Пропой А. И.
Институт системного анализа, Москва

ХАРАКТЕРИСТИКА ЕВКЛИДОВЫХ И ПСЕВДОЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение

Во многих задачах естественно вводится норма (длина) вектора линейного пространства. Основным геометрическим объектом таких пространств является выпуклое центрально симметричное тело (например, множество допустимых скоростей в задачах оптимального управления), калибр которого (функционал Минковского) определяет норму вектора.

Однако в задачах управления необходимо еще и уметь оценивать отклонение от заданного направления движения. Таким образом, возникает вопрос, как можно определить скалярное произведение в таких пространствах, или, другими словами, при каких условиях нормированное пространство становится евклидовым? Геометрически этот вопрос можно сформулировать таким образом: при каких условиях множество допустимых направлений движения из данного состояния является эллиптическим конусом, или, что эквивалентно, когда выпуклое симметричное тело (шар нормированного пространства) становится эллипсоидом?

Этим вопросам посвящена обширная литература, начиная с классической работы [1] (см. также [2,3]).

Заметим, что конечномерные Банаховы пространства иногда называют пространством Минковского [4]. Мы, однако, будем называть такие пространства обобщенным евклидовым пространством (имея ввиду геометрическую близость этого пространства евклидовому), оставляя за пространством Минковского название псевдоевклидового пространства сигнатуры $(1, n)$, геометрия которого существенно другая, чем евклидова.

Характеризация евклидового (или псевдоевклидового) пространства имеет принципиальное значение и в специальной теории относительности, в связи с установлением теоремы Александрова-Зеемана [5 - 7], где рассматриваемый вопрос формулируется так: при каких условиях световой конус (задающий основную структуру в пространстве-времени — отношение порядка) является эллиптическим?

В настоящей работе вопросы характеризации евклидового пространства рассматриваются с точки зрения теории управления. Показано, что задача выбора направления движения практически с необходимостью приводит к евклидовому фазовому пространству. Показана также общность базовых геометрических конструкций управления в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах.

2. Обобщенное евклидово пространство

Рассмотрим n-мерное линейное пространство X, в котором определено множество B. Предполагается, что B — замкнутое ограниченное выпуклое тело, симметричное относительно нуля пространства. Такое множество будем называть шаром пространства X.

Определим калибровочную функцию (функционал Минковского) множества B

$$q(x) = q_B(x) = \inf\{r \geqslant 0 \,|\, x \in rB\}. \tag{1}$$

Из определения следует, что

$$B = \{x \,|\, q(x) \leqslant 1\}, \tag{2}$$

т.е. функция q калибрует множество B: $q(x_*) = 1$ для граничных точек множества B и $q(x) > 1$, если $x \notin B$.

Калибровочную функцию можно определить и для произвольного множества с непустой внутренностью, однако в дальнейшем понадобятся свойства функции q, связанные с выпуклостью и симметрией множества B.

Предложение 1. Калибровочная функция удовлетворяет свойствам:

$$q(\lambda x) = \lambda q(x),\ \lambda > 0 \text{ (положительная однородность)}, \tag{3}$$

$$q(x + z) \leqslant q(x) + q(z) \text{ (субаддитивность)}. \tag{4}$$

Функции, удовлетворяющие этим свойствам, называются сублинейными функционалами. Отметим, что из (3), (4) следует выпуклость q.

Помимо рассмотренных свойств, функция q удовлетворяет условию $q(x) = q(-x)$ (следует из симметрии множества B); кроме того, $q(x) > 0$, если $x \neq 0$, т.е. q — норма: $q(x) = \|x\|$.

Таким образом, задание множества B (шара) в пространстве X делает это пространство нормированным; обратно, задание сублинейного функционала q на X определяет в этом пространстве единичный шар по формуле (2).

Вообще, между нормами и выпуклыми телами, симметричными относительно начала пространства, существует взаимно однозначное соответствие [8].

Положим $\rho(x, z) = q(x - z)$. Эта функция удовлетворяет условиям: $\rho(x, z) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = z$; $\rho(x, z) = \rho(z, x)$;

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x) + \rho(z) \text{ (неравенство треугольника).} \tag{5}$$

Таким образом, ρ — функция расстояния, а X — метрическое пространство.

Метрику ρ, удовлетворяющую неравенству треугольника, будем называть обобщенной евклидовой метрикой. (Если эта метрика описывается положительно определенной квадратичной формой, то ρ — евклидова метрика.)

Отметим, в заключение, что множество B является основной характеристикой возбудимой среды. Именно, пусть $R_\tau(x)$ — множество состояний, возбужденных нейроном x за время τ. В линейном (однородном) случае $R_\tau(x) == x + \tau c B$, где множество $B = \{x \,|\, q(x) \leqslant \tau c\}$, c — скорость распространения возбуждения. В задачах оптимального управления источником построения множества B является множество допустимых скоростей $\{v \,|\, v = f(x, u),\ u \in U\}$.

3. Характеристика евклидова пространства

Пусть (X, q) — конечномерное нормированное пространство. Поставим задачу, при каких условиях на норму $q(x) = \|x\|$ пространство (X, q) становится евклидовым?

Как уже отмечалось, основой многих характеризаций евклидова пространства является теорема Йордана-Неймана, которую сформулируем в следующем виде:

Предложение 2 [1]. Пусть (X, q) — нормированное пространство размерности $n \geqslant 2$, $\|x\| = q(x)$.

Пространство X евклидово тогда и только тогда, когда для всех u_1, u_2 справедливо

$$q^2(u_1 + u_2) + q^2(u_1 - u_2) = 2[q^2(u_1) + q^2(u_2)]. \tag{6}$$

При этом

$$4g(u_1, u_2) = q^2(u_1 + u_2) - q^2(u_1 - u_2), \tag{7}$$

$$g(u, u) = q^2(u) = u^2,\ u \in X. \tag{8}$$

Доказательство того, что при выполнении (6) выражение справа в (7) является симметричной положительно определенной билинейной формой см., например, в [2].

Соотношение (6) — это закон параллелограмма: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Как легко видеть, (6) выполняется в евклидовом пространстве. Обратное утверждение доказано в [1], при этом скалярное произведение (7) индуцируется нормой (8).

Настоящая работа посвящена геометрическому анализу условий (6) – (8).

4. Понятие эллипса

Пусть (X, g) — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $g : X \times X \to R$.

Определим в (X, g) единичный шар

$$E = \{x \,|\, g(x, x) \leqslant 1\}. \tag{9}$$

Пусть в X задана другая метрика g', тогда (9) — шар в метрике g и эллипсоид в метрике g'. В дальнейшем будем не различать эти понятия.

Фиксируем два произвольных линейно независимых вектора u_1 и u_2. Они определяют линейное подпространство $R^2(u_1, u_2) = \mathrm{span}(u_1, u_2)$ пространства X. Положим

$$2v = u_1 + u_2,\ 2w = u_1 - u_2, \tag{10}$$

откуда

$$u_1 = v + w,\ u_2 = v - w. \tag{11}$$

Пары взаимносвязанных векторов (u_1, u_2) и (v, w) образуют базисы и соответствующие системы координат в двумерном пространстве R^2.

Отметим, что базисы (u_1, u_2) и (v, w) (пока) равноправны: задание базиса (u_1, u_2) определяет из (10) базис (v, w), обратно, задание (v, w) определяет из (11) базис (u_1, u_2).

Однако это равноправие исчезает, если в пространстве X ввести метрику.

Зададим в R^2 скалярное произведение g матрицей Грама в базисе (v, w):

$$g(v, v) = v^2,\ g(w, w) = w^2,\ g(v, w) = g(w, v) = 0. \tag{12}$$

В этой метрике базис (v, w) становится ортогональным.

Отметим, что скалярное произведение по матрице Грама в заданном базисе определяется однозначно [9].

В базисе (v, w) эллипс имеет представление

$$E_r = \{(t, \tau) \,|\, t^2 v^2 + \tau^2 w^2 \leqslant r^2\}, \tag{13}$$

где $u = tv + \tau w$ — произвольный вектор пространства R^2, (t, τ) — его координаты в этом базисе.

В этом же представлении скалярное произведение двух векторов $u = tv + \tau w$ и $u' = t'v + \tau' w$ имеет вид

$$g(u, u') = tt'v^2 + \tau\tau' w^2. \tag{14}$$

В частности, если $u' = u^- = tv - \tau w$ (отражение вектора u относительно оси Rw, см. п. 5), то

$$g(u, u^-) = t^2 v^2 - \tau^2 w^2. \tag{15}$$

Положим $u = tv + \tau w = \hat{v} + \hat{w}$. Отсюда и из (13) следует, что эллипс можно задать в виде

$$E = \{(v, w) \in R^2 \,|\, q^2(v) + q^2(w) \leqslant r^2\}, \tag{16}$$

т.е. эллипс состоит из произвольных пар векторов (v, w) (фиксированного) подпространства R^2, длины которых удовлетворяют неравенству $v^2 + w^2 \leqslant r^2$.

Обсудим логику этого определения. Как уже отмечалось, базисы (u_1, u_2) и (v, w) взаимосвязаны, причем выбор одного из них произволен. При этом можно всегда так подобрать метрику $g : R^2 \times R^2 \to R$, в которой один из базисов становится ортогональным (в данном случае — это (v, w)). Выбор такой метрики неоднозначен и определяется длинами векторов (v, w) и условием их ортогональности (12), причем в одной из метрик из множества таких метрик (16) — шар, в остальных — эллипс.

Отсюда следует

Определение 1. Назовем эллипсом множество $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, где x_1, x_2 — координаты вектора x в (произвольном) базисе a_1, a_2: $x = x_1a_1 + x_2a_2$.

Пусть (u_1, u_2) — произвольный базис. Выравнием длины векторов u_i: $\hat{u}_i = (r/q(u_i))u_i$, $q(\hat{u}_i) = r$, $i = 1, 2$ (или так выберем метрику, чтобы в ней заданные векторы (u_1, u_2) имели одинаковую длину). В дальнейшем крышку в обозначениях таких векторов будем опускать.

Для векторов $u_1 = v + w$, $u_2 = v - w$, $q(u_1) = q(u_2) = r$, закон параллелограмма (6) переходит в теорему Пифагора:

$$q^2(v) + q^2(w) = q^2(v + w),\ q^2(v) + q^2(w) = q^2(v - w), \tag{17}$$

где векторы v и w определены из (10), причем $g(v, w) = 0$.

В соответствии с (16), соотношения (17) определяют эллипс двумерного подпространства пространства X. Поскольку выбор векторов (u_1, u_2) (и, следовательно, векторов (v, w)) произволен, то из предложения 2 следует

Предложение 3. Нормированное пространство (X, q) — евклидово тогда и только тогда, когда любое (центральное) сечение шара B (2) пространства (X, q) двумерной плоскостью является эллипсом.

Как нетрудно видеть, предложение 3 является геометрическим следствием предложения 2 (и определения эллипса (16) [2]) Его также можно получить из приведенных выше конструкций. Действительно, пусть $B_r = rB$ — шар радиуса r пространства (X, q). Фиксируем две разные точки z_1 и z_2 на сфере таким образом, чтобы векторы $u_1 = z_1 - x_0$ и $u_2 = z_2 - x_0$ ($x_0 = 0$ — центр шара) не были бы коллинеарными. По векторам (u_1, u_2) найдем векторы (v, w) из (10). Обозначим симплекс, образованный точками (x_0, z_1, z_2) через S_v, где вектор v рассматривается как ось симплекса. По симплексу S_v определим скалярное произведение g_v в R^2 из (12) и построим соответствующий эллипс E_v (16). Ясно, что если этот эллипс один для всех v: $E = E_v$, то он совпадает с сечением шара B_r (1) двумерной плоскостью, образованной точками (x_0, z_1, z_2), при этом $g_v(u, u) = g(u, u) = q^2(u)$, $u \in X^2$. Другими словами, вращение базиса (u_1, u_2) (и соответствующего симплекса S_v) в пространстве $R^2(u_1, u_2)$ "выметает" в этом пространстве эллипс E (отсюда определение 1). Поскольку выбор точек z_1, z_2 на n-мерной сфере $\bar{B}_r$ был практически произволен, отсюда следует предложение 3. (Переход $n \to n+1$, n размерность пространства X, рассмотрен также в заключении.)

Замечание 1. Как будет видно из дальнейшего, необязательно рассматривать только центральные сечения, т.е., если любое сечение шара B двумерной плоскостью имеет (проективный) центр симметрии, то B эллипсоид [5]. Таким образом, эллипсоид — это "наиболее симметричное выпуклое тело" [10].

5. Изометрические отражения

Фиксируем вектор v линейного пространства X. Этому вектору соответствует разложение

$$X = X_v \oplus X_v^{\perp}, \tag{18}$$

или $x = tv + w$, $w \in W = X_v^{\perp}$. Здесь X_v — одномерное подпространство (прямая Rv) пространства X, задаваемое вектором v, $W = X_v^{\perp}$ — прямое дополнeнеие к X_v (определяемое неоднозначно).

Фиксируем теперь линейный функционал $p \in X^*$. Этому функционалу соответствует разложение $X = X_p \oplus X_p^{\perp}$, или $x = tv + w$, $w \in X_p$, $v \in X_p^{\perp}$. Здесь X_p — ядро функционала p, $X_p^{\perp}$ — прямое дополнение к X_p.

Векторы $v \in X$ и $p \in X^*$ будем называть согласованными (сопряженными), если $X_v = X_p^{\perp}$ и $X_p = X_v^{\perp}$. Для них будем использовать обозначения v и v^*, соответственно.

Определим оператор отражения $R_w : \; u \to u - 2ww^*(u), \; w^* \in X^*, w^*(w) = 1$.

В "координатах" $(w^*(v) = 0)$:

$$R_w(u) = R_w(tv + w) = tv - w = u^-. \tag{19}$$

Оператор R_w в (X, q) назовем изометрическим, если $q(R_w(u)) = q(u)$ для всех $u \in X$.

Рассмотрим построение такого оператора в двумерном подпространстве пространства X.

Фиксируем одномерное подпространство X_v вектором v и пусть $z \notin Rv$. Пусть $u = z - x_0$, $x_0 = 0$. Будем искать точку z^- и вектор $u^- = z^- - x_0$ такие, что, во-первых, $q(u) = q(u^-)$ и, во-вторых, середина $\bar{x}$ отрезка $[z, z^-]$ лежит на прямой Rv.

Положим $\bar{x} - x_0 = tv$, $\;z - \bar{x} = \bar{x} - z^- = w$, $q(u) = q(u^-) = ct$, $q(v) = \beta c$, $0 < \beta < 1$. Отметим, что векторы (u, u^-) и (tv, w) удовлетворяют соотношениям (10)и(11).

Если теперь задать оператор отражения R_w (найденным) вектором w, то он, в общем случае нормированного пространства (X, q) не будет изометрическим: $q(R_w y) \neq q(y)$, $y \in X$, или $q(tv + w) \neq q(tv - w)$, $t > 0$. Равенство достигается только на векторе $y = u$, определяемого заданной точкой z (по которому ищется вектор w).

Рассмотрим теперь вектор отражения $R_v = I - 2vv^*$, $v^* \in X^*$. Он переводит вектор $u = tv + w$ в вектор $u^- = -tv + w$. Опять, в общем случае нормированного пространства $q(tv + w) \neq q(-tv + w)$, $t > 0$.

Отметим, что в то же время $q(tv + \tau w) = q(-tv - \tau w)$, $\;t, \tau > 0$, в силу центральной симметрии шара B.

Таким образом, оператор отражения не переводит одну половину шара B в другую.

Нетрудно проверить, что все эти совпадения реализуются только в случае евклидового шара. Обратное утверждение следует из предложения 2 (или из приведенных выше рассуждений). Таким образом, справедливо

Предложение 3. Пространство (X, q) евклидово тогда и только тогда, когда для любого вектора $v \in X$ существует линейный функционал $v^* \in X^*$, такой, что оператор отражения R_v является изометрией.

Таким образом, эллипсоид — это такое множество, для которого любая его половина отражается в другую.

Отметим, что предложение 3 связано с известной проблемой Мазура изометрического вращения в нормированном пространстве (см., например, [11]). Предложение 3 может быть обобщено на общий случай (бесконечномерных) нормированных пространств [12].

6. Эллиптический конус

Основное геометрическое понятие, связанное со скалярным произведением — угол между векторами. В нормированном пространстве (X, q) такого понятия нет (хотя можно ввести обобщенное (несимметричное) скалярное произведение [13]). Таким образом, естественно возникает вопрос определения скалярного произведения через длины (нормы) векторов (что позволит считать нормированное пространство евклидовым).

Ответ на него следует из предложения 2.

Пусть (u_1, u_2) — два произвольных вектора. Тогда, в соответствии с (7),

$$g(u_1, u_2) = q^2(v) - q^2(w), \tag{20}$$

где векторы v, w определены из (10). Заметим, что в базисе (v, w) векторы u_1, u_2 становятся “противоположными” (см. (11), (15)).

В частности, если $q(u_1) = q(u_2) = c$, то

$$\cos 2\varphi = (v^2 - w^2)/c^2, \tag{21}$$

где φ — угол между векторами (u_1, v) или (u_2, v).

Формула (20) верна для евклидова пространства со скалярным произведением g, $g(x, x) = q^2(x)$. Эту формулу можно использовать для характеризации евклидова пространства следующим образом.

В пространстве (X, q) по заданным векторам u_1, u_2, $q(u_1) = q(u_2)$, построим симплекс S_v с осью v (см. конец п. 4). Будем вращать этот симплекс относительно оси v (для этого необходимо, чтобы $\dim X = n \geqslant 3$). При этом вращении будем следить за поведением векторов u_1, u_2 и вектора $w = (u_1 - u_2)/2$.

Если конец вектора u_1 при вращении остается на сфере $\{u \,|\, q(u) = q(u_1)\}$, то это не означает, что в случае нормированного пространства (X, q) вектор w будет “выметать” некоторую гиперплоскость (в частности, двумерную плоскость $R^2(w, w')$), ортогональную вектору v.

Если при вращении вектор w принадлежит $(n-1)$-мерному подпространству W и $q(w') = q(w)$, $w', w \in W$, то это не означает, что в случае нормированного пространства (X, q) конец вектора w будет оставаться на n-мерной сфере пространства X: может быть, что $q(v + w') \neq q(v + w)$, $u' = v + w'$, $u = v + w$.

Необходимые совпадения верны тогда и только тогда, когда X — евклидово пространство.

Именно, в пространстве (X,q), $\dim X = n \geqslant 3$, рассмотрим шар $B_r = \{u \,|\, q(u) \leqslant r^2\}$, $r = c$. Зададим гиперплоскость

$$H_\beta = \{u \,|\, p(u) = \beta c\}, \tag{22}$$

где p — линейный функционал, $0 < \beta < 1$. Рассмотрим сечение F_ρ шара B_r гиперплоскостью H_β: $F_\rho = B_r \cap H_\beta$. Граница этого множества определяется условиями

$$\bar{F}_\rho = \{u \,|\, q(u) = c,\ p(u) = \beta c\}. \tag{23}$$

Предложение 4. Пространство (X,q) евклидово тогда и только тогда, когда сечение шара B_r^n гиперплоскостью H_β при любых $p \in X^*$ и $0 < \beta < 1$ является $(n-1)$-мерным шаром $B_\rho^{(n-1)} = \{w \,|\, q(w) \leqslant \rho\}$.

Хотя предложение 5 внешне выглядит как естественное обобщение предложения 3 (на произвольные сечения шара), в его основе лежат важные конструкции теории управления (см. также предложение 5).

Прежде всего отметим, что в принципе максимума основной конструкцией является гиперплоскость, опорная к шару B, при этом шар рассматривается как множество допустимых скоростей, гиперплоскость задается локальной целью — линейным функционалом p, а оптимальное направление движения определяется однозначно условием опорности (если множество B — строго выпуклое).

В настоящей работе рассматривается сечение шара гиперплоскостью, которое приводит к конусу допустимых направлений движения из точки x_0:

$$K = \{tu \,|\, u = z - x_0,\ z \in F_\rho,\ t \geqslant 0\}. \tag{24}$$

В пространстве X выделим направление движения вектором v и рассмотрим разложение $X = X_v \oplus W$, $W = X_v^\perp$ (см. (18)). Тогда $u = tv + w$, и в этом представлении определим конус

$$K(v) = \{(t,w) \,|\, q^2(w) \leqslant t^2 v^2,\ t \geqslant 0,\ w \in W\},\ v^2 = q^2(v). \tag{25}$$

Отметим, что если в (25) фиксировать число $t = \bar{t}$, то (25) определит в пространстве W шар радиуса $\rho^2 = \bar{t}^2 v^2$.

Назовем множество $K(v)$ круговым конусом пространства (X,q) с осью Rv.

Вернемся к сечению (23). Будем строить его последовательно, увеличивая размерность подпространства $W = X_p$, $p(w) = 0$, $w \in W$.

Как и при доказательстве предложения 2, фиксируем две точки z_1, z_2 и построим двумерный симплекс S_v. Этому симплексу соответствуют два базиса (u_1, u_2) и (v, w), где $u_i = z_i - x_0$, $i = 1, 2$; $w = w_1 = z_1 - \bar{x} = u_1 - v$, $z_2 - \bar{x} = u_2 - v = -w_1$, $\bar{x}$ — середина отрезка $[z_1, z_2]$. Точки z_1, z_2 определяют аффинное многообразие $\operatorname{aff}(z_1, z_2)$ и одномерное линейное подпространство W^1; аналогично, точки z_1, z_2, x_0 определяют аффинное многообразие $\operatorname{aff}(z_1, z_2, x_0)$ и линейное подпространство $X^2 = \operatorname{span}(u_1, u_2)$.

Пусть теперь $z_3 \notin \operatorname{aff}(z_1, z_2, x_0)$. Положим $u_3 = z_3 - x_0$, $w_2 = z_3 - \bar{x} = u_3 - v$. Линейному подпространству $X^3 = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$ отвечают два базиса (u_1, u_2, u_3) и (v, w_1, w_2) и разложение $X^3 = X_v \oplus W^2$, $W^2 = \operatorname{span}(w_1, w_2)$.

В пространстве X^3 определим скалярное произведение $g : X^3 \times X^3 \to R$, которое в базисе (v, w_1, w_2) имеет представление

$$g(v, w_1) = g(v, w_2) = g(w_1, w_2) = 0,$$

$$g(v, v) = q^2(v),\ g(w_i, w_i) = q^2(w_i),\ i = 1, 2.$$

В этой метрике базис (v, w_1, w_2) становится ортогональным, W^2 — ортогональное дополнение к X_v в разложении пространства X^3.

В базисе (v, w_1, w_2) произвольный вектор $u \in X^3$ имеет представление $u = tv + \tau w_1 + s w_2$, при этом $u^2 = t^2 v^2 + \tau^2 w_1^2 + s^2 w_2^2$.

В этом базисе определим конус

$$K^3(v) = \{(t, \tau, s) \,|\, \tau^2 q^2(w_1) + s^2 q^2(w_2) \leqslant t^2 q^2(v)\}. \qquad (26)$$

В соответствии с определением 1, множество (26) при фиксированном t определяет эллипс в пространстве W^2. Конус $K^3(v)$ назовем эллиптическим конусом трехмерного пространства X^3 с осью Rv.

Определение конуса (26) обобщается на n-мерное пространство $X^n = X_v \oplus W^{n-1}$, $n \geqslant 3$:

$$K^n(v) = \{(t, \tau) \,|\, \tau^2 q^2(w) \leqslant t^2 q^2(v),\ w \in W^{n-1}\}, \qquad (27)$$

или

$$K^n(v) = \{(t, w) \,|\, q^2(w) \leqslant t^2 q^2(v),\ w \in W^{n-1}\},$$

где теперь, в отличие от (25), $q^2(w_1 + w_2) = q^2(w_1) + q^2(w_2)$ для $w_1, w_2 \in W^{n-1}$.

Итак, вращение двумерного симплекса S_v относительно оси v определяет в пространстве X^n конус, а в подпространстве W^{n-1} — эллипсоид с центром в точке $\bar{x}$ (вершине вектора v).

Если при этом конус (27) будет совпадать с конусом (25) пространства (X, q) при любых $v \in X$, то X — евклидово пространство (X, g) с $q^2(x) = g(x, x)$, $x \in X$.

Из рассмотренных конструкций и предложения 4 следует

Предложение 5. Пространство (X, q) евклидово тогда и только тогда, когда любое сечение конуса K гиперплоскостью, задаваемой линейным функционалом $p \in K^*$, имеет центр симметрии $\bar{x}$.

Такое сечение является эллипсоидом с центром в точке $\bar{x}$, линейный функционал p определяет разложение (18), причем $v \perp X_p$, конус можно задавать в виде (25), (27), а сечение конуса плоскостью совпадает с сечением F_ρ шара этой плоскостью (см. (23)).

Отметим, что предложение 5 можно сформулировать еще и так: пространство (X, q) евклидово тогда и только тогда, когда любой луч внутри конуса K является его осью симметрии [5].

Отметим также, что предложения 4, 5 можно сформулировать и доказать, используя язык проективной геометрии [5].

Вычислим радиус эллипсоида F_ρ .

Зададим систему координат векторами (v, c_w), где $q(c_w) = c$ (здесь и далее вектор c_y коллинеарен вектору y и $q(c_y) = c$). Пусть $u = tv + \tau c_w$; считая, что $q(u) = ct$, определим двумерный конус

$$K(v) = \{(t, \tau) \mid t^2 v^2 + \tau^2 c^2 \leqslant c^2 t^2\}. \tag{28}$$

Положим $v = \beta c_v$, $q(v) = \beta c$. Если векторы tc_u, $t \geqslant 0$, — образующие конуса (28), то $\beta = \cos\varphi$, где φ — угол между векторами tc_u и tv (“раствор” конуса (28)).

С учетом того, что $v^2 = \beta^2 c^2$, определение (28) можно переписать в виде

$$K_\varphi(v) = \{(t, \tau) \mid (1 - \beta^2) t^2 \geqslant \tau^2\}, \ \beta = \cos\varphi. \tag{29}$$

Отметим, что соотношение

$$\tau^2 = (1 - \beta^2) t^2 \tag{30}$$

7. Псевдоевклидово пространство

Рассмотрим линейное пространство (X, K), частично упорядоченное конусом K: $z \geqslant x$ (z лучше x), если $z - x \in K$. Обратно, задание отношения порядка $\geqslant$ в пространстве X определяет положительный конус $K = \{x \,|\, x \geqslant 0\}$.

Пусть D — замкнутое подмножество конуса K. Множество D K-устойчиво, если $D + K = D$; множество D K-выпукло, если $D + K$ — выпуклое множество (сложение по Минковскому) [14].

Определение 2. Множество $D \subset K$ назовем псевдошаром конуса K, если оно K-устойчиво и (строго) выпукло.

Определим калибровочную функцию множества D (ср. (1)):

$$\mu(x) = \mu_D(x) = \sup\{\mu \,|\, x \in \mu D\}. \tag{35}$$

Предложение 6. Калибровочная функция μ удовлетворяет свойствам:

$$\mu(\lambda x) = \lambda \mu(x),\ \lambda > 0 \text{ (положительная однородность)},$$

$$\mu(x + z) \geqslant \mu(x) + \mu(z) \text{ (супераддитивность)}. \tag{36}$$

Функции, удовлетворяющие этим свойствам, называются суперлинейными функционалами.

Из предложения 6 следует, что

$$D_\theta = \{x \,|\, \mu^2(x) \geqslant \theta^2\},\ D_1 = D \tag{37}$$

(псевдошар радиуса $\theta > 0$); в частности, соотношение

$$K = D_0 = \{x \,|\, \mu^2(x) \geqslant 0\} \tag{38}$$

определяет (двойной) конус пространства X (и отношение порядка).

Таким образом, $\mu(x) \geqslant 0$, если $x \in K$, $\mu(x) = 0$ на образующих конуса K и $\mu(x) < 0$, если x лежит вне (двойного) конуса K. Отюда следует, что существуют векторы $v \in X$, для которых $\mu(v) > 0$, векторы $w \in X$, для которых $\mu(w) < 0$, а также векторы $c_y \in X$, $\mu(c_y) = 0$. В теории относительности такие векторы называются, соответственно, времениподобными, пространственноподобными и световыми.

Из супераддитивности (36) следует, что функция расстояния, порождаемая функцией $\mu : d(x, z) = \mu(x - z)$ удовлетворяет обратному (в обратную сторону) неравенству треугольника. По причинам, которые будут ясны далее, такую метрику будем называть обобщенной псевдоевклидовой метрикой. Подчеркнем, что из-за (4), (36) геометрия, задаваемая метриками q и μ существенно разная.

Напомним определение псевдоевклидовой метрики сигнатуры $(1, n-1)$.

Пусть (X, s) — линейное пространство со скалярным произведением $s : X \times X \to R$.

По определению, s — билинейная симметричная форма. Однако теперь будем рассматривать неопределенные (по знаку) формы. Именно, предполагается, что существует базис $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ пространства X, такой, что $s(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, $s(e_i, e_i) = -1$, $i = 1, \dots, n-1$, $s(e_0, e_0) = 1$.

Метрика, порождаемая скалярным произведением s, удовлетворяет обратному неравенству треугольника: $m(x + z) \geqslant m(x) + m(z)$, где $m^2(x) = s(x, x)$ [9]. Пространство (X, s) со скалярным произведением, удовлетворяющим указанным свойствам, называется псевдоевклидовым пространством сигнатуры $(1, n-1)$ или пространством Минковского. В рассматриваемом базисе $s(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_{n-1} y_{n-1}$.

Рассмотрим разложение (18), $X_v^{\perp} = W$, тогда $u = tv + w$, $w \in W$. В этом представлении, учитывая определение скалярного произведения в псевдоевклидовом пространстве, получим, что $s(u_1, u_2) = t_1 t_2 v^2 - g(w_1, w_2)$, где g — евклидово скалярное произведение в подпространстве W.

В частности, если $u_2 = u_1^- = u^- = tv - w$, то $s(u_1, u_2) = t^2 v^2 - q^2(w)$, $q^2(w) = g(w, w)$.

Отметим, что если (X, s) — псевдоевклидово пространство сигнатуры (n_1, n_2), $n_1 + n_2 = n$, то существует ортогональное разложение $X = W_1 \oplus W_2$, $\mathrm{dim} W_1 = n_1$, $\mathrm{dim} W_2 = n_2$, в котором $s(x, x') = g_1(w_1, w_1') - g_2(w_2, w_2')$, где g_1, g_2 — евклидовы (положительно определенные) скалярные произведения в подпространствах W_1, W_2, соответственно, $x = w_1 + w_2$, $x' = w_1' + w_2'$.

Условие $s(x, x) \geqslant 0$ выделяет в пространстве X (двойной) конус, при этом нулевые векторы: $s(x, x) = 0$ являются образующими этого конуса, а векторы x с $s(x, x) < 0$ лежат вне конуса.

Таким образом, введенная выше функция μ является естественным обобщением псевдоевклидовой метрики (отсюда и название). Возникает вопрос, при каких условиях (на функцию μ или множество D) пространство (X, μ) становится псевдоевклидовым, причем $\mu^2(x) =$

$s(x, x)$.

Ответ на этот вопрос дает предложение 2 (и следующие из него геометрические конструкции).

Как и ранее, рассмотрим два базиса, связанные соотношениями (10), (11). Однако теперь определим скалярное произведение (в двумерном пространстве) матрицей Грама следующего вида

$$s(v, w) = s(w, v) = 0, \; s(v, v) = q^2(v), \; s(w, w) = -q^2(w). \tag{39}$$

В этом представлении псевдошар пространства (X, s) задается соотношениями (ср. (16)):

$$D_\theta = \{u \,|\, s(u, u) \geqslant \theta^2\} = \{(v, w) \,|\, q^2(v) - q^2(w) \geqslant \theta^2\}.$$

Аналогично, скалярное произведение векторов u и u^- (ср. (15)):

$$s(u, u^-) = q^2(v) + q^2(w).$$

Таким образом, в псевдоевклидовом пространстве эти формулы как бы поменялись местами по сравнению с аналогичными формулами евклидового пространства.

Из этих рассуждений получим характеризацию псевдоевклидового пространства. Для этого вначале сформулируем предложение 2 как

Предложение 7. Если для произвольных векторов u_1, u_2 обобщенного евклидового пространства (X, q) двумерный шар $\{u \in R^2(u_1, u_2) \,|\, q^2(u) \leqslant r^2\}$ совпадает с эллипсом $\{(v, w) \in R^2(u_1, u_2) \,|\, q^2(v) + q^2(w) \leqslant r^2\}$, то X — евклидово пространство (X, g) и $g(u, u^-) = q^2(v) - q^2(w)$.

Учитывая сказанное, предложение 7 можно переформулировать следующим образом.

Предложение 8. Если для произвольных векторов u_1, u_2 обобщенного псевдоевклидового пространства (X, μ) двумерный псевдошар $\{u \in R^2(u_1, u_2) \,|\, \mu^2(u) \geqslant \theta^2\}$ совпадает с евклидовым псевдошаром $\{(v, w) \in R^2(u_1, u_2) \,|\, q^2(v) - q^2(w) \geqslant \theta^2\}$, то X — псевдоевклидово пространство (X, s) и $s(u, u_)) = q^2(v) + q^2(w)$.

8. Заключение

Из рассотренных конструкций видно, что при естественных предположениях о симметрии множества достижимости B фазовое пространство управляемой системы превращается из нормированного пространства в евклидово.

С другой стороны, показана тесная связь основных конструкций евклидового и псевдоевклидового пространств (хотя в целом геометрия этих пространств существенно разная).

Наконец, для управления естественно выделение одного (оптимального) направления движения. Отсюда следует важность разложения (18) и пространства Минковского (псевдоевклидового пространства сигнатуры $(1, n)$) в теории управления.

Связь всех этих конструкций особенно наглядно видна, если рассмотреть индукцию по размерности фазового пространства.

В разложении (18), $u = tv + w$, положим $v_{k+1} = v_k + w_k$, $k = 1, 2, \dots$ (т.е. вектор u рассматривается как новое направления движения). Из этого рекуррентного уравнения следует, что

$$v_{n+1} = v_0 + w_1 + \dots + w_n, \; v_0 = v_1. \tag{40}$$

Таким образом, $v_{n+1} \in X^{n+1}$ и $X^{n+1} = X_0^1 \oplus X^n$, где $X^n = W^n = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n)$.

В случае евклидового пространства (и ортогонального разложения)

$$t_{n+1}^2 = t_0^2 + q^2(w_1) + \dots + q^2(w_n), \tag{41}$$

где обозначено $t_k = q(v_k)$.

Соотношение (41) в пространстве $X^{n+2} = \mathrm{span(v_0, w_1, \dots, w_n, v_{n+1})}$ определяет эллиптический конус (его границу). Фиксируя в (41) число t_{n+1} , получим в пространстве $\mathrm{span(v_0, w_1, \dots, w_n)}$ сферу радиуса t_{n+1}, а фиксируя в (41) число t_0, получим в пространстве $\mathrm{span(w_1, \dots, w_n, v_{n+1})}$ псевдосферу радиуса t_0 и т.д. (см. также [15]).

Список литературы

1. *Jordan P., von Neumann J.* On inner products in linear metric spaces// Ann. of Math. 1935. V. 36. N. 2. P. 719-723.

2. *Day M.M.* Normed Linear Spaces. 1958. Springer Verlag. Berlin.

3. *Amir D.* Characterizations of inner product spaces. 1986. Birkhauser Verlag.

4. *Thomson A.C.* Minkowski Geometry. 1996. Cambridge Univ. Press. Cambridge.

5. *Alexandrov A.D.* A Contribution to Chronogeometry. 1967. Canadian J. Math. V.19. P.1119-1128.

6. *Naber G.L.* The Geometry of Spacetime. 1992. Springer.

7. *Гуц А. К.* Аксиоматическая теория относительности// УМН. 1982. Т. 37. Вып. 2(224).

8. *Рокафеллар Р.* Выпуклый Анализ. Мир. Москва. 1973.

9. *Кострикин А. И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. Наука. Москва. 1986.

10. *Gruber P.M., Odor T.* Ellipsoids are the most symmetric convex bodies// Archiv der Mathematik. 1999. V. 73. N. 5. P. 394-400.

11. *Randrianantoanina B.* A note on Banach-Mazur problem.// Glasgow Math. J. 2002. V. 44. P. 159–166.

12. *A. Skorik and M. G. Zaidenberg.* On isometric reflections in Banach spaces.// Mat. Fiz. Anal. Geom. 1997. 4(1-2). P. 212Ц247.

13. *Dragomir S.* Semi-inner Products and Applications. Nova Science. N.Y. 2004.

14. *Пропой А. И.* О построении метрики на конусе доминирования. I// АиТ. 4. 2004.

15. *Пропой А. И.* О построении метрики на конусе доминирования. II// АиТ. 5. 2004.