Дубровский А. Д.
Россия, МГУ ВМиК, Москва

ПОДХОД К СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье изложен новый подход к стабилизации неустойчивых периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью замены системы с точечным состоянием системы на систему с циклическим состоянием, метод позволяет стабилизировать неустойчивый цикл целиком. Другие же методы дают только точку на цикле. Обсчет стабилизирующей задачи современными численными методами является более эффективным чем задач с аналогичными методоми стабилизации, использующие точечное состояние системы. Подход проиллюстрирован на примере стабилизации неустойчивого цикла в уравнении Ресслера.

1. Введение

В современном научном мире моделирование систем является одним из наиболее популярных методик описания явлений в природе, в жизни человека и гипотетических процессов. Модель необходима для дальнейшего анализа всевозможных ситуаций, комбинирования с другими моделями и применение на практике для достижения определенных свойств участников процесса. Особый интерес представляют предельные решения при времени, стремящемся к бесконечности. Топологически предельные поведения в ограниченном фазовом пространстве разделяют на несколько типов: стационарное, периодическое, тороидальное, хаотическое и др. Множество простых, на первый взгляд динамических систем, при различных параметрах системы и начальных данных имеют всевозможные типы решений. В фазовом пространстве может существовать бесконечное число предельных решений. Так цикл периода 3 указывает на существование в фазовом пространстве любого предельного цикла из серии А.Н. Шарковского. На системах уравнений Х.А. Лоренца, Ч.Й. Чуа, Д.Ресслера и других это широко проиллюстрировано [8]. Предельные циклы могут быть как устойчивые, так и неустойчивые. Задача локализации и стабилизации какого-то определенного решения имеет интерес как с теоретико-аналитической точки зрения, так и с практической для принятия правильного решения, например, стабилизации популяции вида в модели А.Н. Колмогорова хищник-жертва [12, стр.141]. Далее в статье речь будет идти только о стабилизации неустойчивых периодических решений.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mu,\mathbf{u}) = [f_1(\mathbf{x},\mu,\mathbf{u}) \cdots, f_m(\mathbf{x},\mu,\mathbf{u})],\\ \mathbf{x} \in M \subset \mathsf{R}^m, \mu \in L \subset \mathsf{R}^k, \mathbf{u} \in U \subset \mathsf{R}^n, t \in I \subset \mathsf{R}, \mathbf{F} \in C^\infty\end{gathered} \tag{1}$$

где μ - параметр системы, - параметр времени, $\mathbf{x}$ - состояние системы, $\mathbf{u}$ - управление.

В 1990 году Е. Отт, С. Гребоги и Д.А. Йорк подняли вопрос о том, что хаотическое поведение подавленно в различных практических задачах. В статье [9] авторы предложили методику (OGY-метод) к стабилизации неустойчивых периодических орбит в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью контроля в виде обратной связи. Для этого выбирается сечение Пуанкаре S вблизи неподвижной точки отображения Пуанкаре и, итерационно изменяя управляющие параметры, решение стабилизируется к предельному циклу:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, \mu, \mathbf{u}_n) \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_n = x(t_n)$, $\mathbf{u}_n = u(t_n)$, t_n - момент времени n-ого пересечения сечения S. В классическом варианте управляющие компоненты линейно зависят от состояния системы $\mathbf{u} = C\mathbf{x}$, где C - матрица $m \times n$. Главным преимуществом этого метода является простота и дискретное управление во времени, позволяющее реализовать его во многих пошаговых системах. Еще одно из достоинств это то, этот метод относится к классу энерго-экономных. Но с другой стороны, для построения контроля необходимо точно знать линеаризованное представление отображения Пуанкаре $\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mu, \mathbf{u}^*)$, собственные вектора и числа, начальную точку $\mathbf{x}_0$ [6], которые в большинстве реальных задач не известно.

Метод с запаздыванием и непрерывной управляющий компонентой был предложен Пирагасом в [7]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mu, K(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-T))), \tag{3}$$

где K - некая матрица управления, а T - константа близкая к периоду цикла. Нахождение периода является аналитической задачей, которая может быть решена только в частных случаях. Более того исследование асимптотических свойств решения является сложной задачей. Поэтому область применения метода невелика.

В 1997 году Н.А. Магницким предложил другой подход к стабилизации с прямой обратной связью периодического решения системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu)$ [8, стр. 324--330]. Идея метода заключается в следующем. Пусть при параметре $\mu = \mu^*$ периодическое решение периода T^* системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) теряет устойчивость, тогда из теории Флоке один мультипликатор цикла всегда тождественно равен единице и еще как минимум один пересекает единичный круг. Тогда в некоторой окрестности μ^* система может быть стабилизирована следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y, \mu) + Z(y, t, \mu)Eq, \\ \dot{q} &= DQ(y, s, t, \mu) + \beta q, \\ \dot{s} &= CQ(y, s, t, \mu), \end{aligned} \tag{4}$$

где $s(t)$ - скалярная функция, в пределе равная периоду цикла, $\mathbf{q}(t) \in \mathsf{R}^k$ - векторная функция контроля, в пределе равная нулю, $1 \le k \le m$ - количество мультипликаторов пересекающих единичный круг при $\mu = \mu^*$, $D_{k\times m}$, $E_{m\times k}$ и $C_{1\times m}$ - постоянные матрицы. Отображение $Q(\mathbf{y}, s, t, \mu)$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(y,s,t,\mu) &= x(s,\mu)-x(0,\mu),\\ \dot{x} &= F(x,\mu),\\ x|_{t=0} &= y, \end{aligned} \tag{5}$$

а $Z(\mathbf{y},t,\mu)=Z(\mathbf{x}(t,\mu)$ является решением матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{V}(t)=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(t,\mu)V(t), \quad V(0)=I. \tag{6}$$

Начальные условия выбираются следующим образом:

$$\mathbf{y}|_{t=0}=\mathbf{x}^*(\tau,\mu^*), \quad \mathbf{q}|_{t=0}=0, \ s|_{t=0}=T^*, \tag{7}$$

где $\mathbf{x}^*(\tau,\mu^*)$ - точка с устойчивого цикла. Этот метод позволяет локализовать и стабилизировать неустойчивый цикл малыми изменениями параметра μ в область хаотического поведения исходной системы. Важно отметить, что период был вычислен только для устойчивого цикла при $\mu=\mu^*$, далее система автоматически его корректирует. С другой стороны, при обсчете численными методами стабилизирующей системы на каждом шаге итерации необходимо вычислять динамические системы для нахождения значений $Q(\mathbf{y},s,t,\mu)$ и $Z(\mathbf{y},t,\mu)$, что является трудоемкой и долгой задачей даже на современных компьютерах.

Рассмотрим иной подход к стабилизации неустойчивых периодических решений в автономных динамических системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в предыдущих методах состояние системы описывается точкой в m-мерном пространстве, то здесь рассматривается цикл как состояние системы. Таким образом, ключевым шагом в методе является введение новой динамической системы дифференциальных уравнений с частными производными - производная система, которая описывает не движение точки, а движение цикла. Связь между этими системами состоит из следующих утверждений:

1. Любое периодическое решение исходной системы является стационарным в производной системе.
2. Любое стационарное решение производной системы является периодическим в исходной системе.

3. Периодическое решение исходной системы устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво стационарное решение производной системы.

Такой подход позволяет заменить задачу стабилизации цикла на задачу стабилизации стационарного решения, в основе, которого лежит метод Магницкого стабилизации термодинамической ветви в системах уравнений “реакция-диффузия” [8, стр. 337--346], что изложено в последней части статьи. Построенная дифференциальная стабилизационная модель может быть решена различными численными методами, например, методом прямых, вариационными методами, методом сеток и т.д. [15, 11, 14, 13, 16].

2. Производная система

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_m]\quad \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}(t,\tau)}{\partial t}, \quad \mathbf{y}_\tau = \frac{\partial \mathbf{y}(t,\tau)}{\partial \tau}.$$

Определение 2.1 *Следующую систему дифференциальных уравнений далее будем называть исходной системой:*

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu)\\ &\mathbf{x} \in M \subset \mathsf{R}^m, \mu \in L \subset \mathsf{R}^k, t \in I \subset \mathsf{R}, \mathbf{F} \in C^\infty\end{aligned} \tag{8}$$

где μ - параметр системы, t - параметр времени, $\mathbf{x}$ - состояние системы.

Пример 1 *СистемаРесслера, описывающая динамику химических реакций, некоторой смеси с условиями перемешивания:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z,\\ \dot{y} &= x + ay,\\ \dot{z} &= b + z(x - \mu)\end{aligned}$$

В книге [8] приведен широкий анализ системы, где показан полный субгармонический каскад бифуркаций Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого.

Определение 2.2. *Производной системой системы (8) будем называть следующую систему:*

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y},\mu) = \{g_1(\mathbf{y},\mu), \cdots, g_m(\mathbf{y},\mu)\},\\
&g_i(\mathbf{y},\mu) = f_i(\mathbf{y},\mu) - y_{i\tau}\,\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{y}_\tau\cdot\mathbf{y}_\tau},\\
&\|\mathbf{y}_\tau\|^2 \neq 0,\\
&\mathbf{y}(t,\tau)|_{\tau=0} = \mathbf{y}(t,\tau)|_{\tau=2\pi}, \quad \mathbf{y}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{y}_\tau|_{\tau=2\pi},\\
&y\in M\subset\mathrm{R}^m, \mu\in L\subset\mathrm{R}^k, t\in I\subset\mathrm{R}, \tau\in[0,2\pi]
\end{aligned} \tag{9}$$

Или в краткой форме:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu) - \mathbf{y}_\tau\,\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{y}_\tau\cdot\mathbf{y}_\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\parallel\mathbf{y}_\tau = \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\perp\mathbf{y}_\tau.$$

Из краевых условий задачи (9) следует, что вектор-функция $\mathbf{y}(t,\tau)$ может быть расширена на $[I\times\mathrm{R}]$ так, чтобы она была 2π-периодична и равномерно непрерывная по τ, следующим образом: $\tilde{\mathbf{y}}(t,\tau) = \mathbf{y}(t,\tau\ mod\ 2\pi)$, где $t,\tau\in\mathrm{R}$.

Пример 2 *Производная система для системы Ресслера выглядит следующим образом:*

$$\dot{x} = -y - z - x_\tau\,\frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b+z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2},$$

$$\dot{y} = x + ay - y_\tau\,\frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b+z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2},$$

$$\dot{z} = b + z(x-\mu) - z_\tau\,\frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b+z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2},$$

$$x|_{\tau=0} = x|_{\tau=2\pi}, y|_{\tau=0} = y|_{\tau=2\pi}, z|_{\tau=0} = z|_{\tau=2\pi},$$

$$x_\tau|_{\tau=0} = x_\tau|_{\tau=2\pi}, y_\tau|_{\tau=0} = y_\tau|_{\tau=2\pi}, z_\tau|_{\tau=0} = z_\tau|_{\tau=2\pi}.$$

2.1. Соответствие решений систем

Теорема 2.1 *Если* $\mathbf{x}(t)$ *является* T*-периодическим решением исходной системы (8), то функция* $\mathbf{y}(t,\tau) = \mathbf{x}(Q(\tau)$ *является стационарной в* *производной системе (9), где функция* $Q:[0,2\pi]\to[0,T]$ *непрерывная и* $Q(0)=0$, $Q(2\pi)=T$, .

Докозательство. Сначала покажем, что функция $\mathbf{y}(t,\tau)$ удовлетворяет краевым условиям задачи (9), т.к. $\mathbf{x}(t)$ - T -периодическое решение:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t+T).$$

Тогда из условий,что функция $Q(0)=0, Q(2\pi)=T$ и $Q'(0)=Q'(2\pi)$:

$$\mathbf{y}(t,0)=\mathbf{x}(Q(0))=\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(Q(2\pi))=\mathbf{y}(t,2\pi),$$

$$\mathrm{y}_\tau(t,0)=\mathrm{x}_Q(Q(0))Q'(0)=\mathrm{x}_Q(0)Q'(0)=\mathrm{x}_Q(T)Q'(2\pi)=$$

$$=\mathrm{x}_Q(Q(2\pi))Q'(2\pi)=\mathrm{y}_\tau(t,2\pi)$$

Теперь покажем, что функция $\mathbf{y}(t,\tau)$ является стационарным решением. Так как $\mathbf{x}(t)$ - решение системы (8), то:

$$x_{it}(t)=f_i(\mathbf{x}(t),\mu),\ i=\overline{1,m},\forall t.$$

$$\dot{y}_i(t,\tau)=f_i(\mathbf{y},\mu)-y_{i\tau}\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{y}_\tau\cdot\mathbf{y}_\tau}=$$

$$=f_i(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)-x_{iQ}(Q(\tau))Q_\tau(\tau)\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)\cdot\mathbf{x}_Q(Q(\tau))Q_\tau(\tau)}{\mathbf{x}_Q(Q(\tau))Q_\tau(\tau)\cdot\mathbf{x}_Q(Q(\tau))Q_\tau(\tau)}=$$

$$=f_i(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)-x_{iQ}(Q(\tau))\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)\cdot\mathbf{x}_Q(Q(\tau))}{\mathbf{x}_Q(Q(\tau))\cdot\mathbf{x}_Q(Q(\tau))}=$$

$$=f_i(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)-x_{iQ}(Q(\tau))\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)}{\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)}=$$

$$=f_i(\mathbf{x}(Q(\tau)),\mu)-x_{iQ}(Q(\tau))=0$$

Лемма 2.2 *Для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *справедливо:*

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\Leftrightarrow\mathbf{a}=c\mathbf{b},c\in\mathrm{R}.$$

Докозательство.

$$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{a}=c\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=c\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(c\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})=0$$

Теорема 2.3 *Если функция* $\mathbf{y}(t,\tau)=\mathbf{y}(\tau)$ *является стационарной в производной системе (9), тогда существует такая монотонно возрастающая функция* $P:[0,T]\to[0,2\pi]$, *что функция* $\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}(P(t)$ *при* $t\in[0,T]$ *является циклом* T *-периодического решения исходной системы (8).*

Доказательство. Так как $\mathbf{y}(t,\tau)=\mathbf{y}(\tau)$ стационарное решение системы (9):

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)-\mathbf{y}_\tau\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{y}_\tau\cdot\mathbf{y}_\tau}=0\Rightarrow$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)(\mathbf{y}_\tau\cdot\mathbf{y}_\tau)=\mathbf{y}_\tau(\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau)\Rightarrow\mathbf{y}_\tau=c(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)$$

$$\|\mathbf{y}_\tau\|\neq 0\Rightarrow\mathbf{y}_\tau\neq\mathbf{0}\Rightarrow c(\tau)\neq 0,\ \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\neq 0$$

Из условий непрерывности функций $\mathbf{y}_\tau$ и $\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)$ по τ следуют, что функция $c(\tau)$ знакопостоянная. Пусть $c(\tau)>0$ тогда найдем первообразную функции $c(\tau)$ из следующего дифференциального уравнения:

$$C_\tau=\frac{\|\mathbf{y}_\tau\|}{\|\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\|},C(0)=0 \tag{10}$$

Функция $C(\tau):[0,2\pi]\to[0,T]$, где $T=C(2\pi)$, является монотонно возрастающая, слеовательно, существует обратная монотонно возрастающая и непрерывная функция, тогда пусть:

$$P=C^{-1}(t):[0,T]\to[0,2\pi]\Rightarrow C(P(t))=t\Rightarrow(C(P(t)))_t=$$
$$=c(P(t))P_t(t)=1.$$

Проверим, что эта функция является решением исходной системы (8):

$$(m\text{-}1)$$

$$=\mathrm{F}(\mathrm{y}(P(t))).$$

Учитывая, что

$$P=C^{-1}(t):[0,T]\to[0,2\pi]\Rightarrow C(P(t))=t\Rightarrow(C(P(t)))_t=$$
$$=c(P(t))P_t(t)=1.$$

$x(t)$ при $t\in[0,T]$ является циклом периодического решения исходной системы. Для случая $c(\tau)<0$ доказывается аналогичным образом.

Следствие 1. *Функция* P *и период находятся из следующей системы:*

$$C_\tau = \frac{\|\mathbf{y}_\tau\|}{\|\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\|}, C(0)=0, \tau\in[0,2\pi], T=C(2\pi) \tag{11}$$

$$P(t)=\begin{cases} C^{-1}(t), \text{ если вектора } \mathbf{y}_\tau > \mathrm{F}(x,\mu) \text{ коллинеарны при любом } \tau \\ C^{-1}(C(2\pi)-t), \text{ неколлинеарны.} \end{cases}$$

Функцию $P(t)$ будем обозначать $Q^{-1}(t)$, что и является ее сутью.

Следствие 2 *Если* $y(t,\tau)=y_0(\tau)$ *стационарное решение производной системы (9) и вектора* $\mathbf{y}_\tau(\tau)$ *и* $\mathbf{F}(\mathbf{y}(\tau),\mu)$ *коллинеарные для любого* τ*, тогда* $\mathbf{y}_{\mathbf{0}\tau}=Q_\tau^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{y}_\mathbf{0},\mu)$.

2.2. Устойчивость решений

Далее будем рассматривать только те случаи, когда вектора $\mathbf{y}_\tau$ и $\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)$ коллинеарные при всех τ.

Теорема 2.4 *Периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *исходной системы (8) является орбитально-асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда функция* $\mathbf{y}(t,\tau)=\mathbf{x}(Q(\tau)$*, является стационарной и асимптотически устойчивой на многообразии перпендикулярном к* $\mathbf{y}_\tau$ *в производной системе (9), где* $Q(\tau)$ *- монотонно возрастающая функция* $Q:[0,T]\to[0,2\pi]$ *и* T *- период функции* $\mathbf{x}(t)$. *А многообразие* $\mathbf{y}$ *не является ни устойчивым, ни неустойчивым в производной системе.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x_0}(t)$ периодическое решение исходной системы (8) с периодом T. Тогда из теоремы 2.1 существует целое множество стационарных решений $\mathbf{y_0}(t,\tau)=\mathbf{y_0}(\tau)=\mathbf{x_0}(Q(\tau)$ производной системы (9), где $Q:[0,2\pi]\to[0,T]$. Линеаризованная исходная система (8) в $x_0(t)$ имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{x}}=A(t)\tilde{\mathbf{x}}+O(|\,\tilde{\mathbf{x}}\,|^2), \text{ где } \tilde{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x_0}(t) \text{ и } A(t)=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{x}}(x_0(t)), \tag{12}$$

(14)

Линеаризованная производная система (9) в
функции $\mathbf{y_0}(t,\tau)$ выглядит следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t,\tau)=\mathbf{y}(t,\tau)-\mathbf{y_0}(\tau),\ \ \dot{\tilde{\mathbf{y}}}=B(\tau)\tilde{\mathbf{y}}+C(\tau)\tilde{\mathbf{y}}_\tau+O(|\,\tilde{\mathbf{y}}\,|^2+|\,\tilde{\mathbf{y}}_\tau\,|^2),$$

(13)

где матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определяются равенствами:

(14)

$$\begin{aligned}
y_{0\tau}(\tau) &= Q_\tau^{-1}(\tau)F(y_0(\tau),\mu)\\
A(t) &= A(Q(\tau))=\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{y=y_0},\\
B(\tau,\mu) &= \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial(F(y,\mu)\,\|\,y_\tau)}{\partial y}\Big|_{y=y_0}=\\
&= \frac{\partial F}{\partial y}-y_\tau y_\tau^T\frac{\partial F}{\partial y}(y_\tau\cdot y_\tau)^{-1}\Big|_{y=y_0}=\\
&= (E-\frac{y_\tau y_\tau^T}{y_\tau\cdot y_\tau})\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{y=y_0},\\
C(\tau) &= \frac{\partial(F(y,\mu)\,\|\,y_\tau)}{\partial y_\tau}(y_{0\tau}(\tau))=
\end{aligned}$$

$(m\text{-}1)$

$$= \left(\begin{bmatrix} \dfrac{y_{i\tau} f_j (\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau) - 2 y_{j_\tau} y_{i\tau} (y_{1\tau} f_1 + \dots + y_{m\tau} f_m)}{(\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau)^2} & , \quad i \neq j, \\ \dfrac{(y_{i\tau} f_j + (y_{1\tau} f_1 + \dots + y_{m\tau} f_m))(\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau) - 2 y_{j_\tau} y_{i\tau} (y_{1\tau} f_1 + \dots + y_{m\tau} f_m)}{(\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau)^2} & , \quad i = j \end{bmatrix} \right)_{i,j} (y_{0\tau}(\tau)) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -Q_\tau^{-1}(\tau) \dfrac{y_{i\tau} y_{j_\tau}}{\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau} & , \quad i \neq j, \\ Q_\tau^{-1}(\tau)(1 - \dfrac{y_{i\tau} y_{j_\tau}}{\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau}) & , \quad i = j \end{bmatrix} \right)_{i,j} (y_{0\tau}(\tau)) =$$

$$= \quad Q_\tau^{-1}(\tau)(E - \frac{\mathbf{y}_\tau \mathbf{y}_\tau^T}{\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau})|_{y=\mathbf{y_0}}$$

Заметим, что матрица $\dfrac{\mathbf{y}_\tau \mathbf{y}_\tau^T}{\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau}$ является симметричной и имеет только одно не нулевое собственное значение равное 1, тогда

$$E - \frac{\mathbf{y}_\tau \mathbf{y}_\tau^T}{\mathbf{y}_\tau \cdot \mathbf{y}_\tau} = U\widetilde{E}U^*,$$

где U - унитарная матрица $\boldsymbol{U} \quad ^* = E$, $\widetilde{E}$ - почти единичная:

$$U = \begin{pmatrix} y_{1t} & -y_{2t} & -y_{3t} & \cdots & -y_{nt} \\ y_{2t} & y_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{2t} & 0 & y_{1t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{nt} & 0 & 0 & \cdots & y_{1t} \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда все действительные части спектра λ_1 оператора $B + i\dfrac{k}{2}C$ совпадают с действительными частями спектра λ_2 оператора A, кроме одного $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Откуда и следует взаимная устойчивость и неустойчивость на -мерном многообразии исходной и производной задач периодеческого решения [16]. Многообразие, отвечающее $\lambda_1 = 0$, не является ни устойчивым ни неустойчивым и определяется функцией $Q^{-1}(\tau)$.

3. Метод стабилизации

В качестве метода стабилизации предлагается подход Магницкого [8] для стабилизации неустойчивого стационарного решения. Пусть $y^*(\mu, Q(\tau))$ – стационарное решение производной системы (9), μ - скалярный параметр системы. Предположим, что существует значение μ^*, при котором функция $y^*(\mu^*, Q(\tau))$ является асимптотически устойчивым стационарным решением с точностью до Q, а при $\mu > \mu^*$ становится неустойчивым. Тогда задача состоит в локализации и стабилизации неустойчивой стационарной функции $y^*(\mu, Q(\tau))$ при $\mu > \mu^*$ с точностью до функции Q. Рассмотрим $(m+1)$ -мерную динамическую систему:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu) \perp \mathbf{y}_\tau + \mathbf{e}q, \qquad \dot{q} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu) \perp \mathbf{y}_\tau) + \beta q, \qquad (15)$$

где $\mathbf{e}(\tau) = (\varepsilon_1(\tau), \cdots, \varepsilon_m(\tau))^T$, $\mathbf{a}(\tau) = (a_1(\tau), \cdots, a_m(\tau))$ и $\beta(\tau) \in \mathrm{R}$

В стационарном положении функция $(\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu) \perp \mathbf{y}_\tau) \cdot \mathbf{a} = 0$ при любом векторе $\mathbf{a}$. Тогда линейный оператор системы (15) около какого-то стационарного решения $y^*(\tau, \mu)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
nz &= \tilde{B}z + \tilde{C}z_\tau, \\
z(\tau, \mu) &= y(\tau, \mu) - y^*(\tau, \mu), \\
\tilde{B} &= \begin{pmatrix} B & \varepsilon \\ \sum_{i=1}^m a_i B_i & \beta \end{pmatrix}_{y=y^*(\mu), q=0}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ \sum_{i=1}^m a_i C_i & 0 \end{pmatrix}_{y=y^*(\mu), q=0}, \quad (16)
\end{aligned}$$

где B_i и C_i - строки матриц B и C соответственно. Так как первые m столбцов линейного оператора линейно зависимы, то существует одно тривиальное собственное значение равное нулю и отвечает собственному вектору $(\mathbf{z}_\tau, 0)$. Чтобы система (15) стабилизировала цикл $y^*(\tau, \mu)$ достаточно, что бы все нетривиальные реальные части значений спектра были меньше некого отрицательного значения. Функция $\mathbf{z}(\tau, \mu)$ может быть разложена в бесконечный сходящийся ряд Фурье:

$$z(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j e^{i\frac{j\tau}{2}}, \text{где } z_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(\tau) e^{-i\frac{j\tau}{2}} d\tau.$$

$$\lambda\sum_{j=0}^{\infty} z_j e^{i\frac{j\tau}{2}} = \tilde{B}\sum_{j=0}^{\infty} z_j e^{i\frac{j\tau}{2}} + \tilde{C}\frac{ij}{2}\sum_{j=0}^{\infty} z_j e^{i\frac{j\tau}{2}}, \tag{17}$$

Тогда задачу на собственные значения принимает вид:

$$\lambda_j z_j = \tilde{B} z_j + \tilde{C}\frac{ij}{2} z_j.$$

Якобиан правой части в точке $(y^*(\tau,\mu),0)$ имеет вид:

$$J(\mu,k_\tau) = \begin{pmatrix} B + i\frac{k_\tau}{2}C & \mathbf{e} \\ \sum_{i=1}^{m} a_i (B + i\frac{k_\tau}{2}C)_i & \beta \end{pmatrix}_{y=y^*(\mu)\; q=0} \qquad . \qquad T^* \tag{18}$$

Как было показано выше, детерминант матрицы $(B + i\frac{k_\tau}{2}C)$ равен нулю, поэтому, как минимум одно собственное значение матрицы $J(\mu,k_\tau)$ равно нулю, притом это собственное значение отвечает многообразию определяемое функцией Q. Таким образом, для того, чтобы стабилизирующая система была устойчивая в стационарном решении в некоторой окрестности параметра μ^*, необходимо найти такие гладкие функции $\mathbf{e}(\tau)$, $\mathbf{a}(\tau)$ и $\beta(\tau)$ – чтобы все действительные части нетривиальных собственных значений Якобиана были меньше некого отрицателького числа при $\mu = \mu^*$.

Пример 3 *Рассмотрим способ стабилизации периодических решений применительно к производной системе Ресслера, где задача стабилизации со стабилизационным параметром q имеет вид:*

$$\dot{x} = -y - z - x_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2} + \varepsilon_x q,$$

$$\dot{y} = x + ay - y_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2} + \varepsilon_y q,$$

$$\dot{z} = b + z(x-\mu) - z_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2} + \varepsilon_z q,$$

$$\dot{q} = a_x(-y - z - x_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2}) +$$

$$+a_y(x + ay - y_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2}) +$$

$$+a_z(b + z(x-\mu) - z_\tau \frac{x_\tau(-y-z) + y_\tau(x+ay) + z_\tau(b + z(x-\mu))}{x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2}) + \beta q,$$

$$x|_{\tau=0} = x|_{\tau=2\pi}, y|_{\tau=0} = y|_{\tau=2\pi}, z|_{\tau=0} = z|_{\tau=2\pi}, q|_{\tau=0} = q|_{\tau=2\pi},$$

$$x_\tau|_{\tau=0} = x_\tau|_{\tau=2\pi}, y_\tau|_{\tau=0} = y_\tau|_{\tau=2\pi}, z_\tau|_{\tau=0} = z_\tau|_{\tau=2\pi}, q_\tau|_{\tau=0} = q_\tau|_{\tau=2\pi}.$$

И выберем начальные условия следующим образом:

$$x(\tau)|_{t=0} = x^*(Q_0(\tau)), \qquad y(\tau)|_{t=0} = y^*(Q_0(\tau)), \qquad z(\tau)|_{t=0} = z^*(Q_0(\tau)),$$

$$q(\tau)|_{t=0} = 0, \qquad Q_0(\tau) = \tau \frac{T^*}{2\pi},$$

где $(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ - предельный устойчивый цикл периода

исходной системыResслера, например, при $\mu = 1.85$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$,

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и $z_0 = 1$. При $\varepsilon_x = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon_y = -1$, $\varepsilon_z = -\frac{1}{2}$, $a_x = -1$,

$a_y = 2$, $a_z = -1$ и $\beta = -2.23$, нетрудно подсчитать, что действительные части спектра стабилизирующей системы в стационароном решении $(x^*(Q_0(\tau)), y^*(Q_0(\tau)), z^*(Q_0(\tau)))$ меньше действительных частейспектра производной системы в $(x^*(Q_0(\tau)), y^*(Q_0(\tau)), z^*(Q_0(\tau)),0)$.

Таким образом цикл остается устойчивым до $\mu = 2$ (рис. 3). Важно отметить, что функция $Q(\tau)$ меняется при стабилизации, но ее всегда можно восстановить (см. следствие 1). Более того, независимо от функции $Q(\tau)$, множество точек, определяемое стационарным решением в пространстве $X \times Y \times Z = \mathsf{R}^3$, остается неизменным.

В ИСХОДНЫХ ФАЙЛАХ НЕТ РИСУНКОВ

Рисунок 1. Иллюстрация стабилизации неустойчивого цикла. На левом рисунке 1 - устойчивый цикл при $\mu = 1.85$, 2 - устойчивый цикл удвоенного периода при $\mu = 2$ и 3 - стабилизированный неустойчивый цикл при $\mu = 2$. На правом рисунке - норма стабилизационного параметра, которая экспоненциально стремится к нулю.

4. Заключение

В статье была рассмотрена новая форма представления системы динамических уравнений для случая, когда требуется исследовать периодические решения. Приведение к новой форме осуществляется с помощью введения системы с циклическим состоянием. Каждый стационарный цикл производной системы отвечает периодическому циклу в исходной системе и наоборот, любое периодическое отвечает стационарному. И при этом стационарный цикл устойчив (неустойчив) тогда и только тогда, когда орбитально-устойчиво (неустойчиво) периодическое решение. На основе данного представления был предложен метод с введением нового стабилизационного параметра для стабилизации неустойчивого периодического решения. А также предложен способ отыскания функций-параметров стабилизирующей системы. Такой подход помогает значительно сократить вычислительное время. Кроме того, такое представление дает сам цикл, а не точку на цикле, как в иных методах. Малыми возмущениями параметра цикл может быть стабилизирован в области хаотического поведения. При этом начальные условия стабилизирующей системы не зависят от характеристик стабилизируемого цикла, например, от периода.

Список литературы

1. 1. D. V. Anosov and S. Kh. Aranson and V. I. Arnold and I. U. Bronshtein and Yu. S. Il'yashenko and V. Z. Grines. *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1997.
2. Alexander L. Fradkov and Boris Andrievsky and Robin J. Evans. Chaotic Observer-based Synchronization Under Information Constraints. 2005.
3. Fradkov, Alexander L. and Andrievsky, Boris and Evans, Robin J. Control of chaos: methods and applications in mechanics. 2006. doi:10.1098/rsta.2006.1826.
4. Alexander L. Fradkov and Boris Andrievsky and Robin J. Evans. Controlled Synchronization of One Class of Nonlinear Systems under Information Constraints. 2007.
5. Alexander L. Fradkov and Boris Andrievsky and Robin J. Evans. Controlled Synchronization Under Information Constraints. 2007.
6. Chen Guanrong. *Chaos Control*, volume 292 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2003.
7. K.Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A.*, 170:421--428, 1992.
8. Magnitskii, Ninkolai Alexandrovich and Sidorov, Sergey Vasilevich. *New methods for chaotic dynamics*, volume 58 of A. World scientific, 2006.
9. Ott, Edward and Grebogi, Celso and Yorke, James A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64(11):1196--1199, 1990.

10. Li Zhong and Wolfgang A. Halang and Chen Guanrong. *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory (Studies in Fuzziness and Soft Computing)*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

11. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. *Уравнения математической физики*. Наука, Москва, Россия, 2004.

12. В.Д.Горяченко. *Элементы теории колебаний*. 2001. [13] В.М.Вержбицкий. *Основы численных методов*. Высшая школа, Москва, Россия, 2005.

13. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Гобельков. *Численные методы*. БИНОМ, Москва, Россия, 2004.

14. О.А.Олейник. *Лекции об уравнениях с частными производными*. БИНОМ. Лаборатория знаний, Москва, Россия, 2005.

15. Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. ИЛ, Москва, Россия, 1958.