Треблер А. А.

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

О КЛАССИФИКАЦИИ АТТРАКТАТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ ОДУ

В данной статье рассматриваются несколько нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенных в работе Г. Чена, где он предпринял попытку классифицировать все множество хаотических систем, основываясь на известных теоремах Л. П. Шильникова. Для исследуемых систем проводится полный анализ соответствующих особых точек на всем множестве изменения значений параметров. В частности, определяются типы особых точек, границы областей устойчивости, а также наличествующие локальные бифуркации. С помощью численных методов проводится рассмотрение сценариев перехода к хаосу в этих системах при изменении одного бифуркационного параметра. Целью исследования является подтверждение описанного в работах Н. А. Магницкого и С. В. Сидорова единого для всех диссипативных систем ОДУ механизма перехода к хаосу. Определяется и то место в процессе образования хаотической динамики, которое занимают сингулярные аттракторы, предложенные Г. Ченом. В результате анализа одной из систем с использованием сечений Пуанкаре показывается отсутствие в ней какого-либо хаотического поведения.

1. Введение

Начиная с середины 60-х годов XX века, когда была найдена первая система дифференциальных уравнений с хаотических поведением, многие ученые во всем мире пытаются проанализировать, описать, классифицировать, обобщить все необозримое множество систем, в которых обнаруживается хаотическая динамика.

Так, в работе видного математика Г. Чена [?] сделана попытка поделить все хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений на три категории, положив в основание классификации теоремы Шильникова, справедливые для трехмерных систем ОДУ, а также выделив четвертую категорию «другое». В теоремах Шильникова утверждается наличие нерегулярной динамики в окрестностях петель сепаратрис седло-фокусов, а также гетероклинических контуров, соединяющих седло-фокусы (подробнее об этом см.: [?, ?]). В классификацию, основанную на этих теоремах, входят следующие типы хаоса: хаос гомоклинических траекторий типа Шильникова, хаос гетероклинических траекторий типа Шильникова, а также хаос смешанного типа, как гомо-, так и гетероклинических траекторий типа Шильникова (см.: [?, разд. 1–2]).

Ход рассуждений и выводы статьи [?], как нам представляется, не учитывают последние результаты, достигнутые в лаборатории хаотических динамических систем Института системного анализа РАН под руководством Н. А. Магницкого. В исследованиях лаборатории было показано, что ни наличие гомо- или гетероклинических контуров седло-фокусов, ни наличие самих седло-фокусов или особых точек, вообще, не является необходимым условием существования хаотической динамики в нелинейных диссипативных системах ОДУ. Был найден единый сценарий перехода к хаосу в таких системах дифференциальных уравнений через каскады бифуркаций — субгармонический (Фейгенбаума—Шарковского), гомоклинический и гетероклинический (Магницкого). Данные результаты подтверждены анализом многочисленных систем, как имеющих отношение к различным областям естествознания (например, системы Лоренца, Реслера, Чуа, Валлиса, Рикитаки и т. д.), так и к совершенно произвольным (см. об этом: [?, ?]).

В настоящей работе анализируются некоторые системы из статьи Г. Чена [?] с целью подтверждения наличия в них хаоса (с помощью построения сечений Пуанкаре) и, следовательно, механизма перехода к хаосу Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого (ФШМ). Кроме того определяются места аттракторов, называемых в исследовании [?] «особенными», в каскадах бифуркаций с целью наложения на них ярлыка «типичный». Анализ процесса перехода к хаосу проводится нами в соответствии с численными алгоритмами, представленными в работе Э. Хайрера, С. Нерсетта и Г. Ваннера [?]; его предваряет аналитическое изучение особых точек систем, определения их типа и устойчивости, а также моментов наступления локальных бифуркаций.

2. Введение систем ОДУ, рассмотренных в статье Г. Чена

2.1 Система Рюклиджа

Первой из рассматриваемых нами систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенных в работе Г. Чена, будет система Рюклиджа [?, (17)]:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - ly - yz, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = -z + y^2. \end{cases} \tag{1}$$

2.1.1 Аналитическое исследование

Найдем область диссипативности системы:

$$\mathsf{div}\vec{F}\,(x,y,z)=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=a-1,$$

поэтому система (1) диссипативна ($\mathsf{div}\vec{F}<0$) при значении параметра $a<1$. Далее определим положение особых точек системы (1), т. е. точек фазового пространства, в которых вектор правой части обращается в 0:

$$\begin{cases} ax-ly-yz=0,\\ x=0,\\ -z+y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0,\\ y\,(z+l)=0,\\ y^2-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=0,\\ z=0,\end{cases}\\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{-l},\\ z=-l.\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\tag{2}$$

Таким образом, согласно (2) получаем, что при $l>0$ система имеет одну особую точку: $O_1\,(0,0,0)$; а при $l<0$ еще две особых точки: $O_2\left(0,\sqrt{-l},-l\right)$, $O_3\left(0,-\sqrt{-l},-l\right)$.

Заметим, что преобразование $(x,y,z)\to(-x,-y,z)$ не меняет вид системы (1), а значит выводы, справедливые для особой точки O_2, также верны и для точки O_3 и наоборот, а система симметрична относительно оси z.

Определим, при каких значениях параметров a и l особые точки будут устойчивы. Для этого выпишем характеристический многочлен матрицы Якоби, матрицы линеаризации правой части системы (1) для каждой особой точки:

$$J_F=\begin{pmatrix} a & -l-z & -y\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2y & -1\end{pmatrix}.\tag{3}$$

Используя (3), имеем для точки O_1:

$$J_F\,(O_1)=\begin{pmatrix} a & -l & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\tag{4}$$

$$|J-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & -l & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left(-a\lambda+\lambda^2+l\right).$$

Таким образом, характеристический многочлен матрицы (4) имеет вид:

$$-\lambda^3 + (a-1)\,\lambda^2 + (a-l)\,\lambda - l. \tag{5}$$

Из приведенных выкладок ясно, что собственными значениями матрицы Якоби (4) являются: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4l}}{2}$. Последние два числа будут вещественными при $a \in \left(-\infty, -2\sqrt{l}\right] \cup \left[2\sqrt{l}, +\infty\right)$ и комплексно-сопряженными — при $a \in \left(-2\sqrt{l}, 2\sqrt{l}\right)$.

Устойчивость особой точки характеризуется устойчивостью соответствующего ей характеристического многочлена. Пользуясь критерием Рауса—Гурвица [?, гл. XVI, §6], исследуем многочлен (5) на устойчивость:

$$\begin{cases} -\Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ -\Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-1) > 0, \\ \begin{vmatrix} a-1 & -l \\ -1 & a-l \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} a-1 & -l & 0 \\ -1 & a-l & 0 \\ 0 & a-1 & -l \end{vmatrix} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ (a-1)\,(a-l) > l, \\ l > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ l > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Получили (6) — условия устойчивости особой точки O_1. Таким образом, O_1 — устойчивый узел при $a \in \left(-\infty, -2\sqrt{l}\right]$ (т. к. $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}_-$); устойчивый фокус — при $a \in \left(-2\sqrt{l}, 0\right)$ (т. к. $\lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\{\lambda_{2,3}\} < 0$).

Поскольку при $a = 0$ ($l > 0$) два характеристических числа матрицы линеаризации в точке O_1 пересекают при движении слева направо мнимую ось, то происходит суперкритическая бифуркация Андронова—Хопфа, когда устойчивый фокус становится неустойчивым, и вокруг него рождается устойчивый предельный цикл.

Когда параметр l переходит значение $l = 0$, узел O_1 становится неустойчивым седло-узлом ($\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$ или наоборот $\lambda_3 < 0$, $\lambda_2 > 0$), и вследствие надкритической бифуркации типа вилки рождаются еще две особые точки (исследование их типа см. ниже).

Аналогично для особой точки O_2 матрица Якоби примет вид:

$$J_F\left(O_2\right)=\begin{pmatrix} a & 0 & -\sqrt{-l} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{-l} & -1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

характеристический многочлен матрицы (7) имеет вид:

$$f\left(\lambda\right)=-\lambda^3+\left(a-1\right)\lambda^2+a\lambda+2l; \tag{8}$$

условия устойчивости особой точки O_2 принимают вид:

$$\begin{cases} a<0, \\ l\in\left(\dfrac{a\left(1-a\right)}{2},0\right). \end{cases} \tag{9}$$

Для определения типа особой точки O_2 найдем число вещественных и комплексных корней характеристического многочлена (8) в зависимости от параметров a и l. Для этого воспользуемся теоремой Штурма о числе вещественных корней алгебраического многочлена [**?**, гл. 9, §40]. Выпишем систему Штурма для функции $-f\left(\lambda\right)=\lambda^3+\left(1-a\right)\lambda^2-a\lambda-2l$:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\right)&=\lambda^3-a\lambda^2+\left(1-a\right)\lambda-2l, \\ f_1\left(\lambda\right)&=3\lambda^2+21-a\lambda-a, \\ f_2\left(\lambda\right)&=p_1\left(a\right)\lambda+2l-p_2\left(a\right), \\ f_3\left(\lambda\right)&=a+\big(2l-p_2\left(a\right)\big)\left(\frac{2\big(1-a\big)p_1\left(a\right)-3\big(2l-p_2\left(a\right)\big)}{p_1^2\left(a\right)}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $p_1\left(a\right)=\frac{2}{9}\left(a^2+a+1\right)$, $p_2\left(a\right)=\frac{1}{9}a\left(1-a\right)$.

Согласно теореме Штурма, число вещественных корней определяется разностью между числом перемен знаков многочленов из системы Штурма в $-\infty$ и $+\infty$.

Сначала рассмотрим особый случай:

$$f_3\left(\lambda\right)=Q\left(l,a\right)=a+\big(2l-p_2\left(a\right)\big)\left(\frac{2\big(1-a\big)p_1\left(a\right)-3\big(2l-p_2\left(a\right)\big)}{p_1^2\left(a\right)}\right)=0. \tag{11}$$

С целью выяснения ограничений на параметры a и l, при которых справедливо уравнение (11), а также для хода дальнейших рассуждений, будем рассматривать функцию $Q\left(l,a\right)$ как функцию переменной l, зависящую от параметра a. Распишем функцию $Q\left(l,a\right)$:

$$Q\left(l,a\right)=\frac{-12l^2+\left(12p_2+4\left(1-a\right)p_1\right)l+ap_1^2+2\left(a-1\right)p_1p_2-3p_2^2}{p_1^2}.$$

Поскольку знаменатель $p_1^2\left(a\right)>0$ при всех a, далее нас будет интересовать числитель

$$R\left(l\right)=-12l^2+\left(12p_2+4\left(1-a\right)p_1\right)l+ap_1^2+2\left(a-1\right)p_1p_2-3p_2^2.$$

Уравнение

$$R\left(l\right)=0 \tag{12}$$

является квадратным относительно l. Дискриминант для данного уравнения будет иметь вид: $D=16p_1^2\left(a^2+a+1\right)$. Или в развернутом виде:

$$D=\frac{64}{81}\left(a^2+a+1\right)^3. \tag{13}$$

Очевидно, дискриминант (13) положителен при любых значениях параметра a.

Уравнение (12) имеет корни:

$$l_{1,2}=\frac{\left(1-a\right)\left(2a^2+5a+2\right)\pm2\sqrt{\left(a^2+a+1\right)^3}}{54},$$

а, следовательно, получены условия на равенство $Q\left(l,a\right)=0$:

$$\left[\begin{array}{l} l=l_1, \\ l=l_2. \end{array}\right. \tag{14}$$

В этом случае характеристический многочлен (8) имеет два вещественных корня, один из них — кратности два.

Далее составим полную таблицу для системы Штурма (10) в зависимости от знака функции $Q\left(l,a\right)$ (Таблица 1).

	$f\left(\lambda\right)$	$f_1\left(\lambda\right)$	$f_2\left(\lambda\right)$	$f_3\left(\lambda\right)$	Перемены знаков
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$ $\left(Q\left(l,a\right)>0\right)$ | $-$ $\left(Q\left(l,a\right)<0\right)$	3 | 2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$ $\left(Q\left(l,a\right)>0\right)$ | $-$ $\left(Q\left(l,a\right)<0\right)$	0 | 1

Таблица 1: Число перемен знаков системы Штурма (10) на $-\infty$ и $+\infty$.

В случае, когда $Q(l, a) > 0$, система Штурма (10) при переходе λ от $-\infty$ к $+\infty$ терпит $3 - 0 = 3$ перемены знаков, и, следовательно, многочлен (8) имеет три различных вещественных корня.

Таким образом, имеем для характеристического многочлена (8):

1. Три вещественных корня при:
$$l \in (l_2, l_1)\,. \tag{15}$$

2. В остальных случаях — один вещественный и пара комплексно-сопряженных корней.

Итого, суммируя условия (14) и (15), получим ограничения (16) на параметры a и l, при которых особая точка O_2 является узлом. При всех других значениях параметров особая точка — фокус. Условия устойчивости точки O_2 определяются неравенствами (9).

$$l \in \left[\frac{(1-a)\left(2a^2+5a+2\right) - 2\sqrt{\left(a^2+a+1\right)^3}}{54}, \frac{(1-a)\left(2a^2+5a+2\right) + 2\sqrt{\left(a^2+a+1\right)^3}}{54}\right] \tag{16}$$

Далее определим вид собственных значений матрицы Якоби (7) при значении параметра $l = \frac{a(1-a)}{2}$, когда особая точка O_2 теряет устойчивость. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + (1-a)\lambda - a(1-a) = (\lambda - a)\left(\lambda^2 + 1 - a\right) = 0. \tag{17}$$

При $a < 0$ уравнение (17) имеет один вещественный корень $\lambda_1 = a$ и два чисто мнимых $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{1-a}$, а особая точка O_2 является «бывшим» устойчивым фокусом.

Итак, мы получили, что при параметре l, переходящем значение $l = \frac{a(1-a)}{2}$ $(a < 0)$, характеристический многочлен имеет один вещественный λ_1 и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{2,3}$, вещественные части которых пересекают мнимую ось слева направо, и имеет место суперкритическая бифуркация Андронова—Хопфа, в результате которой особая точка теряет устойчивость (становится седло-фокусом), порождая устойчивый предельный цикл.

Ввиду симметрии, все выводы верны как для особой точки O_2, так и для особой точки O_3.

2.1.2 Численное исследование

Исследуем сценарий перехода к хаосу в системе (1) при фиксированном значении параметра $a = -2$. Имеют место следующие утверждения:

1. При $l > 0$ система имеет одну особую точку $O_1\,(0,0,0)$, которая является устойчивым узлом при $l \in (0,1)$ и устойчивым фокусом при $l \geqslant 1$.

2. При значении параметра l, переходящем $l = 0$, устойчивый узел O_1 становится седло-узлом, и рождаются еще две особые точки $O_{2,3}\left(0, \pm\sqrt{-l}, -l\right)$ — устойчивые узлы при $l \in [-0.19245, 0)$ и устойчивые фокусы при $l \in (-3, -0.19245)$ (согласно условию (16)).

3. При значении параметра l, переходящем $l = -3$, устойчивые фокусы $O_{2,3}$ становятся седло-фокусами, и вокруг них рождаются два устойчивых предельных цикла.

Будем изменять значения параметра l от $-\infty$ и численно решать систему (1).

При $l \in (-\infty, -162)$ в системе (1) существует единственный устойчивый предельный цикл C_0, охватывающий особые точки O_2 и O_3. При значении $l \approx 162$ цикл теряет устойчивость, порождая два устойчивых цикла C_0^- и C_0^+. Далее, при $l \in (-162, -115.029)$ в системе одновременно существуют два симметричных устойчивых цикла вокруг особых точек O_2 и O_3. Будем исследовать бифуркационные изменения одного из них и называть его исходным (Рис. 1а).

С ростом значений параметра l в системе (1) наблюдается каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода исходного цикла. Так, при значении $l \approx -115.03$ рождается цикл периода 2 (Рис. 1б), при $l \approx -104.939$ — цикл периода 4 (Рис. 1в), при $l \approx -102.83$ — цикл периода 8 и т. д. Каскад Фейгенбаума заканчивается при значении параметра $l_\infty \approx -101.82$ образованием первого нерегулярного (сингулярного) аттрактора системы — аттрактора Фейгенбаума (Рис. 1г).

(б)

Рис. 1: Проекции исходного цикла (а) системы (1), циклов периодов 2 (б) и 4 (в), соответственно, при значениях параметра $l = -116$, $l = -105$, $l = -103$ и аттрактора Фейгенбаума (г) — при $l = -101.8$.

При дальнейшем увеличении значений параметра l наблюдаются циклы периодов 11, 7 (Рис. 2а), 5 (Рис. 2б), 3 (Рис. 2в), соответственно, при значениях $l \in (-99.4934, -99.4933)$, $l \in (-99.311, -99.3)$, $l \in (-98.504, -98.441)$, $l \in (-96.787, -96.702)$ и полный циклический субгармонический сингулярный аттрактор (Рис. 2г) — при $l \approx -95.5$, возникающий после каскада бифуркаций удвоения периода цикла периода 3. Таким образом, имеет место наличие всех циклов из порядка Шарковского и полного субгармонического каскада бифуркаций.

(б)

Рис. 2: Циклы периодов 7 (а), 5 (б) и 3 (в) системы (1), соответственно, при значениях параметра $l = -99.31$, $l = -98.5$, $l = -96.75$, и полный субгармонический сингулярный аттрактор (г) — при $l = -95.5$.

Дальнейшие вычисления показывают наличие механизмов, аналогичных сценариям перехода к хаосу в системе Лоренца (подробнее см.: [**?**, разд. 3.1]): обнаруживаются гомо- и гетероклинические каскады бифуркаций. При этом аттрактор системы (1), указанный в работе [**?**, табл. 1], является лишь одним из сингулярных аттракторов гетероклинического каскада бифуркаций циклов, сходящихся к гетероклиническому контуру, соединяющему особые точки O_2 и O_3 (Рис. 3г). Были обнаружены некоторые устойчивые циклы из этого и других параллельных каскадов. Так, при значении бифуркационного параметра $l \approx -17.5$ наблюдается цикл C_{11} (Рис. 3а), при $l \approx -13.5$ — цикл C_1, при $l \approx -10.65$ — цикл C_{22} (Рис. 3б), при $l \approx -10.2077$ — цикл C_{12}, при $l \approx -9.06$ — цикл C_2, при $l \approx -8.538$ — цикл C_{33} (Рис. 3в) и т. д.

(б)

Рис. 3: Проекции циклов C_{11} (а), C_{22} (б), C_{33} (в) и неполного гетероклинического сингулярного аттрактора (г) (аттрактора из статьи Г. Чена) системы (1), соответственно, при значениях параметра $l = -17.5$, $l = -10.65$, $l = -8.538$ и $l = -6.7$.

2.2 Система Генезио—Тези

В качестве следующей системы, предложенной Г. Ченом, рассмотрим систему ОДУ Генезио—Тези [**?**, (18)]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2. \end{cases} \tag{18}$$

2.2.1 Аналитическое исследование

Дивергенция системы (18) имеет вид: $\mathsf{div}\vec{F}(x,y,z) = -a$, из чего следует, что система диссипативна при $a > 0$.

Особые точки системы (18): $O_1(0,0,0)$ и $O_2(c,0,0)$ $(c \neq 0)$.

Матрица линеаризации правой части системы (18) имеет вид:

$$J_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c+2x & -b & -a \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Рассмотрим особую точку O_1. Матрица Якоби (19) в точке O_1 принимает вид:

$$J_F(O_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix};$$

характеристический многочлен принимает вид:

$$f(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c;$$

определим условия устойчивости особой точки O_1:

$$\begin{cases} a > 0, \\ \begin{vmatrix} -a & -c \\ -1 & -b \end{vmatrix} > 0, \\ -\begin{vmatrix} -a & -c & 0 \\ -1 & -b & 0 \\ 0 & -a & -c \end{vmatrix} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ ab > c, \\ c > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Как следствие системы неравенств (20) получим необходимое условие устойчивости особой точки O_1: $b > 0$.

Система Штурма для функции $-f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ принимает вид:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c, \\ f_1(\lambda) &= 3\lambda^2 + 2a\lambda + b, \\ f_2(\lambda) &= p_1(a,b)\lambda + p_2(a,b,c), \\ f_3(\lambda) &= \frac{p_2(a,b,c)}{p_1(a,b)}\left(2a - \frac{3p_2(a,b,c)}{p_1(a,b)}\right) - b, \end{aligned} \tag{21}$$

где $p_1(a,b) = \left(\frac{2}{9}a^2 - \frac{2}{3}b\right)$, $p_2(a,b,c) = \frac{1}{9}ab - c$.

Выпишем все условия на многочлены системы Штурма (21), когда исследуемый характеристический многочлен имеет три вещественных корня:

1. $p_1(a,b) = p_2(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a^2}{3}, \\ c = \dfrac{a^3}{27} \end{cases}$ — условие на три вещественных корня (один из них — кратности два).

2. $f_3(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c = c_{1,2}, \end{cases}$ где $c_{1,2} = \dfrac{1}{6} \cdot \left(2ab - \frac{4}{9}a^3 \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{a^2}{3} - b \right)^3} \right)$, — условие на три вещественных корня (один корень кратности три).

3.

	$f(\lambda)$	$f_1(\lambda)$	$f_2(\lambda)$	$f_3(\lambda)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$ $(p_1(a,b) > 0)$	$+$ $(f_3(\lambda) > 0)$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$ $(p_1(a,b) > 0)$	$+$ $(f_3(\lambda) > 0)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c \in (c_2, c_1) \end{cases}$

В этом случае многочлен имеет три различных вещественных корня.

Итак, суммируя условия 1–3, получим, что характеристический многочлен матрицы Якоби, соответствующий особой точке O_1, имеет три вещественных корня (точка O_1 является узлом) при значениях параметров a,b,c, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a^2}{3}, \\ c = \dfrac{a^3}{27} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c \in [c_2, c_1]. \end{cases} \tag{22}$$

При всех остальных значениях параметров особая точка O_1 является фокусом.

Условия устойчивости особой точки задаются неравенствами (20). Рассмотрим случаи, когда происходят бифуркации точки O_1:

1. Когда параметр c пересекает значение $c = 0$ справа налево (считаем, $a, b > 0$ — условия устойчивости выполнены), особая точка O_1 (узел при $b < \frac{a^2}{3}$, фокус при $b \geqslant \frac{a^2}{3}$) теряет устойчивость (становясь соответственно седло-узлом или седло-фокусом), обмениваясь ею с особой точкой O_2.

2. Когда значение параметра c переходит значение произведения ab слева направо (будем считать, $a, b > 0$ — условия устойчивости

выполнены), характеристический многочлен в точке O_1 принимает вид: $f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + ab = (\lambda + a)\left(\lambda^2 + b\right)$. Полученный многочлен имеет один вещественный отрицательный корень $\lambda = -a$ и два комплексно-сопряженных, которые пересекают мнимую ось слева направо. Поэтому при $c = ab$ из устойчивого фокуса O_1 в результате бифуркации Андронова—Хопфа рождается устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим теперь особую точку O_2. Матрица линеаризации (19) в точке O_2 примет вид:

$$J_F(O_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & -b & -a \end{pmatrix};$$

характеристический многочлен принимает вид:

$$f(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda + c;$$

условия устойчивости особой точки O_2 определяются условиями:

$$\begin{cases} a > 0, \\ \begin{vmatrix} -a & c \\ -1 & -b \end{vmatrix} > 0, \\ -\begin{vmatrix} -a & c & 0 \\ -1 & -b & 0 \\ 0 & -a & c \end{vmatrix} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ ab > -c, \\ c < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Как и для особой точки O_1, условие $b > 0$ является необходимым для устойчивости точки O_2.

Система Штурма для функции $-f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda - c$ принимает вид:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda - c, \\ f_1(\lambda) &= 3\lambda^2 + 2a\lambda + b, \\ f_2(\lambda) &= p_1(a,b)\lambda + p_2(a,b,c), \\ f_3(\lambda) &= \frac{p_2(a,b,c)}{p_1(a,b)}\left(2a - \frac{3p_2(a,b,c)}{p_1(a,b)}\right) - b, \end{aligned} \tag{24}$$

где $p_1(a,b) = \left(\frac{2}{9}a^2 - \frac{2}{3}b\right)$, $p_2(a,b,c) = \frac{1}{9}ab + c$.

Определим условия на многочлены системы Штурма (24), когда соответствующий многочлен имеет три вещественных корня:

1. $f_2(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_1(a,b) = p_2(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a^2}{3}, \\ c = -\dfrac{a^3}{27} \end{cases}$ — условие на три вещественных корня (один из них — кратности два).

2. $f_3(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c = c_{1,2}, \end{cases}$ где $c_{1,2} = \dfrac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{9}a^3 - 2ab \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{a^2}{3} - b\right)^3} \right)$, — условие на три вещественных корня (один корень кратности три).

3.

	$f(\lambda)$	$f_1(\lambda)$	$f_2(\lambda)$	$f_3(\lambda)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-\ (p_1(a,b) > 0)$	$+\ (f_3(\lambda) > 0)$
$+\infty$	$+$	$+$	$+\ (p_1(a,b) > 0)$	$+\ (f_3(\lambda) > 0)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c \in (c_2, c_1) \end{cases}$

В этом случае многочлен имеет три различных вещественных корня.

Таким образом, суммируя условия 1–3, получим, что особая точка O_2 является узлом при значениях параметров a,b,c:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a^2}{3}, \\ c = -\dfrac{a^3}{27} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b < \dfrac{a^2}{3}, \\ c \in [c_2, c_1]. \end{cases} \tag{25}$$

При всех остальных значениях параметров особая точка O_2 является фокусом.

Устойчивость особой точки задается системой неравенств (23). Определим моменты происхождения бифуркаций точки O_2:

1. Когда параметр c пересекает значение $c = 0$ слева направо (будем считать, $a, b > 0$ — условия устойчивости выполнены), особая точка O_2 (узел при $b < \frac{a^2}{3}$, фокус при $b \geqslant \frac{a^2}{3}$) теряет устойчивость, обмениваясь ею с особой точкой O_1.

2. Когда значение параметра c переходит значение произведения $-ab$ справа налево (считаем, $a, b > 0$ — условия устойчивости выполнены), характеристический многочлен в точке O_2 принимает вид: $f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + ab = (\lambda + a)\left(\lambda^2 + b\right)$. Многочлен $f(\lambda)$ имеет один вещественный отрицательный корень $\lambda = -a$ и два

комплексно-сопряженных, вещественные части которых переходят 0 слева направо. Поэтому при $c = -ab$ происходит суперкритическая бифуркацию Андронова—Хопфа рождения устойчивого предельного цикла из устойчивого фокуса O_2.

2.2.2 Численное исследование

Исследование сценария перехода к хаосу в системе (18) будем проводить при фиксированных значениях параметров $a = 0.44$, $b = 1.1$. Справедливы следующие утверждения:

1. При $c \in (-0.484, 0)$ система имеет одну устойчивую особую точку $O_2\,(c, 0, 0)$, являющуюся фокусом (согласно (25)), и седло-фокус O_1. Точка O_2 теряет устойчивость и подвергается бифуркации Андронова—Хопфа рождения устойчивого предельного цикла при значении бифуркационного параметра $c = -0.484$.

2. При значении параметра c, переходящем $c = 0$, устойчивый фокус O_2 обменивается устойчивостью с седло-фокусом O_1, сам становясь седло-фокусом.

3. При значении $c \in (0, 0.484)$ особая точка O_1 является устойчивым фокусом (согласно условиям (22)), из которого при $c = 0.484$ в результате мягкой бифуркации Андронова—Хопфа рождается устойчивый предельный цикл.

Будем изменять значения параметра c от 0 до $+\infty$ и численно решать систему (18), рассматривая бифуркации и хаотическое поведение, связанные с особой точкой $O_1\,(0, 0, 0)$. Для отрицательных значений параметра c и особой точки $O_2\,(c, 0, 0)$ выводы будут такими же с точностью до знака c.

При $c \in (0, 0.484)$ единственным аттрактором системы является особая точка O_1.

Когда значение бифуркационного параметра c становится равным 0.484, в системе рождается новый аттрактор — устойчивый цикл (Рис. 4а), существующий вплоть до значения $c \approx 0.852$, — когда начинается каскад Фейгенбаума удвоения периода исходного цикла, и рождается цикл удвоенного периода (Рис. 4б). Так, при значении $c \approx 0.913$ появляется цикл периода 4 (Рис. 4в), при $c \approx 0.926$ — цикл периода 8 и т. д. Аттрактор Фейгенбаума образуется, когда параметр c принимает значение $c_\infty \approx 0.93$ (Рис. 4г).

(б)

Рис. 4: Устойчивый предельный цикл (а) системы (18), порожденный из точки O_1, циклы периодов 2 (б) и 4 (в), соответственно, при значениях параметра $c = 0.8$, $c = 0.9$, $c = 0.924$ и аттрактор Фейгенбаума (г) — при $c = 0.93$.

При дальнейшем росте значений параметра c обнаруживаются циклы периодов 11, 9 (Рис. 5а), 7 (Рис. 5б) и 5 (Рис. 5в), соответственно, при значениях $c \in (0.943661, 0.943663)$, $c \in (0.944338, 0.944355)$, $c \in (0.946214, 0.946282)$, $c \in (0.9511, 0.95148)$. Цикла периода 3 обнаружить не удалось, что позволяет судить об отсутствии полного субгармонического каскада бифуркаций. Таким образом, имеет место наличие всех циклов из порядка Шарковского (за исключением самого сложного цикла — цикла периода 3) и неполного субгармонического каскада бифуркаций. В завершении этого каскада проявляется циклический субгармонический нерегулярный аттрактор (Рис. 5г), наблюдаемый при $c \approx 0.952$, — результат бифуркаций удвоения периода цикла периода 5.

(б)

Рис. 5: Проекции циклов периодов 9 (а), 7 (б), 5 (в) системы (18), соответственно, при значениях параметра $c = 0.94434$, $c = 0.94625$, $c = 0.9513$ и неполного субгармонического сингулярного аттрактора (г) — при $c = 0.952$.

Кроме того были обнаружены различные решения типа циклов самоорганизации (термин из [**?**, **?**], см. Рис. 6а) при $c \approx 0.975631$, а также циклов из гомоклинического каскада бифуркаций, например, C_5 при $c \approx 0.982$, C_4 при $c \approx 0.999553$ (Рис. 6б), C_3 при $c \approx 1.014$ (Рис. 6г), далее подвергающиеся бесконечному числу бифуркаций удвоения периода. Итак, аттрактор системы (18), указанный в статье Г. Чена [**?**, табл. 1], является одним из сингулярных аттракторов гомоклинического каскада (Рис. 6в).

(б)

Рис. 6: Решения системы (18) в виде самоорганизации (а), цикла C_4 (б), неполного гомоклинического сингулярного аттрактора (в) (аттрактора из [**?**]) и цикла C_3 (г), соответственно, при $c = 0.975631$, $c = 0.9996$, $c = 1$ и $c = 1.014$.

При значении $c \approx 1.0397$ траектория пересекает поверхность, в которой лежит неустойчивая седловая особая точка O_2, и удаляется в бесконечность вдоль ее неустойчивого одномерного многообразия.

2.3 Система Чена (система без особых точек)

Рассмотрим далее еще один пример системы их статьи Г. Чена [**?**, (66)]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + yz, \\ \dot{z} = 1 - y^2. \end{cases} \tag{26}$$

Определим область диссипативности системы (26): $\mathsf{div}\vec{F}\,(x, y, z) = z$, а значит система диссипативна в области $z < 0$.

Поскольку система уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ -x + yz = 0, \\ 1 - y^2 = 0 \end{cases}$$

несовместна, система (26) не имеет особых точек.

В работе Г. Чена данная система дифференциальных уравнений приводится как пример хаотической системы без особых точек, однако наши вычисления показывают, что никакой хаотической динамики в данном примере нет, и единственным аттрактором является двумерный тор. На Рис. 7а и 7б показано само решение системы (26) и сечение Пуанкаре, взятое в произвольной точке фазовой траектории параллельно оси y.

Введем в систему (26) два параметра a и b и получим параметризованную систему Чена:

$$\begin{cases} \dot{x} = ay, \\ \dot{y} = -bx + yz, \\ \dot{z} = 1 - y^2. \end{cases} \tag{27}$$

Область диссипативности и факт отсутствия особых точек при этом не меняются.

Вариация параметров a и b показывает отсутствие каких-либо аттракторов, кроме торов, имеющих однако топологию различной сложности на всем множестве значений параметров. При значениях параметров $a = b = -1$ удалось получить аттрактор внешне «похожий» на аттрактор из обсуждаемой статьи [**?**, рис. 8], однако также являющийся тором (Рис. 7в). Это явственно видно из сечения Пуанкаре, в котором решение системы имеет вид набора замкнутых контуров (Рис. 7г).

(б)

Рис. 7: Аттрактор (а) системы (26) и соответствующее ему сечение Пуанкаре (б); фазовый портрет (в) системы (27) при значениях параметров $a = b = -1$ и соответствующее сечение Пуанкаре (г).

2.4 Система Спротта

Последним примером системы ОДУ, упоминаемой в работе Г. Чена, будет система Спротта [**?**, (65)]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = xz + 3y^2. \end{cases} \tag{28}$$

2.4.1 Аналитическое исследование

Дивергенция системы (28) отрицательна в области $x < 0$. Положение особых точек определяется условиями:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x + z = 0, \\ xz + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, система (28) имеет одну особую точку $O\,(0, 0, 0)$. Для выяснения ее типа и области устойчивости найдем корни характеристического многочлена матрицы Якоби правой части системы (28) в точке O. Имеем:

$$J_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ z & 6y & x \end{pmatrix}, J_F(O) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что характеристический многочлен матрицы Якоби в особой точке и соответствующие собственные значения имеют вид:

$$f(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 + 1\right), \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Получили, что вещественные части всех собственных значений равны нулю, а значит устойчивость и тип особой точки $O(0,0,0)$ по «первому приближению» установить не удается, и устойчивость точки O обусловлена нелинейными членами в правой части системы (28).

2.4.2 Численное исследование

Для рассмотрения сценария перехода к хаосу в системе (28) и выяснения причин наличия хаотического аттрактора, приведенного в работе [**?**, рис. 7], введем в исходную систему Спротта параметр a:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = xz + ay^2. \end{cases} \tag{30}$$

Для полученной параметризованной системы Спротта (30) область диссипативности, вид особой точки, а также соответствующий характеристический многочлен матрицы линеаризации останутся прежними.

Анализ системы (30) при значении параметра $a < 0$ показывает наличие неустойчивого цикла.

Когда $a \in (0, 1.29]$, фазовая траектория решения системы представляет из себя устойчивый цикл (Рис. 8а), диаметр которого стремится к ∞ при значении параметра $a \to 0$.

Когда значение бифуркационного параметра a становится равным 1.291, в системе начинается каскад Фейгенбаума удвоения периода найденного устойчивого цикла, и рождается цикл удвоенного периода (Рис. 8б). При величине $a \approx 1.816$ наблюдается цикл периода 4 (Рис. 8в), при $a \approx 1.992$ — цикл периода 8 и т. д. Каскад удвоения периода заканчивается при значении параметра $a_\infty \approx 2.052$ — образованием сингулярного аттрактора, аттрактора Фейгенбаума (Рис. 8г).

(б)

Рис. 8: Устойчивый предельный цикл (а) системы (30), циклы периодов 2 (б) и 4 (в), соответственно, при значениях параметра $a = 1.25$, $a = 1.7$, $a = 1.95$ и аттрактор Фейгенбаума (г) — при $a = 2.06$.

При дальнейшем росте значений параметра a обнаруживаются циклы периодов 11, 9 (Рис. 9а), 7 (Рис. 9б) и 5 (Рис. 9в), соответственно, при значениях $a \in (2.26388, 2.26389)$, $a \in (2.27364, 2.27375)$, $a \in (2.3046, 2.3056)$ и $a \in (2.3992, 2.4077)$. Цикл периода 3 обнаружен не был, что может означать отсутствие полного субгармонического каскада. Таким образом, имеет место наличие всех циклов из порядка Шарковского (за исключением цикла периода 3) и неполного субгармонического каскада бифуркаций, результатом которого является неполный субгармонический сингулярный аттрактор (Рис. 9г), наблюдаемый при $a \approx 2.419$, — результат бифуркаций удвоения периода цикла периода 5.

(б)

Рис. 9: Циклы периодов 9 (а), 7 (б), 5 (в) системы (30), соответственно, при значениях параметра $a = 2.2737$, $c = 2.305$, $c = 2.4$ и нерегулярный неполный субгармонический аттрактор (г) — при $c = 2.42$.

Заметим, что поскольку характеристические числа матрицы линеаризации, взятой в особой точке, имеют все вещественные части, равные нулю (одно тождественно равно нулю, другие два — чисто мнимые), точка O не имеет ни устойчивого, ни неустойчивого многообразия, что ведет к отсутствию гомоклинического каскада.

Тем не менее был обнаружен более сложный каскад бифуркаций — каскад циклов самоорганизации. Например, были найдены устойчивые циклы при $a \approx 2.57842$, $a \approx 2.794$ (Рис. 10а), $a \approx 2.9619$ (Рис. 10б), $a \approx 3.01$ (Рис. 10г), $a \approx 3.2959$ и $a \approx 3.51$, далее подвергающиеся бесконечному числу бифуркаций удвоения периода. Удалось также выяснить, что аттрактор системы (28), указанный в статье Г. Чена, является одним из сингулярных аттракторов этого каскада (Рис. 10в).

(б)

Рис. 10: Циклы каскада самоорганизации (а), (б), (г) системы (30), соответственно, при значениях параметра $a = 2.794$, $a = 2.9619$, $a = 3.01$ и сингулярный аттрактор (в) (аттрактор, предложенный Г. Ченом) — при $a = 3$.

При значениях параметра $a \geqslant 3.5105$ траектория удаляется в бесконечность.

3. Закючение

Таким образом, в одной из подвергнутых анализу диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сечений Пуанкаре было обнаружено отсутствие хаотической динамики. Для остальных систем найдены условия на параметры, определяющие типы особых точек, области устойчивости, а также моменты, когда происходят локальные бифуркации. Путем численного исследования каждой из систем был подтвержден единый сценарий перехода к хаосу по Фейгенбауму—Шарковскому—Магницкому; была показана принадлежность аттракторов из обсуждаемой статьи Г. Чена к каскадам из сценария ФШМ. Если принять во внимание тот факт, что наличие траекторий типа Шильникова, вообще говоря, не определяет нерегулярную динамику трехмерных нелинейных диссипативных систем ОДУ и, более того, не является обязательным для ее существования, то можно говорить о неоправданности классификации систем по методу критериев Шильникова. Более убедительной, на наш взгляд, является современная теория хаоса Н. А. Магницкого, в соответствии с которой аттракторы любых хаотических систем имеют единую природу.

Благодарность

Выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Н. А. Магницкому за помощь в работе над статьей.

Литература

1. *Карпова В.М.* Построение и исследование динамических моделей рождаемости. В кн. «Математическое моделирование социальных процессов», М., Изд. МАКС Пресс, 2004, вып. 6.
2. *Беккенбах Э., Белман Р.* Неравенства. М., Наука, 1965.
3. *Попков Ю.С.* Энтропийные модели рождаемости. Труды ИСА РАН, «Динамика неоднородных систем», том ,вып. 2009.