задаче SDP*

$$\max f(P) \quad \textit{при ограничениях}$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T & P \\ P & -\dfrac{I}{t} \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \mu(BY + Y^T B^T) & P \\ P & -\dfrac{I}{t} \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \dfrac{1}{\mu^2} I \end{pmatrix} \geqslant 0; \qquad 0 < \mu \leqslant 1,$$

относительно матричных переменных $P = P^T$, Y и параметра $\mu \in (0,1]$, то управление $u = \mathrm{sat}(K_{\mathrm{sat}} x)$, $K_{\mathrm{sat}} = Y_{\mathrm{sat}} P_{\mathrm{sat}}^{-1}$, — стабилизирующее, причем среди всех управлений с насыщением оно дает максимальный эллипсоид притяжения $E_{\mathrm{sat}} = \{x : x^T P_{\mathrm{sat}}^{-1} x \leqslant 1\}$ для замкнутой системы с заданной скоростью убывания функции Ляпунова $V(x) = x^T P_{sat}^{-1} x$ вдоль траекторий.

Обозначим $\phi(\mu)$ решение задачи (12) при фиксированном $\mu \in (0, 1]$.

Утверждение. *Функция $\phi(\mu)$ монотонно возрастает на* $(0,\ 1]$.

Иными словами, максимум достигается при $\mu = 1$, что означает $E_{sat} = E_{lin}$ т. е. оптимальный эллипсоид притяжения невозможно увеличить за счет управлений с насыщением.

7. Область притяжения нелинейной системы

В качестве еще одного применения изложенных выше идей рассмотрим задачу о построении множества притяжения для нелинейной системы. Для простоты изложения ограничимся иллюстрацией нашего подхода на примере, заимствованном из [12].

Рассмотрим двумерную нелинейную систему $\dot x = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, вида

$$\begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0{,}2347136969 - 0{,}0633 \sin(x_1 + 0{,}0405) - \\ -0{,}582 \sin(x_1 + 0{,}4103) - 0{,}7143 x_2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для нее методами математического программирования в [12] получен эллипс притяжения

$$E_{mp} = \{x \in \mathbf{R}^2 : \; x^T P_{mp}^{-1} x \leqslant 1\}, \qquad P_{mp} = \begin{pmatrix} 11{,}4161 & -7{,}8977 \\ -7{,}8977 & 10{,}5771 \end{pmatrix},$$

максимизирующий объем (det P).

Линеаризуем систему, представив ее в эквивалентном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $A = A_{ij} = \partial f_i(x)/\partial x_j\big|_{x=0}$, $Bu = f(x) - Ax$, откуда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5969 & -0{,}7143 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda(A) = -0{,}3572 \pm j0{,}6851,$$

а

$$u = u(x_1) = 0{,}2347136969 - 0{,}0633 \sin(x_1 + 0{,}0405) - \\ - 0{,}582 \sin(x_1 + 0{,}4103) + 0{,}5969 x_1$$

теперь представляет собой скалярную нелинейность.

Дальше, во-первых, считаем нелинейное *возмущение* u ограниченным, во-вторых, заключенным в сектор с «раствором» μ. Точнее, задаемся $x_1^{\max}$, полагаем $\mu = u(x_1^{\max})/x_1^{\max}$ и рассматриваем нелинейность в секторе $0 \leqslant u(x_1) \leqslant \mu x_1$, причем лишь для $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^{\max}$ (см. рис. 2).

Теперь для двух систем, соответствующих крайним ограничениям, строим общую функцию Ляпунова. Эти две системы суть

$$\dot{x} = Ax; \quad \dot{x} = Ax + \mu BKx,$$

где вектор-строка $K = [1\ 0]$ вырезает первую компоненту, т. е. $Kx = x_1$.

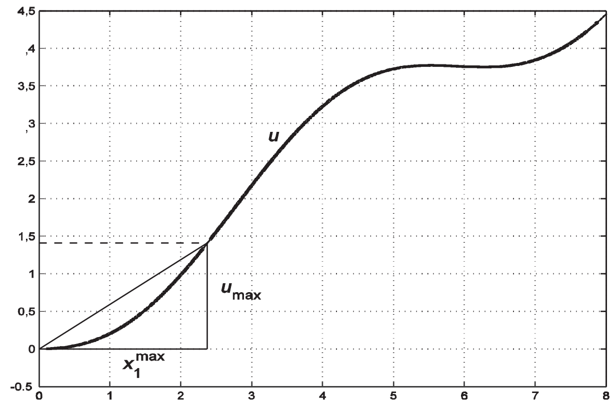

Рис. 2. Ограниченная нелинейность в секторе

Таким образом, при разных $x_1^{\max}$ — они определяют $u_{\max}$ и μ — решаем задачу

$$\begin{aligned} & \max f(P) \quad \text{при ограничениях} \\ & AP + PA^T \leqslant 0, \\ & (A + \mu BK)P + P(A + \mu BK)^T \leqslant 0, \qquad \alpha > 0, \\ & \begin{pmatrix} P & PK^T \\ KP & \dfrac{u_{\max}^2}{\mu^2} I \end{pmatrix} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{14}$$

по переменной $P = P^T$. Искомый эллипс $E = \{x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$ соответствует тому значению $x_1^{\max}$, при котором матрица решения P максимальна (например, по критерию следа).

В результате вычислений получаем, что максимум достигается при $x_1 \approx 2{,}375$, и полученный эллипс (внутренний на рис. 3), задаваемый матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 5{,}6406 & -1{,}7389 \\ -1{,}7389 & 1{,}5297 \end{pmatrix},$$

оказывается хуже построенного в [12]. Причина, по-видимому, заключается в достаточности условий Теоремы 3, в то время как техника работы [12] позволяет получить точное решение.

Однако приведенный пример ставил своей целью, во-первых, продемонстрировать принципиальную возможность применения предложенно-

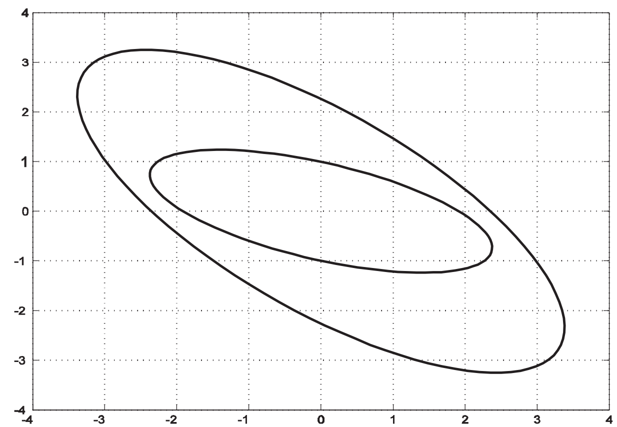

Рис. 3. Эллипсы притяжения для нелинейной системы (13)

го подхода; во-вторых, используемая техника решения проста и опирается на повсеместно доступные программные реализации методов решения задач полуопределенного программирования (пакеты Yalmip, SeDuMI системы Matlab), в то время как метод в [12] основан на решении общей задачи математического программирования и использует сложную численную «подгонку» результата. Наконец, — самое важное, — наша техника может быть распространена на многомерный случай, для которого методы, рассматривавшиеся в [12] не могут быть реализованы (в частности, условия положительной определенности матрицы чрезвычайно трудно формулировать в терминах ее элементов).

8. Заключение

В работе предложен метод синтеза ограниченного управления по состоянию, которое максимизирует область притяжения замкнутой системы. Описываемых подход заключается в построении оценок в форме инвариантных эллипсоидов с использованием линейных матричных неравенств и применении техники абсолютной устойчивости.

Полученные результаты иллюстрируют простоту и удобство предложенного подхода и представляют собой первый шаг к получению более общих результатов. В последующих работах предполагается распространить эту идеологию на системы с внешними возмущениями, на векторное управление, на системы с несколькими нелинейностями.

Литература

1. *Формальский А. М.*, Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами, М.: Наука, 1974.
2. *Aoustin Y.*, *Formalsky A. M.*, Ball on beam: Stabilization with large basin of attraction // Int. J. Control. 2009 (to be published).
3. *Aoustin Y.*, *Formalsky A. M.*, On the stabilization of a biped vertical posture in single support using internal torques // Robotica. 2005. **23**, 1. P. 65–74.
4. *Морозов Ю. В.*, *Рапопорт Л. Б.*, Численные методы оценки областей притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2008. 1. P. 16–29.
5. *Востриков И. В.*, *Дарьин А. Н.*, *Куржанский А. Б.*, Об успокоении многозвенной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений // Дифф. уравн. 2006. **42**, 11. P. 1452–1463.
6. *Blanchini F.*, *Miani S.*, Set-theoretic methods in control, Birkhäuser. Boston, 2008.
7. *Поляк Б. Т.*, *Щербаков П. С.*, Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

8. *Назин С. А.*, *Поляк Б. Т.*, *Топунов М. В.*, Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. 3. С. 106–125.
9. *Баландин Д. В.*, *Коган М. М.*, Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
10. *Баркин А. И.*, *Зеленцовский А. Л.*, *Пакшин П. В.*, Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992.
11. *Polyak B. T.*, Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optimiz. Th. Appl. 1998. **99**, 3. P. 553–583.
12. *Dikin I. I.*, *Popova O. M.*, On construction of the asymptotic stability region on the plane // Advanced modeling and optimization. 2001. **3**, 2. P. 1–5 [Электронный ресурс] http://www.ici.ro/camo/journal/v3n2.htm