Садыхова Л.Г., Некрасова О.В.

МГУ, им М.В. Ломоносова, Москва
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

ПОКАЗАТЕЛЬ РЕСУРСА, ЕГО СВОЙСТВА И ОЦЕНКИ

1. Постановка вопроса

Для ряда технических объектов важна величина длительности безотказной наработки на некотором временном интервале [τ, τ+t], где значение τ больше длительности приработочного периода, а τ+t – значение времени, которое меньше, чем момент времени начала процесса «старения». Другими словами [τ, τ+t] – временной интервал, находящийся внутри периода «нормальной эксплуатации» объекта.

Количественная оценка длительности безотказной наработки объекта на временном интервале [τ, τ+t] традиционными показателями «гамма-процентный ресурс» и «средний ресурс» - некорректна, поскольку в состав продолжительности первого показателя входят длительности приработочного периода, а в состав продолжительности второго показателя входят не только длительности приработочного периода, но и длительности периода старения объекта.

В связи с вышеизложенным возникает вопрос введения нового показателя оценки длительности безотказной наработки объекта, свободный от вышеуказанных недостатков.

2. Показатель ресурса

Пусть ζ – наработка до отказа невосстанавливаемого объекта. Определим следующую случайную величину $\zeta_t(\tau)$, равную наработке объекта до отказа после времени τ, если отказ произошел внутри временного интервала [τ, τ+t], либо продолжительности t, если отказа там не было, т.е.

$$\zeta_t(\tau) = \begin{cases} \zeta - \tau, & \text{если объект отказал внутри } [\tau, \tau + t]; \\ t, & \text{если объект в отказал внутри } [\tau, \tau + t]. \end{cases} \qquad (1)$$

Определим $r_t(\tau)$ - среднюю безотказную наработку объекта на временном интервале [τ, τ+t] как математическое ожидание величины $\zeta_t(\tau)$, т.е.

$$r_t(\tau) = M(\zeta_t(\tau)), \tag{2}$$

где $M(\cdot)$ – математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок.

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Имеет место следующая формула:*

$$r_t(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^{\tau+t} P(u)du, \tag{3}$$

где $P(\cdot)$ *– вероятность безотказной работы объекта в течение времени, указанного внутри скобок.*

Доказательство. Сначала установим, что плотность распределения случайной величины (1) равна

$$f_\tau(z) = \begin{cases} \dfrac{f(\tau+z)}{P(\tau)}, & \text{если} \quad z \in [0,t); \\ \dfrac{\mathrm{P}(\tau+t)}{P(\tau)}, & \text{если} \quad z = t, \end{cases} \tag{4}$$

где $f(\cdot)$ - плотность распределения случайной величины ζ.

В самом деле, функция распределения случайной величины (1)

$$F_\tau(z) = P_r(\zeta_t(\tau) < z),$$

где $P_r(\cdot)$ - вероятность события, заключенного внутри скобок.

Согласно формуле условных вероятностей имеем

$$F_\tau(z) = P_r[((\zeta - \tau) < z) | \zeta > \tau] = \frac{P_r[(\zeta < \tau + z) \cap (\zeta > \tau)]}{P_r(\zeta > \tau)},$$

откуда получим

$$F_\tau(z) = \frac{F(\tau+z) - F(\tau)}{P(\tau)},$$

где $F(\cdot)$ - функция распределения случайной величины ζ; $z \in (0,t)$

Взяв производную от обеих частей по переменному z , получим первую строку формулы (4).

Поскольку для первой строки (4)

$$\frac{1}{P(\tau)}\int_0^t f(\tau+z)dz = 1 - \frac{P(\tau+t)}{P(\tau)},$$

то из нормировочного свойства плотности распределения $f_\tau(z)$ найдем вторую строку формулы (4), что полностью доказывает соотношение (4).

Из выражения (4) видно, что плотность распределения $f_\tau(z)$ случайной величины (1) как функция времени z имеет точку разрыва первого рода при $z = t$. Это соответствует тому, что смешанная (непрерывно-дискретная) случайная величина (1) имеет непрерывную часть плотности распределения (первая строка (4)) и дискретную часть (вторая строка(4)).

Для вычисления математического ожидания непрерывной части смешанной случайной величины (1) разобьем интервал [0, t] произвольным образом на n частичных интервалов $[z_i, z_{i+1}]$, выбрав внутри в каждом из них также произвольную точку η_i, $i = 1,2,...,n.$ Тогда математическое ожидание для непрерывной части смешанной случайной величины (1) равна

$$M_H(\zeta_t(\tau) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_\tau(\eta_i) \Delta z_i,$$

$$\text{где } \Delta z_i = z_{i+1} - z_i, \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n}$$

Правая часть, согласно (4) и определению интеграла, равна

$$\frac{1}{P(\tau)}\int_0^t zf(\tau+z)dz.$$

Следовательно, математическое ожидание непрерывной части равно

$$M_H(\zeta_t(\tau)) = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^t zf(\tau+z)dz. \tag{5}$$

Для дискретной части смешанной случайной величины (1) имеем следующее значение математического ожидания:

$$M_D(\zeta_t(\tau) = t\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}. \tag{6}$$

Складывая выражения (5) и (6), получим общее значение математического ожидания для смешанной случайной величины (1), равное

$$M(\zeta_t(\tau)) = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^t zf(\tau+z)dz + t\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}.$$

Так как

$$\frac{1}{P(\tau)}\int_0^t zf(\tau+z)dz = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^t P(\tau+z)dz - t\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)},$$

то, согласно (2), получим искомую формулу (3).

3. Свойства показателя $r_t(\tau)$

Формула (3) позволяет установить следующие свойства показателя $r_t(\tau)$

С.1. Если $t > 0,\ \ mo\ \ r_t(\tau) > 0.$

С.2. $r_0(\tau) = 0.$

С.3. $\dfrac{\partial r_t(\tau)}{\partial t} = \dfrac{P(\tau+t)}{P(\tau)} > 0.$

С.4. $\dfrac{\partial^2 r_t(\tau)}{\partial t^2} = -\lambda(\tau+t)\dfrac{\partial r_t(\tau)}{\partial t} < 0,$

где

$$\lambda(z) = -\frac{P'(z)}{P(z)} \text{ - интенсивность отказов.} \quad (7)$$

С.5. $r_t(\tau) \le t.$

С.6. $r_t(\tau) \ge \dfrac{P(\tau+t)}{P(\tau)}t.$

Первые четыре свойства следуют непосредственно из формулы (3), а свойства 5 и 6 также из (3) с учетом в ней следующей оценки интеграла:

$$P(\tau + t)t \le \int_{\tau}^{\tau+t} P(u)du \le P(\tau)t.$$

С.7. $\lim\limits_{t \to \infty} r_t(\tau) = R(\tau)$,

где $R(\tau) = M[(\zeta - \tau) | \zeta > \tau]$ - средний остаточный ресурс объекта сверх времени τ, ζ – наработка до отказа объекта.

Для установления справедливости свойства 7 достаточно записать следующую интегральную форму записи [1]:

$$R(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} P(u)du.$$

Перечисленные свойства позволяют построить примерный график функции $r_t(\tau)$ как переменной от величины t.

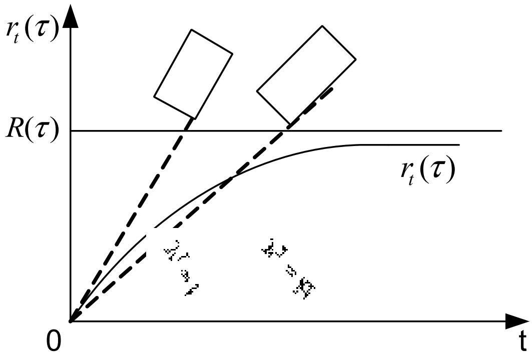

Рис 1.

Из рис.1 видно, что как функция переменной t показатель $r_t(\tau)$ монотонно растет, начиная с нуля до значения $R(\tau)$ - среднего остаточного ресурса сверх времени τ для объектов, у которых $P(u) \equiv 1$ при $u \in [\tau, \tau + t]$. Причем значение $R(\tau)$ служит горизонтальной асимптотой для показателя $r_t(\tau)$. Выпуклость кривой направлена кверху и степень выпуклости определяется не только скоростью $\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial t}$ по переменной t, но и интенсивностью отказов, как по переменной t, так и по переменной τ. Кроме того, видно, что значительная часть значений показателя $r_t(\tau)$ при больших величинах t находится между двумя прямыми $y_1 = t$ и $y_2 = kt$, где $k = \dfrac{P(\tau+t)}{P(\tau)} < 1$, причем при увеличении значений t разброс принимаемых значений показателя $r_t(\tau)$ увеличивается, и, напротив, при уменьшении t разброс принимаемых значений уменьшается.

Далее приведем свойства показателя $r_t(\tau)$, касающиеся переменной τ (начала наблюдений).

С.8. Теорема 1. *Справедлива следующая формула:*

$$\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial \tau} = \lambda(\tau) r_t(\tau) + \frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} - 1. \tag{8}$$

Доказательство. Используя формулу (3), имеем

$$\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{P^2(\tau)} [P(\tau)(P(\tau+t) - P(\tau)) - P'(\tau) \int_{\tau}^{\tau+t} P(u)du].$$

Откуда, используя формулу (7) и (3), легко найдем формулу (8), что и доказывает теорему 1.

С.9. Теорема 2. *Для того чтобы показатель $r_t(\tau)$ не зависел от переменной τ, необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов была бы постоянной величиной.*

Доказательство. Если $\lambda(t) \equiv \lambda_0 > 0$ - постоянная, то $P(t) = e^{-\lambda_0 t}$ и, следовательно, согласно формуле (3), находим

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\lambda_0}(1 - e^{-\lambda_0 t}), \tag{9}$$

откуда видно, что правая часть (9) не зависит от переменной τ и тем самым доказана достаточность условия.

Докажем необходимость условия, а именно: если показатель $r_t(\tau)$ не зависит от времени τ, то интенсивность отказов постоянна.

Так как $r_t(\tau)$ не зависит от τ, то

$$\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial \tau} = 0, \tag{10}$$

откуда, согласно (8), имеем

$$\lambda(\tau)r_t(\tau)+\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}-1=0. \tag{11}$$

Взяв производную по переменной t с учетом формулы (3), находим

$$\frac{\lambda(\tau)P(\tau+t)}{P(\tau)}+\frac{P'(\tau+t)}{P(\tau)}=0.$$

Используя выражение (7), получим

$$\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}[\lambda(\tau)-\lambda(\tau+t)]=0,$$

откуда имеем

$$\lambda(\tau)=\lambda(\tau+t) \tag{12}$$

Далее, взяв производную по переменной τ из соотношения (11) с учетом (10), находим

$$\lambda'(\tau)r_t(\tau)+\frac{1}{P^2(\tau)}[P'(\tau+t)P(\tau)-P'(\tau)P(\tau+t)]=0$$

Учитывая (7) получим

$$\lambda'(\tau)r_t(\tau)+\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}[\lambda(\tau)-\lambda(\tau+t)]=0\cdot$$

Откуда, согласно (12), имеем

$$\lambda'(\tau)r_t(\tau)=0$$

Так как $r_t(\tau)>0$ в силу свойства С.1, то

$$\lambda'(\tau)=0,$$

что и доказывает необходимость условия и тем самым теорему 2.

Будем говорить, что объект «стареющий», если его интенсивность отказов $\lambda(t)$ как функция времени t монотонно возрастает. Тогда справедливо следующее свойство.

С.10. Теорема 3. *Для стареющих объектов показатель* $r_t(\tau)$ *как функция переменного* τ *монотонно убывает.*

Доказательство. Вначале установим следующую оценку:

$$r_t(\tau) < \frac{1}{\lambda(\tau)}(1 - e^{-t\lambda(\tau)}) \tag{13}$$

Так как [1]

$$P(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(u)du),$$

то

$$\frac{P(u)}{P(\tau)} = \exp(-\int_\tau^u \lambda(x)dx), \tag{14}$$

откуда с учетом условия монотонности интенсивности отказов $\lambda(x) > \lambda(\tau)$, имеем

$$\frac{P(u)}{P(\tau)} < \exp(-\lambda(\tau)(u-\tau)).$$

Учитывая эту оценку в формуле (3), получим

$$r_t(\tau) < \int_\tau^{\tau+t} \exp(-\lambda(\tau)(u-\tau))du \cdot$$

Вычисляя интеграл, легко находим оценку (13).

Далее, используя доказанную оценку (13) в формуле (8), имеем

$$\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial \tau} < \frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} - \exp(-t\lambda(\tau)). \tag{15}$$

Так как, согласно (14),

$$\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} = \exp(-\int_\tau^{\tau+t} \lambda(x)dx), \tag{16}$$

то вновь, с учетом монотонности интенсивности отказов, получим

$$\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} < \exp(-t\lambda(\tau)).$$

Учитывая это в соотношении (15), находим

$$\frac{\partial r_t(\tau)}{\partial \tau} < 0,$$

откуда следует, что показатель $r_t(\tau)$ как функция переменного τ монотонно убывает, что и доказывает теорему 3.

Точно так же доказывается следующее свойство.

С.11. Теорема 4. *Для технических объектов, у которых интенсивность отказов как функция времени монотонно убывает, показатель* $r_t(\tau)$ *как функция переменного* τ *монотонно возрастает.*

Теперь установим асимптотическое свойство показателя $r_t(\tau)$.

С.12. Теорема 5. *Пусть*

$$\lim_{\tau\to\infty}\lambda(\tau) = \mathrm{Z}, \tag{17}$$

тогда справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\tau\to\infty} r_t(\tau) = \frac{1}{\mathrm{Z}}(1-e^{-t\mathrm{Z}}) \tag{18}$$

Доказательство. Так как при $\tau\to\infty$ выражение для показателя $r_t(\tau)$ согласно (3) есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} r_t(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{P(\tau+t)-P(\tau)}{P'(\tau)}.$$

Используя формулу (7), получим

$$\lim_{\tau\to\infty} r_t(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda(\tau)}\left(1-\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}\right)\right). \tag{19}$$

Далее, используя формулу (16) и теорему о среднем для интеграла, находим

$$\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)} = \exp(-\lambda(\tau+\theta)t),$$

где $0 < \theta < t.$ Откуда, согласно (17), имеем

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{P(\tau + t)}{P(\tau)} = \exp(-Zt).$$

Учитывая это и (17) в соотношении (19), получим искомое соотношение, что и доказывает теорему 5.

Таким образом, для оценки технического ресурса объектов на заданном временном интервале предложен показатель, исследованы его свойства и оценки.

Литература

Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Советское Радио, 1969. – 488с.