Задача оптимизации развития системы образования региона

И. Е. Кириллов

Кольский филиал Петрозаводского университета, г. Апатиты

Введение

Решение задачи оптимизации развития системы образования (СО) региона, как сложного объекта, является трудоемким процессом и зависит от многих факторов, влияющих как на ее постановку так и на выбор алгоритмов ее решения. В данной статье предлагается подход основанный на применении теории нечетких множеств. Постановка и решение задачи осуществляется в несколько шагов.

1. Прогнозирование спроса на специалистов.
2. Задача распределение абитуриентов.
3. Распределения необходимого количества новых образовательных заведений.
4. Выбор оптимального расположения образовательных учреждений.

Для каждой задачи предложены возможные варианты решения.

1. Прогнозирование спроса

Решение задачи прогнозирования спроса на специалистов определенных профессий, не является однозначным и зависит от многих факторов, в частности от характера экономики региона для которого она решается. В данной статье, в качестве одного из альтернативных способов, способного дополнить уже существующие методы предлагается решение основанное на использовании статистических данных за прошлые годы.

Первоначально производится выборка статистики за определенный интервал времени, далее на ее основе с помощью эксперта выявляются

F_1:

ЕСЛИ $x_1^i =$ *низкое*
И $x_2^i =$ *ниже среднего* ,
ТО $x_3^i =$ *ниже среднего*
ЕСЛИ $x_1^i =$ *ниже среднего*
И $x_2^i =$ *ниже среднего* ,
ТО $x_3^i =$ *выше среднего*
ЕСЛИ $x_1^i =$ *ниже среднего*
И $x_2^i =$ *среднее* ,
ТО $x_3^i =$ *ниже среднего*

Рис. 1. Экспертное высказывание

экспертно-лингвистические закономерности, записанные в виде высказываний на естественном языке. Высказывания являются правилами формата ЕСЛИ—ТО, возможный вид одного из правил приведен на рис. 1.

Высказывания служат основой для составления модели прогнозирования в виде сети, рис. 2, отображающей взаимосвязь экспертно-лингвистических высказываний и циклов, выявленных экспертом.

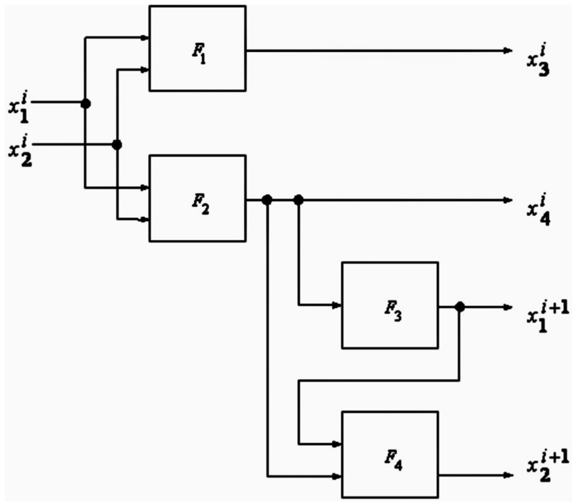

Рис. 2. Сеть зависимостей для прогнозирования

$$F_1 : \begin{cases} x_3^i = \dfrac{x_1 \mu^{нС}\left(x_3^i\right) + x_3 \mu^{вС}\left(x_3^i\right) + x_4 \mu^{B}\left(x_3^i\right)}{\mu^{нС}\left(x_3^i\right) + \mu^{вС}\left(x_3^i\right) + \mu^{B}\left(x_3^i\right)}, \\ \mu^{нС}\left(x_3^i\right) = max\begin{pmatrix} min\left(\mu^{H}\left(x_1^i\right), \mu^{нС}\left(x_2^i\right)\right), \\ min\left(\mu^{нС}\left(x_1^i\right), \mu^{C}\left(x_2^i\right)\right) \end{pmatrix} \\ \mu^{вС}\left(x_3^i\right) = min\left(\mu^{нС}\left(x_1^i\right), \mu^{нС}\left(x_2^i\right)\right) \\ \mu^{B}\left(x_3^i\right) = min\left(\mu^{B}\left(x_1^i\right), \mu^{B}\left(x_2^i\right)\right) \end{cases}$$

Рис. 3. Пример модели прогнозирования в явном виде

Затем для формализации лингвистических оценок выбирается одна из возможных функций принадлежности нечеткой логики, в данном подходе выбрана функция следующего вида:

$$\mu^T(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-b}{c}\right)^2}.$$

С помощью операции дефаззификации и использованием операций min и max нечеткой логики, модель прогнозирования записывается в явном виде рис. 3.

На следующем шаге полученная модель подвергается настройке с помощью метода наименьших квадратов, после чего ее можно использовать.

2. Распределение абитуриентов

В большинстве случаев потенциальный абитуриент выбирает будущее место обучения ориентируясь лишь на собственные предпочтения, однако у государства есть некоторые возможные меры воздействия, способные регулировать количество определенных специалистов, например популяризация тех или иных профессий в средствах массовой информации, или ограничение численности студентов в определенны учебных заведениях по определенным специальностям с помощью лицензий. Поэтому необходимо решить задачу распределения студентов между существующими учебными заведениями. Данную задачу можно решать, используя различные подходы.

1. Как задачу линейного программирования.
2. Используя максимизацию критерия по генетическому алгоритму.
3. Используя метод ранжирования.
4. Используя метод слияния целей и ограничений.

Постановка задачи распределения студентов, как задачи линейного программирования сводится к следующему критерию:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{k} -(F_{it} + F'_{it})\right) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m}(z_{lit}\cdot e_{lit} + y_{lit}\cdot d_{lit}) \to \max,$$

где

$$F_{it} = \left(P_{it} - d_{it} - \sum_{j=1}^{m}(x_{ijt} + y_{ijt} + z_{ijt})\right)\cdot\alpha$$

и

$$F'_{it} = \left(P_{it} - d_{it} - \sum_{j=1}^{m}(x_{ijt} + y_{ijt} + z_{ijt})\right)\cdot\beta,$$

со следующими ограничениями:

1. Все выделенные бюджетные средства должны быть расходованы на студентов бюджетников, следовательно, их количество должно быть строго определенным, но так же необходимо учитывать и рейтинг и стоимость обучения по определенным специальностям, поэтому:

$$G_t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} A_{ijt},$$

где $t = \overline{1, T}$.

Количество обучаемых на факультете зависит непосредственно от рейтинга этого факультета, но количество денег выделенных факультету будет зависеть также и от стоимости обучения:

$$A_{ijt} = V_{ijt}\cdot X_{ijt}\cdot C_{ijt}, \quad \sum_{t=1}^{T}\left(A_{m\cdot t} - \sum_{j=1}^{k} x_{m\cdot jt}c_{m\cdot jt}\right) = 0.$$

2. Количество студентов не может быть отрицательным:

$$z_{ijt} \geqslant 0; x_{ijt} \geqslant 0; y_{ijt} \geqslant 0.$$

3. Количество студентов определенного УЗ ограничено лицензией:

$$\sum_{i=1}^{k} z_{ijt} + y_{ijt} + x_{ijt} \leqslant O_{ij}.$$

Решение данной задачи наиболее рационально осуществлять с помощью метода ранжирования и метода слияния целей и ограничений.

При использовании метода ранжирования выделяются два основных критерия:

1) стоимость обучения;
2) качество обучения.

Чем ниже стоимость обучения, тем большее количество студентов можно подготовить, затратив фиксированные средства. Необходимо также учитывать спрос на данную специальность и требуемый уровень подготовки кадров. Исходя из этого, необходимо добиться рационального сочетания между качеством и количеством подготавливаемых специалистов.

Пусть множество $\{Q = q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ — множество всех УЗ региона, то есть множество вариантов (аналогов), которые подлежат многокритериальному анализу.

Пусть $\{C = c_1, c_2\}$ — множество количественных и качественных критериев, которыми оцениваются варианты. Задача состоит в том, чтобы упорядочить элементы множества Q по критериям из множества C.

Для решения этой задачи предлагается использование следующих принципов.

1. Рассмотрение критериев как нечетких множеств, которые заданы на универсальных множествах вариантов с помощью функции принадлежности.
2. Определение функций принадлежности нечетких множеств на основе экспертной информации о парных сравнениях вариантов с помощью 9-бальной шкалы Саати.
3. Ранжирование вариантов на основе пересечения нечетких множеств — критериев, которые отвечают известной в теории принятия решений схеме Беллмана—Заде.
4. Ранжирование критериев методом парных сравнений и учет полученных рангов как степеней концентрации соответствующих функции принадлежности.

Пусть $\mu^l(q_i)$ — число в диапазоне $[0, 1]$, которое характеризирует уровень оценки варианта $q_i \in Q$ по критерию $c_i \in C$: чем больше число $\mu^l(q_i)$, тем выше оценка варианта по критерию $c_i \in C$, $i = \overline{1, m}$, $l = 2$. Тогда критерий $c_i \in C$ можно представить в виде нечеткого множества $\bar{c}_l$, которое задано на универсальном множестве $\boldsymbol{Q}$ таким образом:

$$\bar{c}_l = \left\{ \frac{\mu^l(q_1)}{q_1}, \frac{\mu^l(q_2)}{q_2}, \ldots, \frac{\mu^l(q_m)}{q_m} \right\}, \tag{1}$$

где $\mu^l(q_i)$ — степень принадлежности элемента q_i к нечеткому множеству $\bar{c}_l$.

Для определения степеней принадлежности, которые входят в (1) используется метод парных сравнений вариантов по каждому критерию. Общее количество таких матриц сравнения совпадает с количеством критериев и равняется 2.

Для критерия $c_1 \in C$матрица парных сравнений имеет вид:

$$A^1 = \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \ldots & a_{1m}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \ldots & a_{2m}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^1 & a_{m2}^1 & \ldots & a_{mm}^1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где элемент a_{ij}^l оценивается экспертом по 9-бальной шкалой Саати:

1 — если отсутствует преимущество варианта q_i над вариантом q_j;
3 — если имеется слабое преимущество q_i над q_j;
5 — если имеется существенное преимущество q_i над q_j;
7 — если имеется явное преимущество q_i над q_j;
9 — если имеется абсолютное преимущество q_i над q_j;
2, 4, 6, 8 — промежуточные сравнительные оценки.

Знание матрицы (1) позволяет с использованием метода Саати проранжировать каждый вариант $q_i \in Q$ по каждому критерию $c_l \in C$. Для вычисления рангов найдем собственный вектор матрицы (1). Предположим, что матрица (1) имеет такие свойства:

— она диагональная $a_{ii}^l = 1$, $i = \overline{1,2}$; — элементы, которые симметричны относительно главной диагонали, связаны зависимостью $a_{ii}^l = 1/a_{ji}^l$;
— она транзитивна $a_{ik}^l a_{ki}^l = a_{ij}^l$. Наличие этих свойств позволяет определить все элементы матрицы по элементам одной из строк. Если известна k-ая строка, то произвольный элемент определяется так:

$$a_{ij}^l = \frac{a_{kj}^l}{a_{ki}^l}, \quad i, j, k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2}.$$

Степени принадлежности, необходимые для формирования нечеткого множества, вычисляются по формуле:

$$\mu^l(q_i) = \frac{1}{a_{i1}^l + a_{i2}^l + \ldots + a_{im}^l}. \tag{3}$$

Уточнение оценок рангов может быть выполнено с использованием метода анализа иерархий на основе матрицы (1), не обладающей транзитивностью и симметричностью.

Базируясь на принципе Беллмана—Заде, наилучшей системой будет та, которая одновременно лучшая по критериям c_1, c_2. Поэтому нечеткое множество, которое необходимо для рейтингового анализа, определяется в виде пересечения (интегральный критерий оценки систем):

$$D = \bar{c}_1 \cap \bar{c}_2.$$

Учитывая то, что в теории нечетких множеств операции пересечения $\cap$ соответствует $\min$, получаем:

$$D = \left\{ \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_1)\right]}{q_1}, \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_2)\right]}{q_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_m)\right]}{q_m} \right\}. \tag{4}$$

Согласно с полученным множеством D, наилучшей системой следует считать тот вариант, для которого степень принадлежности (числитель) является наибольшей.

В рассматриваемой задаче критерии нельзя считать равновесными, поэтому:

Пусть w_1, w_2 — коэффициенты относительной важности (или ранги) критериев c_1, c_2 такие, что $w_1 + w_2 = 1$. Для определения коэффициентов w_i необходимо сформировать матрицу парных сравнений важности критериев $c_l \in C$, аналогичную (1), и воспользоваться формулой (2).

При наличии коэффициентов важностиw_i формула (3) имеет вид:

$$D = \left\{ \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_1)\right]^{w_1}}{q_1}, \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_2)\right]^{w_2}}{q_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{l=1,2}\left[\mu^l(q_m)\right]^{w_m}}{q_m} \right\},$$

где степень w_i свидетельствует о концентрации нечеткого множества $\bar{c}_1$ в соответствии с мерой важности критерия $c_i \in C$. После того, как элементы множества Q упорядочены в соответствии с критериями С решение задачи распределения количества студентов может осуществляться по алгоритму, представленному на рис. 3, суть которого сводится к следующему:

1. Выбирается УЗ с наивысшим «рейтингом».
2. Полностью загружаются мощности данного УЗ.
3. С учетом шага 2 оценивается оставшаяся потребность в специалистах, сравнивается с 0.
4. Если потребность не удовлетворена и не исчерпаны средства финансирования, УЗ исключается из списка рассмотрения и происходит переход к шагу 1, если удовлетворена, то к шагу 5.
5. Конец.

Использование данного алгоритма обеспечит максимальная загрузка УЗ, которые обладают лучшими показателями по цене и качеству обучения специалистов определенного профиля.

Данный алгоритм обладает некоторыми ограничениями:

Он не учитывает месторасположение УЗ и тот факт, что не все абитуриенты в силу тех или иных причин могут ехать учиться в другой город.

1. Необходимо знать размер государственного финансирования направленного на подготовку кадров конкретной специальности, а не размер финансирования всех УЗ в общем.
2. Матрицы C_g и O_g должны быть упорядочены в соответствии с рангом УЗ.
3. Ранжирование УЗ должно быть проведено относительно каждой специальности.

Из этих ограничений вытекают следующие проблемы применения данного алгоритма:

1. Необходимость качественной экспертной оценки УЗ между собой по каждой специальности
2. Необходимость ввода дополнительного критерия, который должен учитывать демографическую ситуацию района, в котором расположено то или иное УЗ.

В связи с вышеизложенными проблемами возникает потребность применения метода слияния целей и ограничений.

Пусть в регионе, для которого решается задача, имеется m УЗ. Тогда задача ставится следующим образом — между имеющимися УЗ необходимо распределить возможное количество студентов наиболее рациональным образом, учитывая объемы финансирования всех УЗ данного региона.

Пусть:

$\left\{X_g = x_{ij}, x_{ij} \in \left[0, x_{ij}^{+}\right], \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}\right\}$ $g = \overline{1,T}$ — матрицы, содержащие возможное количестве студентов обучаемых на бюджетной основе в конкретном УЗ на конкретной специальности в конкретном году планирования.

$\left\{Y_g = y_{ij}, y_{ij} \in \left[0, y_{ij}^{+}\right], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}\right\}$ $g = \overline{1,T}$ — матрицы, содержащие возможное количестве студентов обучаемых на коммерческой основе в конкретном УЗ на конкретной специальности в конкретном году планирования.

$\left\{Z_g = z_{ij}, z_{ij} \in \left[0, z_{ij}^{+}\right], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}\right\}$ $g = \overline{1,T}$ — матрицы, содержащие возможное количестве студентов обучаемых на основе целевого набора УЗ на конкретной специальности в конкретном году планирования.

Пусть $P = \left\{P_{ij,}P_{ij} \in \left[P_{ij}^{-}, P_{ij}^{+}\right], i = \overline{1,T}, j = \overline{1,k}\right\}$ — матрица прогнозированного спроса на специалистов j-й специальности за каждый из T периодов. Естественно, что спрос на специальности не может быть предсказан достаточно точно, чтобы быть описанным одним числом, поэтому он задается как некоторый интервал.

Множеством возможных альтернатив при решении данной задачи являются все возможные комбинации из m УЗ т. е. множество $\{M = m_m\}$, из этих комбинаций необходимо выбрать наиболее оптимальную, зададим нечеткую цель G — «m_m должно быть таким, чтобы

$$P_{ij} \leqslant \sum_{k=1}^{m} z_{kj} + y_{kj} + x_{kj} \leqslant P_{ij}^{+}$$

для каждой j-й специальности», ее можно представить как нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\mu_G(m_m) = \begin{cases} 0, & \sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj} \leqslant P_{ij}^{-}, \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj}}{(P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-})/2}, & \left(\sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj}\right) \leqslant \dfrac{P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-}}{2}, \\ \dfrac{((P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-})/2)}{\left(\sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj}\right)}, & \left(\sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj}\right) \geqslant \dfrac{P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-}}{2}, \\ 0, & \sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj} \geqslant P_{ij}^{+}. \end{cases}$$

Нечеткие ограничения влияющие на решение поставленной задачи можно представить как нечеткие множества:

C — количество студентов не может быть отрицательным, а так же не может быть больше числа определенного лицензией, т. е. должно находиться в диапазоне от 0 до O_{ij}, где O_{ij} — это числа из

$$Og = \{o_{ij}, o_{ij} \in \left[0, o_{ij}^{+}\right], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}\} \quad g = \overline{1,T}$$

— матриц содержащих ограничениях на количества студентов УЗ, наложенных выданной лицензией.

$$\mu_c(x,y,z) = \left(1 + a\left(\sum_{k=1}^{m} (x_{kj} + y_{kj} + z_{kj}) - \frac{O_{ij}}{2}\right)\right)^{-1}.$$

D — финансирование УЗ ограничено, поэтому расходы на обучение студентов не должны превышать запланированных средств, т. е. расходы д. б. равны либо чуть меньше финансирования, слишком маленькие затраты на обучения могут свидетельствовать о том что в качестве решения выбраны не самые оптимальные УЗ с точки зрения качества обучения.

$$\mu_D(x,y,z) = \frac{1}{1 + \left(G_t - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} A_{ijt}\right)},$$

где $A_{ijt} = V_{ijt} * X_{ijt} * C_{ijt}$.

Нечетким решением задачи планирования развития образовательной системы будет множество P, представляющее собой пересечение множества альтернатив и множеств ограничений:

$$P = D \cap C \cap G.$$

Функция принадлежности для пересечений примет вид:

$$\mu_{D\cap C\cap G} = \begin{cases} 0, & \sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj} \leqslant P_{ij}^{-}, \\ \min(\mu_D, \mu_C, \mu_G), & \sum_{k=1}^{m} (x_{kj} + y_{kj} + z_{kj}) \leqslant \dfrac{P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-}}{2}, \\ \min(\mu_D, \mu_C, \mu_G), & \sum_{k=1}^{m} (x_{kj} + y_{kj} + z_{kj}) \geqslant \dfrac{P_{ij}^{+} - P_{ij}^{-}}{2}, \\ 0, & \sum_{k=1}^{m} z_{kj}+y_{kj} + x_{kj} \geqslant P_{ij}^{+}. \end{cases}$$

В определении нечеткого решения P как слияния цели и ограничений подразумевается, что все цели и ограничения имеют одинаковую важность. В задаче планирования развития образовательной системы ограничения по финансированию и по количеству студентов нельзя считать равновесными, в этом случае решение может быть выражено выпуклой комбинацией целей и ограничений с весовыми коэффициентами, характеризующими относительную важность составляющих элементов. Таким образом, μ_p может быть записано в виде:

$$\mu_P = \alpha\mu_D + \beta\mu_C + \gamma\mu_G,$$

где α, β, γ — функции принадлежности такие, что

$$\sum \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

В дальнейшем алгоритм решения задачи сводится к следующему.

1. Удаления из универсального множества решений, заранее являющихся не удовлетворительными (к примеру, решение содержащее все 0).
2. Вычисление функции принадлежности оставшихся комбинаций решений.
3. Выбор оптимального решения.

На третьем шаге решается задача определения необходимого количества новых образовательных заведений, данная задача решается аналогично предыдущей с применением метода слияния целей и ограничений.

На четвертом шаге решается задача районирования, то есть наиболее оптимального выбора расположения образовательных учреждений, с помощью метода ранжирования.

Литература

1. Основные положения Стратегии экономического развития Мурманской области на период до 2015 года / http://gov.murman.ru / strategy
2. *Васильев В. Н.* и др. Спрос и предложение на рынке труда и рынке образовательных услуг в регионах России // Сб. докл. по материалам Всероссийской научно-практической Интернет-конференции. Петрозаводск, 2004. Кн. 1. С. 62–86.
3. *Лексиков А. Н.*, *Олейник А. Г.* Моделирование региональной системы профессионального образования // Вторая Междунар. конф. «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2007 (10–14 сентября 2007 г., г. Обнинск, Россия): в 2 т. Т. 1. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. С. 274–276.
4. *Борисов А. Н.* Принятие решений на основе нечетких моделей // *Борисов А. Н.*, *Крумберг О. А.*, *Федоров И. П.* Примеры использования. Рига: Зинатне, 1990. 184 с.
5. *Вороновский Г. К.* и др. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. Харьков: Основа, 1997. 212 с.
6. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.

Количественная оценка безопасности функционирования технологического процесса

А. Г. Кулаков[1], П. В. Кузнецов[1], П. Н. Евшин[2]

[1] *Кольский филиал Петрозаводского университете, г. Апатиты*
[2] *ОАО «Апатит», г. Кировск*

1. Область безопасности функционирования технологического процесса

Функционирование любого технологического процесса можно рассматривать как некоторую последовательность смены состояний, полученных в результате действия на процесс как возмущающих, так и управляющих воздействий [1].

Рассмотрим задачу управления технологическим процессом как динамической системой [2].

Пусть

X — конечное множество возможных состояний этой системы;

U — конечное множество возможных значений управляющего параметра.

Состояние системы характеризуется набором технологических параметров $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Изменение значений параметров p_i, $i = \overline{1, n}$, приводит к изменению состояния системы x [2].

Состояния системы и значение управления в момент времени t, $(t = 0, 1, \ldots, t_{\mathrm{K}})$, будем обозначать x_t и u_t соответственно. Функционирование системы, т. е. ее переходы из состояния в состояние, описывается системой уравнений состояния

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, \ldots, t_K. \tag{1}$$