

|                                                                                                                                                        |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| М. Л. Сагидова                                                                                                                                         |            |
| <b>Автоматизированный контроль топологии синтезированных слоев при моделировании ПТК</b>                                                               | <b>376</b> |
| М. П. Сартасов, В. Н. Богатиков, А. В. Маслобоев                                                                                                       |            |
| <b>Автоматизированная система мониторинга и управления приводом вращателя бурового станка СБШ-250 МНА32</b>                                            | <b>384</b> |
| Р. Р. Середя-Эррера, А. А. Рыженко                                                                                                                     |            |
| <b>Структура распределенной системы информационной поддержки образования</b>                                                                           | <b>397</b> |
| А. С. Тивиков                                                                                                                                          |            |
| <b>Анализ устойчивости автоматической системы регулирования основанной на принципе инвариантности к ограничению управляющей переменной</b>             | <b>403</b> |
| А. С. Шемякин                                                                                                                                          |            |
| <b>Модель управления качеством образовательных услуг</b>                                                                                               | <b>411</b> |
| С. Ю. Яковлев, А. А. Рыженко, Н. В. Исакевич                                                                                                           |            |
| <b>Информационная поддержка принятия решений по предупреждению и ликвидации последствий аварий на объектах нефтепереработки</b>                        | <b>417</b> |
| А. О. Селянин, Е. Е. Скатерщикова                                                                                                                      |            |
| <b>Некоторые направления применения информационных технологий для оценки деятельности органов исполнительной власти субъектов Российской Федерации</b> | <b>423</b> |
| С. А. Суспицын                                                                                                                                         |            |
| <b>Взаимодействие институциональных моделей региона в информационном пространстве</b>                                                                  | <b>435</b> |
| О. В. Фридман, А. Я. Фридман                                                                                                                           |            |
| <b>Реализация пространственно-временных запросов в системе моделирования промышленно-природных комплексов</b>                                          | <b>457</b> |
| к. т. н. Л. В. Щеголева, П. О. Шукин                                                                                                                   |            |
| <b>Задачи управления лесными ресурсами с учетом освоения горно-минеральных ресурсов Республики Карелия</b>                                             | <b>469</b> |
| Р. В. Воронов, А. М. Воронова, В. В. Поляков                                                                                                           |            |
| <b>Региональное планирование деятельности предприятий энергоснабжения на основе задач с интервальными переменными</b>                                  | <b>477</b> |

## НАПРАВЛЕНИЕ I

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МАКРОСИСТЕМ

#### Макросистемные модели пространственной экономики

Ю. С. Попков

*Институт системного анализа, Москва*

Рассматриваются пространственно распределенные экономические системы, обменивающиеся ресурсами. Для исследования и прогнозирования развития таких систем предлагается макросистемный подход, представляющий собой комбинацию эволюционной динамики и принципа локальных равновесий. Для описания локальных равновесий развиваются новые модели стационарных состояний парамакросистем, частными случаями которых являются ферми-, эйнштейн- и бозе-макросистемы. С использованием макросистемного подхода построены модели пространственно распределенных экономических систем, обменивающихся товарами и инвестициями и исследованы их стационарные состояния.

#### 1. Введение

Развитие человеческой цивилизации характеризуется возрастанием роли науки, научного знания, которые являются основным источником прогресса. Этот процесс сопровождается количественными и качественными изменениями в самой науке, которые проявляются, прежде всего, в интеграции научных дисциплин. Интеграционные тенденции начали

проявляться в естественных науках. Так, в конце XVIII – начале XIX в. сформировались химическая физика и физическая химия, биологическая физика и биологическая химия как самостоятельные научные дисциплины. Несколько позднее началось взаимопроникновение естественных и гуманитарных наук. Появились социальная физика, финансовая математика, математическая социология и др.

Эти процессы не обошли стороной экономическую науку. Растущая сложность экономических процессов, не вполне прогнозируемое их влияние на социальную среду, и как следствие, снижение мотивации к труду у трудоспособного населения, который является необходимой компонентой любой экономической деятельности, ограниченность природных ресурсов и деградация природной среды обитания человека, объективная невозможность проводить экономические эксперименты — все это потребовало создание виртуальной, модельной экономики, с помощью которой можно было бы изучать (экспериментировать) механизмы реальной экономической деятельности, прогнозировать последствия тех или иных экономических новаций, системно исследовать взаимодействие экономики, социума и природы.

Модельная экономика может формироваться либо на базе некоторых вербальных представлений, либо опираться на определенные количественные понятия. В первом случае, мы имеем политэкономическую конструкцию модельной экономики, а во втором, — букет модельных экономик, которому принадлежат макро- и микро-экономики, эволюционная экономика и др.

Большинство модельных экономик второй группы использует общепринятые экономические переменные, характеризующие состояние реальной экономической системы, и различные вербальные образы реальных экономических механизмов. Моделирование последних в терминах упомянутых экономических переменных позволяет исследовать такие принципиально важные для экономики состояния как равновесие, рост, циклы.

Эти состояния являются результатом таких фундаментальных факторов экономической деятельности как разделение труда и пространства, где она реализуется. Разделение труда при современном технологическом прогрессе достигло весьма высокого уровня, что прежде всего проявляется в огромной и растущей номенклатуре производимых товаров и услуг.

Пространственное распределение экономической деятельности оказывается целесообразным в связи с различным социально-экономическим статусом территорий. Эта неравномерность существовала всегда, но реально использовать ее для экономического роста удалось лишь тогда, когда появились соответствующие средства коммуникаций.

Современная экономика — это *пространственная экономика*. Примером такой экономики может быть национальная экономика как объединение взаимодействующих, пространственно — распределенных региональных экономик. Другой пример — мировая экономическая система, компонентами которой являются взаимодействующие национальные экономики.

Ее изучением занимается *модельная пространственная экономика*, которая представляет собой совокупность некоторого количества взаимодействующих друг с другом модельных экономик, локализованных в границах определенных пространственных единиц. В данной работе модельные пространственные экономики строятся на базе макросистемного подхода, который ориентирован на математическое моделирование пространственного взаимодействия экономических агентов.

Экономическая наука, в отличие от многих естественных наук, оперирует точечными событиями, которые невозможно повторить. Поэтому моделирование тех или иных ситуаций, механизмов и процедур является эффективным инструментом исследования и прогнозирования экономических процессов. Моделями экономики занимаются многие дисциплины в рамках экономической науки. Они формируют свой понятийный аппарат, терминологию, качественные и количественные показатели состояния экономической системы. Важное значение для понимания роли и места основных экономических дисциплин имеет их позиционирование в моделировании экономического развития. Среди многих объектов и целей моделирования выделено исследование возможностей и особенностей пространственного распределения экономической деятельности. В силу неравномерности пространственного распределения экономического статуса возникает возможность использования этого обстоятельства для развития экономики. Инструментом анализа этих проблем является также моделирование.

## 2. Макросистемный подход для моделирования пространственного взаимодействия

Современные тенденции, связанные с возрастанием значения пространственного взаимодействия экономических агентов, потребовали развития и новых инструментов математической экономики (а также ее разделов — макро- и микро-экономик), которые были бы ориентированы на задачи пространственной организации экономической деятельности.

Один из таких инструментов основан на макросистемной феноменологии пространственного экономического взаимодействия. Принципиальным постулатом этого подхода является признание существования

факторов *неопределенности* в той среде, где происходит взаимодействие пространственно распределенных экономических агентов. В результате взаимодействие оказывается недетерминированным, не предсказуемым надежно. Однако, одного признания наличия неопределенности еще недостаточно для изучения недетерминированного пространственного взаимодействия. Необходимо как-то моделировать и неопределенность и ее последствия в виде недетерминированного взаимодействия. Для этого необходимо принимать определенные гипотезы о природе пространственного взаимодействия.

Здесь принята макросистемная модель недетерминированного взаимодействия *большого количества* пространственно распределенных экономических агентов. Ее главная особенность в том, что агенты и система как целое имеют различные типы поведения. Поведение агентов — недетерминировано, а системы — квазидетерминировано. Тем самым, в системе происходит преобразование одного типа поведения (индивидуального) в другой (коллективный). Это может быть, в частности, следствием эффекта «перемешивания» («усреднения»), который возникает, когда вклад каждого агента «бесконечно» мал, а их количество «бесконечно» большое [1].

Наиболее распространенное объяснение этого явления строится на предположение о том, что взаимодействие пространственно распределенных экономических агентов происходит случайно и независимо друг от друга. Причем случайность здесь не означает «бросание монеты». Она — «управляемая» через априорные вероятности, которые могут зависеть от некоторого набора факторов, различной природы.

Для исследования многих системных явлений и процессов в природе и обществе оказывается полезным их двухуровневое представление: уровень элементов и уровень системы как целого. Полезность такого представления связана с трудностями, а иногда и невозможностью исследования целостной системы из-за ее сложности, недостаточностью знаний о природе и механизмах ее функционирования. С другой стороны, элементы (элементарные части) системы по определению проще, и всегда можно выбрать такие элементы, свойства которых могут быть идентифицированы.

По-видимому впервые такой подход был сформулирован в физике, где появились термины «микроуровень», «макроуровень», «макросистема» [2]. В дальнейшем он проник и в другие научные дисциплины, постепенно превращаясь в инструмент теоретического и экспериментального исследования, на основе которого формировалась теория макросистем.

Одна из ее ветвей связана с изучением равновесий (или локальных равновесий) в макросистемах со стохастическим поведением не-

различимых элементов, которые могут оккупировать состояния ферми-, эйнштейн- или больцман-типов (один элемент, любое количество элементов в одном состоянии или «в среднем» малая заполняемость состояний) [1]. Указанная феноменология состояний интерпретируется как статистики Ферми, Эйнштейна или Больцмана.

Однако всегда возникал вопрос, как устроены статистики макросистем, в которых состояния могут быть оккупированы  $2, 3, \dots, l < \infty$  элементами. Эти статистики занимают промежуток между ферми- и эйнштейн-статистиками и называются *парастатистиками* [3]. Важной характеристикой парастатистики является ее *порядок*  $l$  — предельное количество элементов, которые могут оккупировать состояние. В терминах порядка ферми-статистика — это «парастатистика порядка 1», а эйнштейн-статистика — это «парастатистика порядка  $\infty$ ». Макросистемы, в которых механизм формирования микросостояний характеризуется парастатистикой порядка  $l$ , будем называть *парамакросистемами порядка  $l$* .

Рассмотрим парамакросистему, содержащую  $Y$  элементов, которые могут оккупировать состояния в множестве  $S$ . Множество состояний  $S$  состоит из подмножеств  $S_1, \dots, S_m$ , содержащих  $G_1, \dots, G_m$  состояний, с емкостями  $l_1, \dots, l_m$  соответственно. В этом случае порядок парамакросистемы есть вектор  $l = \{l_1, \dots, l_m\}$ . Общее количество состояний в подмножествах  $S_1, \dots, S_m$  равно  $G_1 l_1, \dots, G_m l_m$ .

Макросостояние описывается вектором  $N = \{N_1, \dots, N_m\}$ , где  $N_i$  — количество элементов, оккупирующих подмножество  $S_i$ . Обозначим  $\mathcal{N}$  — множество макросостояний рассматриваемой парамакросистемы.

Элементы и состояния могут быть различимыми и неразличимыми. В результате образуются четыре класса парамакросистем порядка  $l$ : элементы и состояния различимы (*DD*); элементы неразличимы, состояния различимы (*ID*); элементы различимы, состояния неразличимы (*DI*); элементы и состояния неразличимы (*II*).

Заметим, что макросостояния характеризуются только распределением *количеств* элементов по подмножествам  $S_1, \dots, S_m$ . Но эти количества элементов порождаются различными микросостояниями, каждое из которых характеризуется полным описанием элементов и состояний. Множество микросостояний  $\mathbb{M}$  содержит  $Z$  всевозможных микросостояний  $\mu$ , каждое из которых реализуется с определенной вероятностью  $w(\mu)$ . Вероятности  $w(\mu)$  формируются из вероятностей попадания элементов в соответствующие подмножества. В [4] предполагалось, что эти вероятности одинаковые для всех подмножеств.

Здесь мы откажемся от этого предположения. Пусть для каждого подмножества  $S_i$  существует априорная вероятность  $0 < a_i \leq 1$  попадания в какое-либо из  $G_i l_i$  принадлежащих ему состояний, причем все  $a_i$  не рав-

ны друг другу. Поскольку предполагается, что элементы распределяются по состояниям случайно и независимо друг от друга, вероятность того, что в подмножестве  $S_i$ , содержащем  $G_i l_i$  состояний, будет оккупировано  $N_i$  состояний и  $G_i l_i - N_i$  состояний будут свободны, равна  $a_i^{N_i} (1 - a_i)^{G_i l_i - N_i}$ .

Вероятность микросостояния  $\mu$ , в силу того, что подмножества  $S_1, \dots, S_m$  не пересекаются, определяется следующим равенством:

$$w(\mu) = \prod_{i=1}^m a_i^{N_i} (1 - a_i)^{G_i l_i - N_i}. \quad (2.1)$$

Эта функция обладает следующим свойством:

$$\sum_{N_1=0}^{G_1 l_1} \dots \sum_{N_m=0}^{G_m l_m} \prod_{i=1}^m a_i^{N_i} (1 - a_i)^{G_i l_i - N_i} = 1. \quad (2.2)$$

Обозначим

$$\varphi(a_i) = \frac{a_i}{1 - a_i}, \quad A = \prod_{i=1}^m (1 - a_i)^{G_i l_i}. \quad (2.3)$$

Заметим, что функция  $\varphi(a_i)$ , зависящая от априорной вероятности попадания элемента в состояние из подмножества  $S_i$ , принимает значения в интервале  $[0, \infty)$ . Причем для априорных вероятностей  $a_i < 0,5$   $\varphi(a_i, N_i) < 1$ , а для  $a_i \geq 0,5$   $\varphi(a_i, N_i) \geq 1$ .

Представим функцию  $w(\mu)$  в виде:

$$w(\mu) = A \prod_{i=1}^m [\varphi(a_i)]^{N_i}. \quad (2.4)$$

В множестве микросостояний  $\mathbb{M}$  существует подмножество  $\mathbb{M}_N$  микросостояний  $\mu$  с априорными вероятностями  $w(\mu)$ , которые порождают макросостояние  $N$ . Обозначим количество таких микросостояний в подмножестве  $\mathbb{M}_N$  через  $Z(N)$ .

В силу независимости микросостояний вероятность макросостояния  $N \in \mathcal{N}$  определяется следующим равенством:

$$P(N) \triangleq \frac{Z(N)}{\Gamma(Y)} \prod_{i=1}^m [\varphi(a_i)]^{N_i}, \quad (2.5)$$

где нормировочная константа

$$\Gamma(Y) = \sum_{N \in \mathcal{N}} Z(N) \prod_{i=1}^m [\varphi(a_i)]^{N_i}. \quad (2.6)$$

Если  $a_i = a$  для всех подмножеств  $S_i$ , то

$$w(\mu) = a^Y (1 - a)^{(G-Y)} = \text{const}.$$

Здесь  $Y = \sum_{i=1}^m N_i$  — общее количество элементов,  $G = \sum_{i=1}^m G_i l_i$  — общее количество состояний. В этом случае  $\Gamma(Y) = Z$ , и определение вероятности макросостояния  $N$  (2.3) совпадает с определением (2.3) из [4].

Приведем выражения функций распределения вероятностей макросостояний, полученные с использованием аппарата производящих функций [5, 6].

Для  $DD$ -парамакросистем имеем:

$$P^{DD}(N) = \frac{Y!}{\Gamma^{DD}(Y)} \prod_{i=1}^m \frac{DD(N_i, G_i, l_i)}{N_i!} [\varphi(a_i)]^{N_i}. \quad (2.7)$$

В этом равенстве нормировочная константа

$$\Gamma^{DD}(Y) = Y! \sum_{i=1}^i \prod_{i=1}^m \frac{DD(N_i, G_i, l_i)}{N_i!} [\varphi(a_i)]^{N_i}, \quad (2.8)$$

и функция  $DD(N_i, G_i, l_i)$  определяется с помощью экспоненциальной производящей функции:

$$\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{l_i}}{l_i!}\right)^{G_i} = \sum_{N_i} DD(N_i, G_i, l_i) \frac{t^{N_i}}{N_i!}. \quad (2.9)$$

Для  $ID$ -парамакросистем имеем:

$$P^{ID}(N) = \frac{1}{\Gamma^{ID}(Y)} \prod_{i=1}^m ID(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}. \quad (2.10)$$

В этом равенстве нормировочная константа

$$\Gamma^{ID}(Y) = \sum_{N \in \mathcal{N}} \prod_{i=1}^m ID(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}, \quad (2.11)$$

и функция  $ID(N_i, G_i, l_i)$  определяются производящей функцией следующего вида:

$$\left(\sum_{k=0}^{l_i} t^k\right)^{G_i} = \sum_{N_i} ID(N_i, G_i, l_i) t^{N_i}. \quad (2.12)$$

Если порядки  $l_i = l = 1$ , то парамакросистема трансформируется в макросистему, которая изучается в [1].

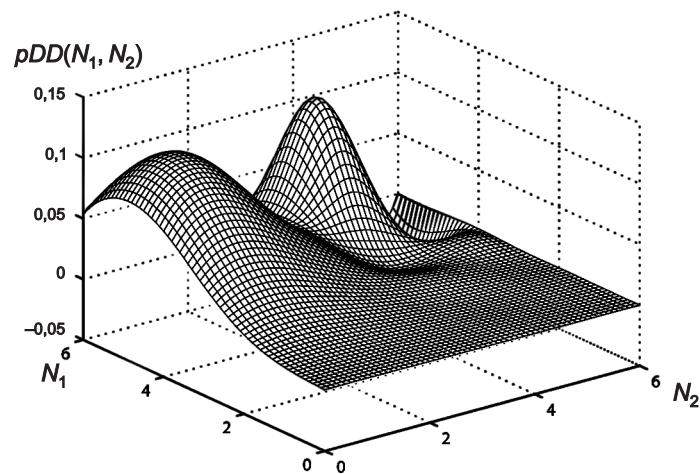


Рис. 2.1

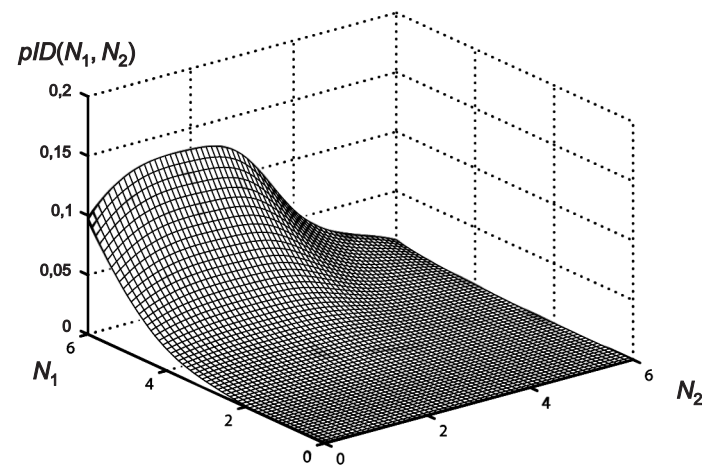


Рис. 2.3

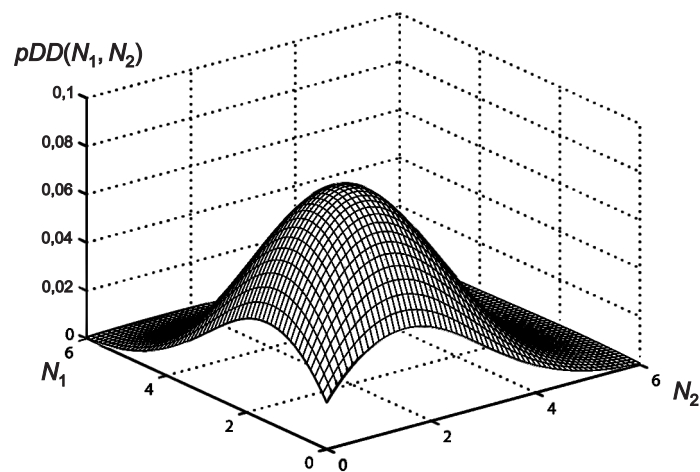


Рис. 2.2

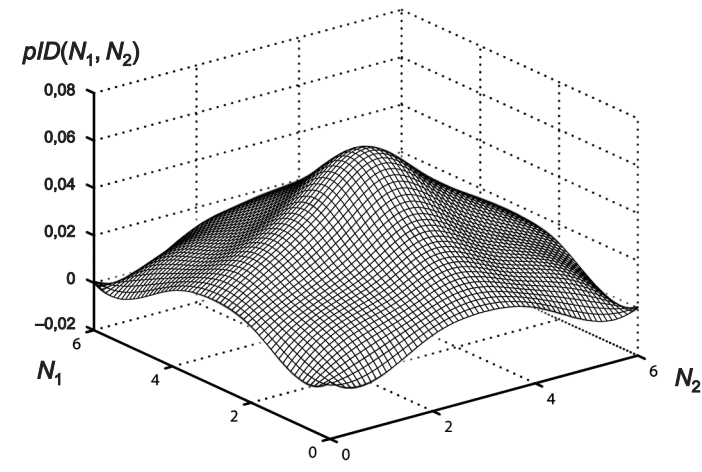


Рис. 2.4

Для  $DI$ -парамакросистем имеем:

$$P^{DI}(N) = \frac{Y!}{\Gamma^{DI}(Y)} \prod_{i=1}^m \frac{1}{N_i!} DI(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}. \quad (2.13)$$

В этом равенстве нормировочная константа

$$\Gamma^{DI}(Y) = Y! \sum_{N \in \mathcal{N}} \prod_{i=1}^m \frac{1}{N_i!} DI(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}, \quad (2.14)$$

и функция  $DI(N_i, G_i, l_i)$  определяются производящей функцией следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{G_i} \frac{1}{k!} \left( t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{l_i}}{l_i!} \right)^k = \sum_{N_i=0}^{\infty} DI(N_i, G_i, l_i) \frac{t^{N_i}}{N_i!}. \quad (2.15)$$

И наконец, для  $II$ -парамакросистемы имеем:

$$P^{II}(N) = \frac{\prod_{i=1}^m II(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}}{\sum_{N \in \mathcal{N}} \prod_{i=1}^m II(N_i, G_i, l_i) [\varphi(a_i)]^{N_i}}. \quad (2.16)$$

Функция  $II(N_i, G_i, l_i)$  определяется производящей функцией следующего вида:

$$\prod_{k=1}^{G_i} \frac{1 - t^{l_i+k}}{1 - t^k} = \sum_{N_i=0}^{\infty} II(N_i, G_i, l_i) t^{N_i}. \quad (2.17)$$

Наличие неравных априорных вероятностей приводит к принципиальным отличиям функций распределения вероятностей макросостояний парамакросистем. На рис. 2.1 показан график функций  $P(N_1, N_2)$  для  $DD$ -парамакросистемы порядка  $l = 3$  с априорными вероятностями  $a_1 = 0,4$ ;  $a_2 = 0,8$ , а на рис. 2.2 — для равных априорных вероятностей. Если во втором случае распределение  $P(N_1, N_2)$  имеет единственный максимум, то в первом — два максимума.

На рис. 2.3 показан график функций  $P(N_1, N_2)$  для  $ID$ -парамакросистемы порядка  $l = 3$  с априорными вероятностями  $a_1 = 0,4$ ;  $a_2 = 0,8$ , а на рис. 2.4 — для равных априорных вероятностей. Здесь ситуация иная: для обоих случаев распределения  $P(N_1, N_2)$  имеют единственный максимум, но форма их существенно отличается.

### 3. Пространственное товарное взаимодействие экономических систем

Одним из важнейших стимулов экономического развития является взаимодействие экономической системы с другими функционально —

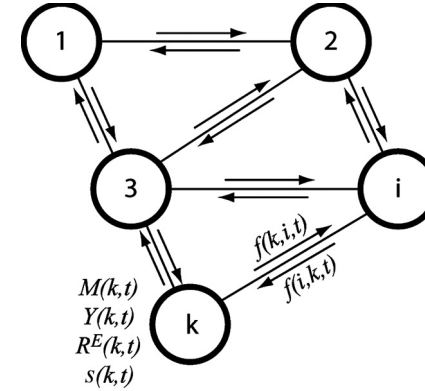


Рис. 3.1

ориентированными системами (политической, экологической, социальной, и др.), которое реализуется в рамках некоторой пространственной организации (региональной, национальной, глобальной).

С позиций общетеоретических концепций взаимодействие систем порождает их новые свойства. Потому целесообразное влияние на процессы взаимодействия систем может обеспечить достижение желаемых их свойств. Признание этих постулатов экономической наукой, подкрепленное изучением тенденций экономического развития, привело к пониманию ключевой роли взаимодействия различных экономик, распределенных по регионам мирового пространства, и взаимосвязей между экономической, социально-политической и природной средой.

Рассмотрим пространственно распределенную систему, состоящей из регионов с собственными экономиками, которые взаимодействуют друг с другом посредством транспортных коммуникаций. Значимость последних в этом взаимодействии неуклонно возрастает, так как региональные экономики все более специализируются и пространственно «размазываются», а технологические связи между ними осуществляются с помощью соответствующих транспортных средств. Поэтому транспортные затраты составляют значительную часть в бюджетном балансе региональных экономик.

На рис. 3.1 представлена структура пространственно-распределенной экономической системы, состоящей из  $A$  регионов, в которых размещены специализированные экономики. Под специализированными будем понимать экономики, производящие один вид товара. Таким образом, в регионе с номером  $k$  размещается экономика, производящая товар  $k$ -го вида. Это предположение несколько не ограничивает результаты анализа

взаимодействия экономик, но упрощает математическое описание соответствующей модели.

Состояние экономики, размещенной в регионе  $k$  и производящей товар вида  $k$ , в момент времени  $t$  характеризуется набором следующих переменных: производственной мощностью  $M(k, t)$ , выпуском  $Y(k, t)$ , потребной рабочей силой  $R^E(k, t)$  и заработной платой  $s(k, t)$ . Производственный процесс в каждой экономике использует продукцию всех остальных экономик. Необходимость в кооперации между всеми экономиками приводит к тому, что между ними образуются товарные потоки  $f(i, k, t)$ , представляющие собой количество товаров  $i$ -ой экономики, необходимое для производственного процесса в  $k$ -ой экономике и, следовательно, перемещенное из региона  $i$  в регион  $k$  в единицу времени. Между выпуском за интервал времени  $h$  и товарными потоками существуют следующие балансовые соотношения:

$$h \sum_{i=1, i \neq k}^A f(k, i, t) = Y(k, t), \quad k = 1, \dots, A. \quad (3.1)$$

Эволюцию экономик будем описывать в терминах производственных мощностей  $M(k, t)$  и выпусков  $Y(k, t)$ , измеряемых в *натуральных единицах*, потребностей в трудовых ресурсах  $R^E(k, t)$ , измеряемых *количеством работающих*, заработной платы  $s(k, t)$ , измеряемой в *единицах стоимости в единицу времени*. Изменение во времени этих переменных происходит достаточно медленно по сравнению с изменением товарных потоков  $f(k, i, t)$ . Поэтому  $M(k, t)$ ,  $Y(k, t)$ ,  $R^E(k, t)$ ,  $s(k, t)$  принимаются *медленными*, а товарные потоки  $f(i, k, t)$  — *быстрыми* переменными.

Рассмотрим группу **медленных переменных**. Ранее уже отмечалось, что эволюция производственной мощности есть результат взаимодействия процессов старения и обновления. Заметим также, что величина производственной мощности есть величина неотрицательная, т. е.  $M(k, t) \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, A$ ;  $t \geq 0$ .

Эволюции производственных мощностей происходит под воздействием процессов старения и обновления. Первый из них неуправляемый и зависит только от величины производственной мощности в своей экономике. При отсутствии второго он приводит к полной деградации производственной мощности, т. е.  $M(k, \infty) = 0$ . Второй, напротив, управляется величиной инвестиций, зависит как от величины производственной мощности, так и от инвестиций для ее обновления. В отсутствии первого приводит к росту производственных мощностей. При конечной величине инвестиций рост ограничен.

Введем понятия потоков выбывающих  $\dot{M}_k^{out}$  и обновленных  $\dot{M}_k^{inp}$  производственных мощностей, которые, в соответствии с описанной выше

феноменологией, зависят от производственной мощности и инвестиций в соответствующей экономике, т. е.

$$\dot{M}_k^{out} = \dot{M}_k^{out}(M(k, t)) \quad \text{и} \quad \dot{M}_k^{inp} = \dot{M}_k^{inp}(M(k, t), I(k, t)),$$

где  $I(k, t)$  — поток инвестиций в  $k$ -ую экономику. Заметим, что потоки выбытия  $\dot{M}_k^{out}$  и обновления  $\dot{M}_k^{inp}$  производственных мощностей имеют размерность [*натуральные ед./ед. времени*], а поток инвестиций  $I(k, t)$  имеет размерность [*ед. стоимости/ед. времени*].

Скорость изменения во времени производственной мощности в  $k$ -ой экономике определяется следующим балансовым соотношением:

$$\frac{dM(k, t)}{dt} = -\dot{M}_k^{out}(M(k, t)) + \dot{M}_k^{inp}(M(k, t), I(k, t)). \quad (3.2)$$

$$\dot{M}_k^{out}(0) = 0, \quad \dot{M}_k^{inp}(0, I(k, t)) = \dot{M}_k^{inp}(M(k, t), 0) = 0.$$

Функции потоков выбытия и обновления обладают очевидными свойствами.

В первом (линейном) приближении можно считать, что поток выбытия пропорционален общему количеству производственных мощностей в данный момент времени  $M(k, t)$ , с коэффициентом пропорциональности  $\mu_k$ , величина которого характеризует интенсивность старения, т. е. он имеет размерность [*1/ед. времени*]. Будем иметь:

$$\dot{M}_k^{out}(M(k, t)) = \mu_k M(k, t). \quad (3.3)$$

Приращение производственных мощностей в единицу времени предполагается линейно зависящими от инвестиций с коэффициентом эффективности  $\sigma_k(M(k, t))$ , причем  $\sigma_k(0) = 0$ . Полагая в первом приближении, что коэффициент эффективности  $\sigma_k(M(k, t))$  линейно связан с величиной производственной мощности, получим:

$$\dot{M}_k^{inp}(M(k, t), I(k, t)) = \sigma_k M(k, t) I(k, t), \quad (3.4)$$

где параметр  $\sigma_k$  имеет размерность [*1/ед. стоимости*].

Подставляя выражения (3.3, 3.4) в (3.2), получим систему уравнений, описывающую динамику производственных мощностей:

$$\frac{dM(k, t)}{dt} = M(k, t)(-\mu_k + \sigma_k I(k, t)), \quad k = 1, \dots, A. \quad (3.5)$$

Заметим, что данная система уравнений имеет неотрицательные решения при положительных начальных значениях производственных мощностей. Из этих уравнений видно, что при отсутствии процесса обновления производственные мощности вместе с экономикой в целом с течением времени

деградируют до нуля. Поэтому инвестиции необходимы для экономического развития. Вопрос лишь заключается в том, являются ли они внешними или внутренними, т.е. осуществляемыми каждой экономикой за счет собственных ресурсов. Будем рассматривать последний случай.

Для определения величины потока инвестиций, рассмотрим бюджетный баланс экономики, т.е. соотношение между потоками доходов и затрат. И то, и другое измеряется в стоимостных единицах, отнесенных к единице времени. Поток дохода  $W(k, t)$   $k$ -ой экономики возникает от продажи собственной продукции на рынке по цене  $p(k, t)$ . Его связь с товарными потоками имеет вид:

$$W(k, t) = p(k, t) \sum_{i=1, i \neq k}^A f(k, i, t). \quad (3.6)$$

Затраты состоят из четырех компонент. Первая из них — поток производственных затрат  $W_P(k, t)$  — связан с необходимостью приобретения продукции других экономик, используемой в производственном процессе данной экономики. Для реализации данного производственного процесса необходимо приобретенную продукцию других экономик доставить в регион  $k$ . Тем самым возникает поток транспортных затрат  $W_T(k, t)$ . Третья компонента — поток непроизводственных затрат  $W_S(k, t)$ , основную часть которых составляет оплата труда занятых в производственном процессе. И наконец, четвертой компонентой являются поток инвестиций  $I(k, t)$ . Если прибыль отсутствует, то поток инвестиций

$$I(k, t) = W(k, t) - W_P(k, t) - W_T(k, t) - W_S(k, t). \quad (3.7)$$

Определим связь каждой компоненты этого баланса с товарными потоками  $f(k, i, t)$  и ценами  $p(k, t)$ . Поток дохода  $k$ -ой экономики определяется равенством (3.6). Поток производственных затрат

$$W_P(k, t) = \sum_{i=1, i \neq k}^A f(i, k, t) p(i, t), \quad (3.8)$$

Транспортные затраты пропорциональны величине транспортной работы, единицей измерения которой являются так называемая «тонна  $\times$  километр». Коэффициент пропорциональности есть цена  $p_T$  этой единицы, т.е. переменная  $p_T$  имеет размерность [ед. стоимости / тонна  $\times$  км]. Обозначая расстояние между  $i$ -ым и  $k$ -ым регионами через  $d(i, k)$  [км], получим следующее выражение для потока транспортных затрат:

$$W_T(k, t) = p_T \sum_{i=1, i \neq k}^A f(i, k, t) d(i, k). \quad (3.9)$$

И наконец, поток непроизводственных затрат можно представить в виде:

$$W_S(k, t) = R^E(k, t) s(k, t). \quad (3.10)$$

Подставляя эти выражения в (3.7), получим выражение для потока инвестиций в следующем виде:

$$I(k, t) = \sum_{i=1, i \neq k}^A [f(k, i, t) p(k, t) - f(i, k, t) \tilde{p}(k, i, t)] - s(k, t) R^E(k, t), \quad (3.11)$$

где

$$\tilde{p}(k, i, t) = p(i, t) - p_T d(k, i). \quad (3.12)$$

Отсюда видно, что поток инвестиций зависит как от рыночного товарообмена, характеризуемого *товарными* потоками  $f(k, i, t)$  между пространственно распределенными экономикой, так и от затрат, связанных с использованием «живого» труда. Здесь будем предполагать, что величины  $s(k, t)$  и  $R^E(k, t)$ , определяющие эти затраты, являются внешними переменными<sup>1</sup>.

Источниками товарных потоков в рассматриваемой системе являются выпуски  $Y(1, t), \dots, Y(A, t)$ , которые, в свою очередь, есть результат «взаимодействия» производственных мощностей  $M(1, t), \dots, M(A, t)$  с рабочей силой  $R^E(1, t), \dots, R^E(A, t)$ . Моделью такого взаимодействия является производственная функция:

$$Y(k, t) = \mathcal{F}(M(k, t), R^E(k, t)). \quad (3.13)$$

Воспользуемся производственной функцией Кобба—Дугласа:

$$Y(k, t) = [M(k, t)]^{\beta_k} [R^E(k, t)]^{(1-\beta_k)}, \quad (3.14)$$

где  $0 < \beta_k \leq 1$  — параметры. Поскольку потребность в труде предполагается заданной, введем внешние переменные

$$\alpha_k(t) = [R^E(k, t)]^{(1-\beta_k)}, \quad k = 1, \dots, A, \quad (3.15)$$

и представим производственную функцию (3.14) в виде:

$$Y(k, t) = \alpha_k(t) [M(k, t)]^{\beta_k}, \quad k = 1, \dots, A. \quad (3.16)$$

Обратимся теперь к **быстрым переменным** — товарным потокам  $f(k, i, t)$ , ( $i, k = 1, \dots, A$ ), которые релаксируют к состоянию локального равновесия за время  $\varepsilon$ , существенно меньшее, чем  $h$ . За время  $\varepsilon$  из региона  $i$  (экономики  $i$ ) перемещается в регион  $k$  (экономику  $k$ )

$$m(i, k, t) = \varepsilon f(i, k, t), \quad k, i = 1, \dots, A, \quad (3.17)$$

<sup>1</sup> Модель может быть развита на случай, когда  $R^E$  и  $s$  являются внутренними переменными.

товаров типа  $i$ . Поскольку существует единица измерения количества товаров и точность, с которой производятся измерения, то можно считать, что  $m(i, k, t)$  — количество порций  $i$ -ого товара для  $k$ -ой экономики.

Формирование потоков  $f(i, k, t)$  происходит посредством обмена (покупки) товаров на рынка. Поскольку за мотивацией каждой сделки следить невозможно и таких сделок (обменов) много, удобно предположить, что они случайные и независимые [1]. Это означает, что элементарное событие «порция  $i$ -ого товара оказалась в  $k$ -ой экономике» ( $L_{ik}$ -событие) является случайным и независимым от таких же событий, но происходящих с другими  $i$ -порциями. Конечно, эти события неравновероятны, так как в рыночной экономической системе имеется значительное количество правил, регламентирующих случайность. Это обстоятельство может быть учтено посредством априорных вероятностей  $\tilde{a}_{ik}$  (неравновероятных) реализации любого из  $L_{ik}$ -событий. Априорные вероятности «привязаны» к паре  $(i, k)$  экономик, и для всех порций  $i$ -ого товара, попавших в  $k$ -ую экономику, они одинаковые. Очевидно, что все порции всех экономик распределяются полностью, т. е. ансамбль случайных событий полный. Поэтому имеет место следующее условие, которому должны удовлетворять априорные вероятности:

$$\sum_{i,k=1}^A \tilde{a}_{ik} = 1. \quad (3.18)$$

Процесс распределения порций товаров по экономикам занимает определенное время, а именно,  $\varepsilon$ . Поэтому удобно представить априорные вероятности в виде:

$$\tilde{a}_{ik} = \varepsilon a_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, A, \quad (3.19)$$

где  $a_{ik}$  — интенсивность априорной вероятности (вероятность  $L_{ik}$ -события, происходящего в единицу времени).

В результате реализации большого количества указанных выше случайных событий возникает ансамбль  $\mathcal{M}$  случайных распределений товаров между всеми парами регионов (экономик), который будем называть *возможным* ансамблем. Элементами этого ансамбля являются матрицы  $M^s(t) = [m^s(i, k, t) | i, k = 1, \dots, A]$ . Поскольку структура товаров предполагается порциальной, то ансамбль  $\mathcal{M}$  содержит конечное число  $S$  «товарных» матриц  $M^s(t)$  ( $s = 1, \dots, S$ ), реализуемых с некоторыми вероятностями  $P(M(t))$ . Иными словами, на ансамбле  $\mathcal{M}$  существует функция распределения вероятностей  $P(M(t))$  товарных матриц  $M(t) \in \mathcal{M}$ .

Рассмотрим как устроена эта функция. Напомним, что  $L_{ik}$ -события независимы. Поэтому компоненты товарной матрицы  $m(i, k, t)$  так же

независимы. Вероятность  $P(M(t))$  есть вероятность реализации матрицы  $M(t)$  с конкретными значениями ее элементов  $m(1, 2, t), \dots, m(A, A - 1)$ . Эта вероятность определяется двухиндексным полиномиальным распределением (см. например [7]):

$$P(M(t)) = \left( \prod_{i=1}^A Y_i(t) \right)! \prod_{i,k=1, i \neq k}^A \frac{\tilde{a}_{ik}^{m(i,k,t)}}{m(i, k, t)!}. \quad (3.20)$$

Эта функция имеет единственный максимум. Практически пользоваться выражением (3.20) не удобно в силу его громоздкости. Поэтому вместо функции распределения вероятностей вводится информационная энтропия  $H(M)$ , которая представляет собой аппроксимацию Стирлинга логарифма функции  $P(M)$ <sup>2</sup>:

$$H(M(t)) = - \sum_{i,k=1, i \neq k}^A m(i, k, t) \ln \frac{m(i, k, t)}{e \tilde{a}_{ik}}. \quad (3.21)$$

Поскольку энтропия  $H(M)$  связана с функцией распределения  $P(M)$  выпуклым, монотонно-возрастающим преобразованием (логарифмическим), аргументы максимумов обеих функций совпадают.

Рассмотрим теперь ограничения, которые сопровождают процесс распределения порций товаров по экономикам. Их можно разделить на две группы: балансовые и транспортные. Смысл балансовых ограничений состоит в том, что каждая экономика предоставляет другим экономикам такое количество своего товара, которое равно ее выпуску (или не превосходит его). Балансовые ограничения можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1, i \neq k}^A m(k, i, t) = Y_\varepsilon(k, t), \quad k = 1, \dots, A. \quad (3.22)$$

В этих равенствах  $Y_\varepsilon(k, t)$  — выпуск  $k$ -ой экономики за время  $\varepsilon$ . Выпуск  $Y(k, t)$  является медленной переменной, и он связан с товарными потоками соотношением (3.1). Следовательно

$$Y_\varepsilon(k, t) = \varepsilon \tilde{h} Y(k, t), \quad \tilde{h} = \frac{1}{h}, \quad k = 1, \dots, A. \quad (3.23)$$

Обратимся к ограничениям транспортного типа. В отличие от балансовых ограничения транспортные расходы носят общесистемный характер. Это означает, что стоимость транспортной работы, связанной с перемещением товаров между всеми регионами (экономикami) ограничена

<sup>2</sup> Подробный вывод формулы для информационной энтропии  $H(M)$  проведен в [1].

некоторой величиной, значение которой принимается равной некоторой доле  $\pi < 1$  от общего системного дохода. Доход  $k$ -экономики за время  $\varepsilon$  равен  $Y_\varepsilon(k, t)p(k, t)$ . Поэтому, учитывая соотношение (3.23), транспортное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k, i \neq k}^A m[(k, i, t)p_T d(k, i)] = \pi \varepsilon \tilde{h} \sum_{k, i \neq k}^A Y(k, t)p(k, t). \quad (3.24)$$

В экономической науке часто используется понятие базового значения экономического параметра, что позволяет оперировать его относительным (к базовому) значением, выражаемым в процентах. Следуя этой традиции, введем базовое расстояние  $d$  и цену  $p(t)$  по следующим правилам:

$$d = \min_{(k, i)} d(k, i), \quad p(t) = \min_i p(i, t). \quad (3.25)$$

Тогда реальные расстояния и цены можно представить в виде:

$$d(k, i) = d\varphi(k, i), \quad p(i, t) = p(t) \psi(i), \quad (3.26)$$

где функции  $\varphi(k, i) > 0$  и  $\psi(i) > 0$ . Заметим, что  $\varphi(k, i) = \varphi(i, k)$ .

Для дальнейшего исследования представляют интерес не абсолютные значения цен продукции и транспортная цена, а их соотношение. Поэтому введем параметр, который может изменяться во времени вместе с базовой ценой на продукцию:

$$\theta(t) = \frac{\pi p(t)}{p_T d}. \quad (3.27)$$

Таким образом, учитывая выражения (3.17), (3.19), (3.21)–(3.23), (3.24), локально-стационарное пространственное распределение товарных потоков  $F^*(t) = [f^*(k, i, t) \mid i, k = 1, \dots, A]$  определяется решением следующей задачей условной максимизации информационной энтропии [1]:

$$H(F(t)) = - \sum_{i, k=1, i \neq k}^A f(k, i, t) \ln \frac{f(k, i, t)}{e a_{ki}} \Rightarrow \max, \quad (3.28)$$

$$\sum_{i=1, i \neq k}^A f(k, i, t) = \tilde{h} Y(k, t), \quad k = 1, \dots, A,$$

$$\sum_{k, i \neq k}^A f(k, i, t) \varphi(k, i) = \tilde{h} \theta(t) C(t),$$

где

$$C(t) = \sum_{k=1}^A Y(k, t) \psi(k). \quad (3.29)$$

Из этих выражений видно, что локально-стационарное распределение товарных потоков зависит от интенсивностей априорных вероятностей  $a_{ik}$ , выпусков  $Y(k, t)$ , цен продаж  $p(k, i, t)$  производимых товаров, и относительной величины удельных транспортных затрат  $\theta(t)$ . Для исследования этих зависимостей воспользуемся условиями оптимальности в терминах функции Лагранжа:

$$L(F(t), \lambda) = H(F(t)) + \sum_{k=1}^A \lambda_k \left( \tilde{h} Y(k, t) - \sum_{i \neq k}^A f(k, i, t) \right) + \lambda_0 \left( \tilde{h} \theta(t) C(t) - \sum_{k, i \neq k}^A f(k, i, t) \varphi(k, i) \right). \quad (3.30)$$

Необходимые условия оптимальности формулируются через условия стационарности функции Лагранжа  $L(F, \lambda)$ . Эти условия имеют вид:

— по прямым переменным

$$\frac{\partial L}{\partial f(i, k, t)} = - \ln \frac{f(i, k, t)}{e a_{ik}} - \lambda_k - \lambda_0 \varphi(k, i) = 0; \quad (3.31)$$

$$k, i = 1, \dots, A; i \neq k;$$

— по двойственным переменным

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \tilde{h} Y(k, t) - \sum_{i \neq k}^A f(k, i, t) = 0, \quad k = 1, \dots, A; \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \tilde{h} \theta(t) C(t) - \sum_{k, i \neq k}^A f(k, i, t) \varphi(k, i) = 0.$$

Исключая из этих уравнений переменные  $\lambda_1, \dots, \lambda_A$ , получим следующие зависимости локально-стационарных товарных потоков от экспоненциальных множителей Лагранжа  $z_0 = e^{\lambda_0} \geq 0$ :

$$f^*(k, i, t) = \tilde{h} a_{ki} Y(k, t) \Phi_{ki}(z_0),$$

$$\Phi_{ki}(z_0) = \frac{z_0^{\varphi(k, i)}}{\sum_{j \neq k}^A a_{kj} z_0^{\varphi(k, j)}} \quad (3.33)$$

$$\Phi_{ki}(z_0) = \Phi_{ik}(z_0), \quad k, i = 1, \dots, A.$$

Подставляя эти выражения в транспортное ограничение (см. последнее равенство в (3.32)), получим уравнение для определения экспоненциального множителя Лагранжа  $z_0$ :

$$\sum_{k,i \neq k}^A a_{ki} Y(k, t) \varphi(k, i) \Phi_{ki}(z_0) - \theta(t) C(t) = 0. \quad (3.34)$$

Итак, локально-стационарные товарные потоки  $f^*(k, i, t)$  (3.33) являются нелинейными функциями выпусков  $Y(1, t), \dots, Y(A, t)$ . С другой стороны, равенства (3.33, 3.34) характеризуют связь между быстрыми (товарными потоками) и медленными (выпусками) переменными.

Теперь можно вернуться к уравнениям динамики производственных мощностей (3.5) и инвестиционным балансам (3.11). Последние определяются локально-стационарными товарными потоками  $f^*(k, i, t)$  ( $k = 1, \dots, A$ ) (3.33). Учитывая введенные выше базовые величины цены продукции  $p(t)$  и расстояния  $d$  (3.25) и параметр  $\theta(t)$  (3.27), выражение для потока инвестиций приобретает вид:

$$\begin{aligned} I(k, t) = p(t) \tilde{h} \sum_{i \neq k}^A \Phi_{ki}(z_0) \times & \left( a_{ki} Y(k, t) \psi(k) - \right. \\ & \left. - a_{ik} Y(i, t) \left[ \psi(i) + \frac{\pi \varphi(k, i)}{\theta(t)} \right] \right) - S(k, t), \\ k = 1, \dots, A, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $S(k, t) = s(k, t) R^E(k, t)$ .

Прделаем еще одно преобразование этого равенства, заменив в его правой части выпуски  $Y(k, t)$  на производственные мощности  $M(k, t)$ , используя производственные функции (3.16). Будем иметь:

$$\begin{aligned} I(k, t) = p(t) \tilde{h} \sum_{i \neq k}^A \Phi_{ki}(z_0) \times & \left( b_{ki}(t) [M(k, t)]^{\beta_k} - \right. \\ & \left. - [M(i, t)]^{\beta_i} \left[ b_{ik}(t) + \frac{\pi g_{ik}(t)}{\theta(t)} \right] \right) - S(k, t), \\ k = 1, \dots, A, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$b_{ki}(t) = \alpha_k(t) a_{ki} \psi(k), \quad g_{ki}(t) = \alpha_k(t) a_{ki} \varphi(k, i). \quad (3.37)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_k(z_0, t) &= \tilde{h} \sum_{i \neq k}^A b_{ki}(t) \Phi_{ki}(z_0); \\ v_{ki}(z_0, t) &= \tilde{h} \Phi_{ki}(z_0) \left( b_{ik}(t) + \frac{\pi g_{ik}(t)}{\theta(t)} \right), \\ k, i &= 1, \dots, A. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Обратимся теперь к уравнению (3.5) динамики производственных мощностей пространственно распределенных экономик. Используя обозначения (3.38) и равенства (3.36), описывающие связь инвестиций с производственными мощностями, получим уравнение динамики производственных мощностей для замкнутой экономической системы в случае, когда инновации осуществляются за счет собственных ресурсов:

$$\frac{dM(t)}{dt} = M(t) \otimes (-\mu + V(z_0, t) M^\beta(t) - S(t)). \quad (3.39)$$

В этом уравнении приняты следующие обозначения: знак  $\otimes$  — покомпонентное умножение; вектор  $M(t) = \{M(1, t), \dots, M(A, t)\}$ ; вектор  $M^\beta = \{[M(1, t)]^{\beta_1}, \dots, [M(A, t)]^{\beta_A}\}$ ; вектор  $S(t) = \{S(1, t), \dots, S(A, t)\}$ ; вектор  $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_A\}$ ; матрица

$$V(z_0, t) = p(t) \begin{pmatrix} v_1(z_0, t) & -\sigma_1 v_{12}(z_0, t) & \dots & -\sigma_1 v_{1,A}(z_0, t) \\ -\sigma_2 v_{21}(z_0, t) & v_2(z_0, t) & \dots & -\sigma_2 v_{2,A}(z_0, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_A v_{A,1}(z_0, t) & \dots & \dots & v_A(z_0, t) \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Элементы матрицы  $V$  зависят от экспоненциального множителя Лагранжа  $z_0$ , который определяется решением уравнения (3.34).

Итак, математическая модель взаимодействия региональных экономик описывается системой дифференциальных уравнений (3.39) и функциональным уравнением (3.34). Такая структура модели не является неожиданной. Она была заложена в двухскоростном представлении процессов взаимодействия экономик: эволюции производственных мощностей и товарообмене между экономиками. Первый процесс предполагался «медленным», и он моделируется системой дифференциальных уравнений (3.39). Второй процесс, напротив, происходит существенно быстрее первого, что является основанием рассматривать его как последовательность локально-стационарных состояний. Идентификация этих состояний как энтропийно-оптимальных (3.28) позволяет представить их семейством

по параметру  $z_0$ , содержательный смысл которого связан с транспортными затратами, а его значение определяется функциональным уравнением (3.34). Важным этапом в исследовании свойств этого семейства и модели в целом является формулирование условий существования и единственности решения уравнения (3.34).

Достаточные условия существования и единственности решения уравнения (3.34) могут быть сформулированы в следующем виде: *уравнение (3.34) имеет единственное неотрицательное решение, если выполняется одно из следующих условий:*

- а)  $\varphi^2(k, i) - \varphi(k, j) \varphi(k, i) > 0$  для всех  $k, i, j = 1, \dots, A$ , и  $Y(k_-) \varphi_- < \theta C < Y(k_+) \varphi_+$ ;
- б)  $\varphi^2(k, i) - \varphi(k, j) \varphi(k, i) < 0$  для всех  $k, i, j = 1, \dots, A$ , и  $Y(k_-) \varphi_- > \theta C > Y(k_+) \varphi_+$ .

Заметим, что при выполнении первого условия функция  $\Psi(z_0)$  монотонно возрастает, а при выполнении второго условия — монотонно убывает.

#### 4. Пространственное инвестиционное взаимодействие экономических систем

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из  $n$ , связанных друг с другом, подсистем. Состояние каждой из них в момент времени  $t$  будем характеризовать доходом  $Y_i(t)$  (выпуском продукции в стоимостных единицах в существующих в данный момент времени ценах) и суммарными инвестициями  $I_i(t)$  (под инвестицией понимается потоковая переменная, т.е. объем инвестиций в единицу времени). Взаимосвязи между подсистемами реализуются через взаимные инвестиции [8]. Это означает, что каждая подсистема  $i$  может инвестировать в свое производство и во все другие подсистемы, и наоборот, все другие подсистемы могут инвестировать в подсистему  $i$ .

Инвестиционные связи между подсистемами являются важным показателем уровня взаимодействия (связности). Для его характеристики введем индекс связности  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ). Индекс связности является системным параметром, т.е. общим для всех подсистем. Если индекс  $\mu = 0$ , то связи между подсистемами отсутствуют; если  $\mu = 1$ , то имеет место случай максимального взаимодействия.

Итак, согласно описанной феноменологии в формировании суммарного потока инвестиций в подсистеме  $i$  участвуют три составляющие:

- поток собственных (из собственного дохода) инвестиций  $N_i(t)$  для увеличения собственного дохода, например, путем обновления собственного производства;

- суммарный поток собственных инвестиций  $E_i(t)$  для увеличения дохода в других подсистемах;
- суммарный поток инвестиций  $W_i(t)$  из других подсистем для увеличения дохода в данной подсистеме.

Их доля в суммарном потоке регулируется индексом связности  $\mu$ . Поэтому будем иметь:

$$I_i(t) = N_i(t) + \mu(W_i(t) - E_i(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Заметим, что доход  $Y_i(t) \geq 0$  и поток инвестиций  $I_i(t) \geq 0$ . Поскольку подсистемы взаимодействуют друг с другом, обмениваясь инвестициями, то удобно такое взаимодействие описывать в терминах *потоков инвестиций* между подсистемами. Обозначим поток инвестиций из подсистемы  $i$  в подсистему  $j$  через  $x_{ij}(t)$ . Тогда будем иметь:

$$E_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij}(t), \quad W_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Рассмотрим механизм формирования инвестиционных потоков. Предположим, что порции инвестиций случайно, независимо друг от друга и с некоторыми априорными вероятностями  $a_{ij}$  распределяются между подсистемами, причем, с вероятностью  $a_{ii}$  порции инвестиций остаются в подсистеме  $i$ . Их количество определяет поток инвестиций  $N_i(t)$ .

Поскольку допустимый для каждой подсистемы поток инвестиций полностью расходуется, то вероятности  $a_{ij}$  удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Предполагается, что распределение инвестиционных порций реализуется достаточно быстро, что позволяет рассматривать его динамику как последовательность локально-стационарных для каждого момента времени  $t$  состояний с энтропией

$$H(X(t)) = - \sum_{i,j=1}^n x_{ij}(t) \ln \frac{x_{ij}(t)}{e a_{ij}} \Rightarrow \max \quad (4.4)$$

при ограничениях на допустимый  $\tilde{I}_i(t)$  для каждой подсистемы поток инвестиций. По определению допустимый поток инвестиций  $\tilde{I}_i(t)$  зависит от дохода в подсистеме  $i$ . Эту зависимость будем характеризовать функциями  $\varphi_i(Y_i(t))$ . Известно, что для функционирования экономической системы необходимы начальные инвестиции, которые не связаны с доходом. На начальных стадиях функционирования системы доход может

отсутствовать. Поэтому функции  $\varphi_i(Y_i(t))$  имеют постоянную составляющую  $\alpha_i$ , и переменную  $\tilde{\varphi}_i(Y_i)$ , зависящую от дохода. Полагая, что функции  $\tilde{\varphi}_i(Y_i)$  достаточно гладкие, представим зависимость допустимых инвестиций от дохода в виде полинома третьей степени:

$$\varphi_i(Y_i(t)) = \alpha_i + \beta_i Y_i(t) + \frac{1}{2!} \gamma_i Y_i^2(t) + \frac{1}{3!} \eta_i Y_i^3(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Здесь  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \eta_i$  — параметры полинома. Будем полагать, что параметры  $\alpha_i \geq 0$   $i = 1, \dots, n$ . Эти параметры характеризуют начальные инвестиционные потенциалы подсистем, которые являются неотрицательными.

Используя функции  $\varphi_i(Y_i(t))$ , соответствующую систему ограничений на инвестиционную активность подсистем можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}(t) = \varphi_i(Y_i(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Решение задачи (4.4, 4.6) с учетом соотношений (4.3) имеет вид:

$$x_{ij}^*(t) = a_{ij} \varphi_i(Y_i(t)), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

Заметим, что потоки  $N_i(t)$  собственных инвестиций в (4.1) будут иметь следующий вид

$$N_i(t) = a_{ii} \varphi_i(Y_i(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Суммарный поток инвестиций (4.1)

$$I_i(t) = A_{ii} \varphi_i(Y_i) + \mu \sum_{j \neq i}^n a_{ji} \varphi_j(Y_j(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

где

$$A_{ii} = a_{ii}(1 + \mu) - \mu. \quad (4.10)$$

Теперь рассмотрим феноменологию изменения дохода, учитывая, что эта переменная неотрицательная. Изменение дохода происходит под влиянием двух противоположно направленных процессов: «амортизация» дохода, связанная с его потреблением (накоплением), и «обновление» путем инвестиций. Для обеспечения неотрицательности дохода удобно его изменимость трактовать в терминах относительной скорости  $V_y(t) = \dot{Y}_i(t)/Y_i(t)$ . В первом приближении относительная скорость  $V_y(y)$  изменения дохода пропорциональна разности скоростей старения, в силу амортизации, и обновления, за счет инвестиций. Полагая, что каждая из перечисленных компонент скорости  $V_y(t)$  в свою очередь также пропорциональна доходу  $Y_i(t)$  с коэффициентом  $s_i$ , и суммарному потоку инвестиций  $I_i(t)$ , можем записать следующее балансовое соотношение:

$$V_y(t) = -s_i Y_i(t) + I_i(t), \quad Y_i(0) > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

Подставляя сюда выражение для суммарных инвестиций из (4.9), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую динамику доходов в пространственно-распределенной экономической системе:

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = Y_i(t)[-s_i Y_i(t) + A_{ii} \varphi_i(Y_i) + \mu \sum_{j \neq i}^n a_{ji} \varphi_j(Y_j(t))], \quad (4.12)$$

$$Y_i(0) > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Линейные инвестиции.** Рассмотрим вначале случай, когда инвестиции линейно связаны с темпом изменения дохода, т. е. в выражении (4.5)  $\gamma_i = \eta_i = 0$ :

$$\varphi_i(Y_i(t)) = \alpha_i + \beta_i Y_i(t). \quad (4.13)$$

Система (4.12) превращается в систему нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \otimes [D(\mu) y(t) + c(\mu)], \quad y(0) > 0. \quad (4.14)$$

Здесь  $\otimes$  означает покомпонатное умножение, вектор

$$y(t) = \{Y_1(t), \dots, Y_n(t)\},$$

вектор  $c$  имеет компоненты

$$c_i(\mu) = a_{ii} \alpha_i + \mu \left( \sum_{j=1}^n a_{ji} \alpha_j - \alpha_i \right), \quad (4.15)$$

матрица  $D$  имеет элементы

$$d_{ij}(\mu) = \begin{cases} \mu a_{ji} \beta_j, & \text{если } j \neq i, \\ -s_i + (a_{ii} + \mu(a_{ii} - 1)) \beta_i, & \text{если } j = i. \end{cases} \quad (4.16)$$

Система (4.14) при положительных начальных условиях (ненулевом начальном доходе) имеет неотрицательные решения, что отвечает содержательному смыслу компонент вектора  $y$  — доходов  $Y_1, \dots, Y_n$ .

#### 4.1. Особые стационарные состояния

Важной проблемой исследования экономической системы является существование стационарных (равновесных) состояний. Каждое из возможных стационарных состояний несет определенную смысловую экономическую нагрузку. Имея это в виду, будем называть эти состояния особыми. Существование особых состояний зависит от степени взаимодействия экономических подсистем, т. е. от индекса связности  $\mu$ .

Особые состояния в рассматриваемой экономической системе можно разделить на три класса.

Первый класс содержит единственное состояние с нулевыми доходами во всех подсистемах. Будем называть его состоянием полного банкротства и обозначать  $\mathbb{N} = \{y^* = 0\}$ . В отличие от состояний других классов, состояние полного банкротства может иметь место при любом значении индекса связности в интервале  $[0, 1]$ .

Второй класс образуют состояния с положительными доходами во всех подсистемах. Будем называть их состояниями полной рентабельности и обозначать  $\mathbb{R}(\mu) = \{y^*(\mu) > 0\}$ .

И наконец, в третий класс входят состояния с положительными доходами в  $i_1, \dots, i_p$  подсистемах. Такие состояния будем называть состояниями  $(i_1, \dots, i_p)$ -рентабельности и обозначать

$$\mathbb{R}^{i_1, \dots, i_p}(\mu) = \{y_{i_1}^*(\mu) > 0, \dots, y_{i_p}^*(\mu) > 0; y_{k_1}^*(\mu) = 0, \dots, y_{k_{(n-p)}}^*(\mu) = 0\},$$

где индексы  $i_1, \dots, i_p$  и  $k_1, \dots, k_{n-p}$  принимают различные целочисленные значения в интервале  $[1, n]$ . Состояния второго и третьего классов зависят от индекса связности, что отмечено в принятых обозначениях.

*Состояния полной рентабельности  $\mathbb{R}(\mu)$*

Рассмотрим систему (4.14) при фиксированном индексе связности  $\mu$ . Предполагается, что матрица  $D(\mu)$  невырожденная, т. е.  $\det D(\mu) \neq 0$ . Тогда существование состояния полной рентабельности  $y^*(\mu)$  этой системы определяется существованием положительного решения следующего линейного уравнения:

$$D(\mu)y = -c(\mu), \quad y \geq 0. \quad (4.17)$$

В этом случае

$$y^*(\mu) = -D^{-1}(\mu) c(\mu) \geq 0. \quad (4.18)$$

В частности, если  $\mu = 0$  (инвестиционные связи между подсистемами отсутствуют)

$$y_i^*(0) = \frac{a_{ii}\alpha_i}{s_i - a_{ii}\beta_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что для положительности  $y^*(0)$  параметр

$$\beta_i < \frac{s_i}{a_{ii}}. \quad (4.20)$$

В случае, когда  $\mu \neq 0$ , условия положительности носят более сложный характер и будут рассмотрены ниже.

*Состояния  $(i_1, \dots, i_p)$ -рентабельности  $\mathbb{R}^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$*

Для определения положительных компонент в состоянии  $\mathbb{R}^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$  обратимся к условию (4.17), адаптируя его к данной задаче. Образует матрицу  $D^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$  путем вычеркивания в матрице  $D(\mu)$  строк и столбцов с номерами  $k_1, \dots, k_{(n-p)}$ . Аналогичную процедуру проделаем с вектором  $c(\mu)$  (вычеркивания элементов с указанными номерами) и получим вектор  $c^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$  с элементами:

$$c_{i_s}^{i_1, \dots, i_p}(\mu) = \alpha_{i_s}(a_{i_s, i_s} - \mu) + \sum_{j=i_1, \dots, i_p} a_{j, i_s} \alpha_j, \quad (4.21)$$

$$i_s \in [1, n], \quad s = [1, p].$$

Положительные компоненты состояния  $\mathbb{R}^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$  определяются следующим выражением:

$$y^{(i_1, \dots, i_p)*} = -[D^{i_1, \dots, i_p}(\mu)]^{-1} c^{i_1, \dots, i_p}(\mu) > 0. \quad (4.22)$$

Здесь  $y^{(i_1, \dots, i_p)*}$  — вектор с компонентами  $y_{i_1}^*(\mu), \dots, y_{i_p}^*(\mu)$ .

Из выражений (4.17, 4.22) следует, что существование соответствующих состояний связано с существованием положительных решений систем линейных уравнений.

Для выяснения зависимости состояний с полной рентабельностью от индекса связности  $\mu$  обратимся к уравнению (4.17). Учитывая (4.15, 4.16), представим его в виде

$$(D_0 + \mu D_1)y = -(c(0) + \mu c(1)), \quad (4.23)$$

где матрицы

$$D_0 = \text{diag} [-s_i + a_{ii}\beta_i] \quad (4.24)$$

и

$$D_1 = \begin{pmatrix} (a_{11} - 1)\beta_1 & a_{12}\beta_1 & \dots & a_{1n}\beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\beta_n & \dots & \dots & (a_{nn} - 1)\beta_n \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

и векторы с координатами

$$c(0)_i = a_{ii}\alpha_i \quad (4.26)$$

и

$$c(1)_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j - \alpha_i. \quad (4.27)$$

Поскольку матрица  $D(\mu)$  предполагается невырожденной для  $\mu$  из интервала  $[0, 1]$ , то решение уравнения (4.23) будем искать в виде ряда:

$$y^*(\mu) = y^0 + \mu y^1 + \dots \quad (4.28)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.23) и приравнявая члены с одинаковыми степенями  $\mu$ , получим следующие выражения для определения соответствующих приближений решения (4.28):

$$y^0 = -D_0^{-1}c(0), \quad (4.29)$$

$$y^1 = -D_0^{-1}(c(1) + D_1 y^0). \quad (4.30)$$

Из равенств (4.29, 4.20) следует, что нулевое приближение  $y^0 > 0$ . Что касается первого приближения  $y^1$ , то его положительность требует специального исследования.

Аналогичные соотношения могут быть выписаны для состояний  $(i_1, \dots, i_p)$ -рентабельности в терминах равенства (4.22).

#### 4.2. Устойчивость особых стационарных состояний

Вернемся к нелинейному уравнению (4.14), для которого существует особое стационарное состояние  $y^*(\mu)$ , одного из указанных выше типов. Однако известно, что существование не означает, что состояние  $y^*(\mu)$  реализуется в системе взаимодействующих экономических подсистем. Реализуемость состояния  $y^*(\mu)$  возможна, если это состояние устойчиво.

Для исследования его устойчивости введем отклонение  $x(t)$  от него и рассмотрим его поведение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x(t) = y(t) - y^*(\mu). \quad (4.31)$$

*Устойчивость состояний полного банкротства*

В случае состояния полного банкротства  $\mathbb{N}$ , которое не зависит от индекса связности, отклонение  $x(t) = y(t)$ . Поэтому уравнение для отклонения  $x(t)$  от состояния полного банкротства совпадает с уравнением (4.14):

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(\mu)x(t) + [x(t) \otimes D(\mu)]x(t), \quad (4.32)$$

где матрица

$$C(\mu) = \text{diag}[c_i(\mu)]. \quad (4.33)$$

Введем матрицу импульсных функций:

$$W_\tau^t(\mu) = e^{C(\mu)(t-\tau)}. \quad (4.34)$$

Поскольку матрица  $C(\mu)$  диагональная с постоянными элементами, имеет место следующая оценка нормы \*матрицанта:

$$\|e^{C(\mu)(t-\tau)}\| \leq e^{(c_{\max}(\mu)(t-\tau))}, \quad (4.35)$$

где

$$c_{\max}(\mu) = \max_i c_i(\mu) = \max_i \left( a_{ii}\alpha_i + \mu \left( \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j - \alpha_i \right) \right). \quad (4.36)$$

Знаком  $\|\bullet\|$  обозначена евклидова норма  $(\sum_i (\bullet)_i^2)^{1/2}$ .

Перейдем к интегральному уравнению, эквивалентному (4.32):

$$x(t) = W_0^t(\mu)x(0) + \int_0^t W_\tau^t(\mu)(x(\tau) \otimes D(\mu)x(\tau))d\tau. \quad (4.37)$$

Имеет место следующая оценка с учетом (4.35):

$$|x(t)| = u(t) \leq v(t), \quad (4.38)$$

где

$$v(t) = e^{c_{\max}(\mu)t}u(0) + \int_0^t e^{c_{\max}(\mu)(t-\tau)}\rho(\mu)u^2(\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

где  $|D(\mu)| = \rho(\mu)$ .

Дифференцируя последнее равенство нетрудно обнаружить, что неотрицательная переменная  $v(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{v}(t) = c_{\max}(\mu)v(t) + \rho(\mu)v^2(t), \quad v(0) = |x(0)| > 0. \quad (4.40)$$

Нас интересует случай, когда  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ . Для этого правая часть последнего уравнения должна быть отрицательной. Нетрудно обнаружить, что это возможно, если начальные отклонения  $v(0)$  принадлежат интервалу  $[0, -c_{\max}(\mu)/\rho(\mu)]$ . Отсюда следует, что  $c_{\max}(\mu) < 0$ . Поскольку  $c_{\max}(\mu)$  — максимальный элемент вектора  $c(\mu)$ , то последнее неравенство означает, что

$$c_i(\mu) = \alpha_{ii}(a_{ii} - \mu) + \mu \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.41)$$

Рассмотрим интервал  $[0, \mu^* < 1]$  такой, что для всех  $\mu \in [0, \mu^*]$  хотя бы для одного элемента вектора  $c(\mu)$  с номером  $i_0$  выполняется неравенство:  $a_{i_0, i_0} - \mu > 0$ . Тогда неравенство с номером  $i_0$  в системе (4.41) будет иметь все положительные коэффициенты при переменных  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поскольку  $\alpha_i > 0$ , то не существует положительного вектора  $\alpha$ , для которого  $c_{i_0} < 0$ .

Рассмотрим теперь интервал  $[\mu^*, 1]$ . Поскольку  $a_{ij}$  — вероятности, то может оказаться, что, начиная с некоторого  $\mu \in [\mu^*, 1]$ , разность  $a_{ii} - \mu < 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Учитывая это, представим неравенства (4.41) и следующем виде

$$\alpha_i > \sum_{j=1}^n b_{ji}(\mu) \alpha_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.42)$$

где

$$b_{ji}(\mu) = \gamma_i a_{ji} > 0, \quad (4.43)$$

$$\gamma_i = \frac{\mu}{\mu - a_{ii}} > 1. \quad (4.44)$$

Сложим неравенства в (4.42):

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji}(\mu) \alpha_j = A. \quad (4.45)$$

Меняя порядок суммирования, получим:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ji} \right). \quad (4.46)$$

Выражения в скобках представляют собой средние значения набора чисел  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , больших 1. Поэтому

$$\omega_j = \sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ji} > 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Итак, в левой части неравенства (4.45) коэффициенты при переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  равны 1, а в правой — больше 1. Очевидно, что такое неравенство нельзя удовлетворить положительными значениями переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Таким образом, обнаружено важное свойство взаимодействующих экономических подсистем: *стационарное состояние полного банкротства — неустойчиво.*

*Устойчивость стационарных состояний полной*  
*и  $(i_1, \dots, i_p)$ -рентабельностью*

Подставим выражение (4.31) в исходное уравнение (4.14). Получим следующее дифференциальное уравнение относительно отклонения  $x(t)$  от особого стационарного состояния класса  $\mathbb{R}(\mu)$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = R(\mu)x(t) + [x(t) \otimes D(\mu)]x(t), \quad (4.48)$$

где матрица

$$R(\mu) = y^*(\mu) \otimes D(\mu). \quad (4.49)$$

Заметим, что для состояний  $((i_1, \dots, i_p))$ -рентабельности имеет место то же уравнение, но с матрицами  $R^{i_1, \dots, i_p}(\mu)$  и  $D^{i_1, \dots, i_p}$ , образованными вычеркиванием  $i_1, \dots, i_p$ -ых строк и столбцов у матриц  $R(\mu)$  и  $D(\mu)$  соответственно.

Рассмотрим вначале случай, когда в экономической системе связи между подсистемами отсутствуют, т. е. индекс связности  $\mu = 0$ . В этом случае, согласно (4.15), (4.16), (4.48), имеем:

$$r_{ii} = -a_{ii}\alpha_i < 0, \quad r_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.50)$$

$$d_{ii} = -s_i + a_{ii}\beta_i < 0, \quad d_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.51)$$

Последние неравенства имеют место в силу (4.20).

Система уравнений (4.48) трансформируется в систему независимых уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_{ii}x_i(t) + d_{ii}x_i^2(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.52)$$

Правая часть этого уравнения — квадратичная парабола с максимумом в точке  $-r_{ii}/2d_{ii}$ . В интервале  $-r_{ii}/d_{ii} \leq x_i(0) \leq 0$  правая часть уравнений (4.52) положительная, а вне этого интервала отрицательная. Так, если начальные отклонения  $x_i(0) \geq 0$ , то правая часть отрицательная и  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ . Если начальные отклонения  $-r_{ii}/d_{ii} \leq x_i(0) \leq 0$ , то правая часть положительная, и траектории  $x_i(t)$  при  $t > 0$  возрастают, пока не станут равными нулю. Если начальные отклонения  $x_i(0) < -r_{ii}/d_{ii}$ , траектории будут стремиться к  $-\infty$ .

Таким образом, *при начальных отклонениях  $x_i(0) \in [-r_{ii}/d_{ii}, +\infty)$  отклонение  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , и следовательно, состояние  $y^*(0) > 0$  полной рентабельности для системы (4.14), состоящей из не взаимодействующих экономических подсистем, устойчиво при начальных отклонениях в указанном выше интервале.*

Более интересным является случай, когда экономические подсистемы обмениваются инвестициями, т. е. индекс связности  $\mu \neq 0$ . Вернемся к уравнению (4.48) для фиксированного значения  $\mu$ .

Пусть в этом уравнении матрица  $R(\mu)$  — гурвицева, т. е.

$$\max \operatorname{Re} \lambda_i = -\lambda < 0, \quad (4.53)$$

и матрица  $D(\mu)$  имеет конечную норму  $\rho(\mu)$ .

Обозначим

$$W_s^t(R(\mu)) = e^{R(\mu)(t-s)} \quad (4.54)$$

— матрицант линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = R(\mu)x(t).$$

Снова воспользуемся оценкой нормы матрицанта:

$$|W_s^t(R(\mu))| \leq e^{-\lambda(t-s)}. \quad (4.55)$$

Используя матрицант (4.54), перейдем к интегральному уравнению, эквивалентному дифференциальному уравнению (4.48):

$$x(t) = W_0^t(R(\mu))x(0) + \int_0^t W_s^t(R(\mu))x(s) \otimes D(\mu)x(s)ds. \quad (4.56)$$

Справедливо следующая оценка:

$$|x(t)| = u(t) \leq v(t) = e^{-\lambda t}u(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\rho(\mu)u^2(s)ds. \quad (4.57)$$

Заметим, что переменные  $u(t)$  и  $v(t)$  неотрицательные. Продифференцируем равенство, находящееся в правой части неравенства (4.57):

$$\dot{v}(t) = -\lambda e^{-\lambda t}u(0) + \rho(\mu)u^2(t) + (-\lambda) \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\rho(\mu)u^2(s)ds. \quad (4.58)$$

Из сравнения (4.57) и (4.58) видно, что  $v(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{v}(t) = -\lambda v(t) + \rho(\mu)u^2(t). \quad (4.59)$$

В силу (4.57) имеем дифференциальное неравенство:

$$\dot{v}(t) \leq -\lambda v(t) + \rho(\mu)v^2(t). \quad (4.60)$$

Согласно теоремы о дифференциальных неравенствах [9]  $u(t) \leq \tilde{v}(t)$ , где  $\tilde{v}(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = -\lambda\tilde{v}(t) + \rho(\mu)\tilde{v}^2(t), \tilde{v}(0) = u(0) = |x(0)| > 0. \quad (4.61)$$

Правая часть этого уравнения отрицательная, если  $\tilde{v}(0) \in [0, \rho(\mu)/\lambda]$ . Для любых начальных отклонений из этого интервала  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, если матрица  $R(\mu)$  в уравнении (4.48) гурвицева и

$$\max \operatorname{Re} \lambda_i = -\lambda < 0, \quad (4.62)$$

состояние полной рентабельности  $y^* > 0$  асимптотически устойчиво в области отклонений от него

$$\operatorname{Dom}(\mathbb{R}, \mu) = [0, \rho(\mu)/\lambda]. \quad (4.63)$$

## 5. Заключение

Пространственное взаимодействие экономических систем является определяющим фактором их развития. Поэтому прогнозирование процессов пространственно-временной эволюции экономик с помощью математических моделей приобретает важное значение. Макросистемный подход, представляющий собой комбинацию эволюционной динамики с принципом локальных равновесий, оказывается адекватной методологией для построения и исследования пространственно распределенных экономических систем.

## Литература

1. Попков Ю. С. Теория макросистем. М.: URSS, 1999.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
3. Ohnuki Y., Kamefuchi S. Quantum Field and Parastatistics. Berlin, Heidelberg, N. Y.: University of Tokyo Press, 1982.
4. Дорофеев Д. Г., Зон Б. А., Попков Ю. С. Вероятностные характеристики парамакросистем // АиТ. 2008. № 2. С. 3–14.
5. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
8. Риш Т. Nonlinear Economic Dynamic. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
9. Беккенбах Э., Белман Р. Неравенства. М.: КомКнига/URSS, 2007.