I. Оптимизация, игры и управление

Попков Ю. С.

Институт системного анализа, Москва

ЭНТРОПИЙНЫЕ МОДЕЛИ РОЖДАЕМОСТИ

Предлагаются динамические модели с энтропийным оператором, имитирующие пространственно - временную эволюцию возрастного распределения коэфициента рождаемости.

1. Введение

Естественным биологическим источником увеличения численности населения является деторождение. Этот процесс исключительно сложный. Здесь будет рассматриваться только его демографический аспект, который трактуется в терминах коэфициентов рождаемости или абсолютных значений численности новорожденных обеих полов. При этом следует иметь ввиду, что используемые коэфициенты рождаемости являются весьма усредненными характеристистиками демографического процесса рождаемости. Они возникают в результате многочисленных индивидуальных актов рождений, которые накапливаются и осредняются на определенном временном интервале.

Важной особенностью процесса рождаемости является существенная зависимость его характеристик от региона, в котором размещено население, от религиозно-культурных его традиций. В современном мире, где имеет место довольно свободное перемещение трудовых ресурсов, происходит взаимодействие групп населения с различными стандартами рождаемости, что можно трактовать как взаимодействие пространственных единиц с различными характеристиками рождаемости. На развитие такого взаимодействия оказывает определенное влияние социально-экономический статус региона и потребительский инстинкт различных групп населения. Однако, поскольку процесс рождаемости весьма инерционный, то последствия тех или иных социально-экономических или пропагандистких мероприятий могут наблюдаться через значительные интервалы времени. Инерция процесса рождаемости приводит к тому, что его характеристики - коэфициенты рождаемости и численности новорожденных - являются динамическими в том смысле, что их значения в данный момент времени зависят от эволюции их на некотором интервале времени «в прошлом».

2. Феноменология распределения новорожденных по возрастам матерей

Демографические характеристики рождаемости связаны с женской частью населения, возрастные группы которой принадлежат интервалу $I_f = [a_-^f,\, a_+^f]$, так называемых, фертильных возрастов (интервалу плодовитости). Размеры этого интервала, т.е. значения a_-^f и a_+^f, строго не определены. Наблюдается их зависимость от региона, религии, уровня жизни, социального статуса, времени и др. Здесь мы будем рассматривать интервал фертильности, зависящим только от региона, т.е.$a_-^f = a_-^f(n)$, $a_+^f = a_+^f(n)$ и $I_f = I_f(n)$, $\Delta_f = \Delta_f(n) = a_+(n) - a_-(n)$, где $n = 1, \ldots, N$.

Вначале рассмотрим женскую часть населения в произвольном регионе с номером n. Ее состояние характеризуется вектором $K_F(n,t)$ (**??**), компоненты которого определяют возрастное распределение женщин в регионе n в момент времени t. Обозначим

$$W_f(n,t) = \begin{pmatrix} K_F(n, a_-^f(n), t) \\ \cdots \\ K_F(n, a_+^f(n), t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

- вектор, характеризующий возрастное распределение фертильных женщин в n-ом регионе, и

$$C(n,t) = \begin{pmatrix} C(n, a_-^f(n), t) \\ \cdots \\ C(n, a_+^f(n), t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

- вектор, характеризующий распределение новорожденных в регионе n по возрастам женщин из интервала фертильности.

Реальное распределение $C(n,t)$ формируется под влиянием разнообразных факторов, причем многие из них могут быть даже неизвестны исследователю. С другой стороны, реальное распределение $C(n,t)$ есть усредненный результат многочисленных индивидуальных рождений, повторяющихся в более или менее одинаковых условиях. Поэтому распределение $C(n,t)$ можно рассматривать как характеристику ансамбля случайных и независисмых событий - индивидуальных рождений детей у женщин из возрастных групп $a_-^f(n)$, $a_-^f(n)+1,\ldots,a_+^f(n)$.

Возрастные группы можно рассматривать как «ящики», емкость $G_a(n,t)$ которых равна количеству женщин $K_F(n,a,t)$ данного возраста a умноженному на максимальное (биологическое) количество g рожденных одной женщиной детей единовременно, т.е.

$$G_a(n,t) = gK_F(n,a,t), \qquad a \in I_f. \tag{3}$$

Индивидуальные рождения у женщин из возрастной группы $a \in I_f(n)$ случайные, но может существовать априорная информация о вероятности таких событий. Обозначим $\nu(n,a,t)$ - априорную вероятность рождения ребенка у женщины из региона n, возрастной группы a, в момент времени t. Для всех женщин из этой группы априорная вероятность рождения одинаковая.

Итак, имеется $\Delta_f(n)+1$ женских возрастных групп, в каждой из которых может появиться не более $G(n,t)$ детей. Удобно рассматривать возрастную группу состоящей из $G(n,t)$ ячеек. Если у женщины из данной возрастной группы появляется ребенок, то считается, что ячейка заполнена, если ребенка нет, она пустая.

В результате реализации многочисленных случайных событий - рождений детей у женщин из разных возрастных групп, окажется, что у женщин группы $a_-^f(n)$ родилось $C(n,a_-^f(n),t)$ детей; у женщин группы $a_-^f(n)+1$ родилось $C(n,a_-^f(n)+1,t)$ детей; и т.д.; у женщин группы $a_+^f(n)$ родилось $C(n,a_+^f(n),t)$ детей. Это распределение характеризует вектор $C(n,t)$ (2). Поскольку предполагалось, что рождение ребенка у женщины из соответствующей возрастной группу - случайное событие, то вектор $C(n,t)$ является случайным вектором. Функция распределения вероятностей его реализации имеет вид:

$$\begin{aligned} p[C(n,t)] &= \prod_{a=0}^{A} \frac{G_a(n,t)!}{C(n,a,t)!(G_a(n,t)-C(n,a,t))!} \\ &\quad [\nu(n,a,t)]^{C(n,a,t)}[1-\nu(n,a,t)]^{(G_a(n,t)-C(n,a,t))}. \end{aligned} \tag{4}$$

Описанный выше случайный механизм появления детей у женщин из различных возрастных групп основан на схеме случайного размещения Y шаров по s ящикам. Ящики состоят из ячеек в количестве $g_1, \ldots, g_s$. В каждой ячейке может поместиться только один шар. Шары помечены, например, перенумерованы. Ящику приписана априорная вероятность μ_n того, что в него попадет шар, и соответственно, вероятность $1 - \mu_n$ того, что шар не попадет.

Шары размещаются по ячейкам в ящиках случайным образом и независимо друг от друга. Нас будет интересовать только количество шаров, попавших в каждый ящик, а именно: *в 1-ый ящик поппало* x_1 *шаров, во 2-ой -* x_2 *шаров, и т.д., в* s*-ый -* x_s *шаров.* Вероятность этого события в силу независимости распределительного процесса равна

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \prod_{n=1}^{s} P_n(x_n),$$

где $P_n(x_n)$ - вероятность попадания x_n шаров в n-ый ящик. Число x_n соответствует количеству ячеек, занятых шарами в ящике n. Причем, $x_n \leq g_n$, так как в каждой ячейке может находиться только один шар.

Рассмотрим произвольный ящик с номером n и Y шаров, которые случайно и независимо друг от друга попадают с априорной вероятностью μ_n или не попадают с априорной вероятностью $1 - \mu_n$ в этот ящик. Проведем g_n таких испытаний, причем каждое из них проводится с пустым ящиком (так называемые испытания с возвращением. В результате в ящик попадут x_n шаров, и $g_n - x_n$ ячеек окажутся пустыми. Поскольку шары случайно и независимо друг от друга оккупируют ячейки, вероятность события - x_n *ячеек оккупированы шарами и* $g_n - x_n$ *ячеек пустые* - будет равна $\mu^{x_n}(1 - \mu)^{g_n}$.

Поскольку шары помеченные, то данное событие может быть реализовано различными перестановками . Например, пусть $g_n = 4$ и $x_n = 2$. Тогда таких перестановок будет 6.

В общем случае количество перестановок x_n помеченных (перенумерованных) шаров по g_n ячейкам равно $\binom{g_n}{x_n}$.

В этом случае вероятность $P_n(x_n)$ равна вероятности того, что количество шаров x_n будет реализовано их первой перестановкой, или второй перестановкой, или .... или $\binom{g_n}{x_n}$-ой перестановкой, т.е.

$$P_n(x_n) = \binom{g_n}{x_n} \mu^{x_n}(1 - \mu)^{g_n}.$$

Отсюда имеем, что

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \prod_{n=1}^{s} \binom{g_n}{x_n} \mu^{x_n} (1-\mu)^{g_n}.$$

Напомним, что специфицированный по возрасту коэффициент рождаемости (ASFR) есть отношение численности новорожденных в соответствующей возрастной группе к численности фертильных женщин в этой возрастной группе:

$$b(n, a, t) = \frac{C(n, a, t)}{K_F(n, a, t)}, \qquad a \in I_f. \tag{5}$$

Причем это отношение - кусочно-постоянно, т.е.

$$b(n, a, t) = b(n, a, ql), \;\; \text{для всех}\, t \in [ql, (q+1)l). \tag{6}$$

Общий коэфициент рождаемости

$$b(n, t) = b(n, ql) = \sum_{a \in I_f} b(n, a, ql) \;\; \text{для всех}\, t \in [ql, (q+1)l) \tag{7}$$

так же является кусочно-постоянной функцией времени.

3. Энтропийная модель специфицированного по возрасту коэффициента рождаемости

Функция распределения вероятностей (4) имеет единственный «острый» максимум. Поэтому естественно ожидать, что потенциально реализуемым распределением новорожденных по возрастам женщин из интервала фертильности может быть распределение, соответствующее $\max p[C(n, t)]$.

Часто более удобными вероятностными характеристиками распределения $C(n, t)$ оказываются энтропийные функции. Существует довольно много определений энтропийных функции. Здесь будет использоваться термодинамическое определение энтропии, восходящее к Л.Больцману. Полагая n, t фиксированными параметрами, введем физическую энтропию

$$E = k \ln p[C(n, t)]. \tag{8}$$

лов, получим с точностью до константы выражение для энтропии

$$
\begin{aligned}
& H[C(n,t)] = -\sum_{a\in I_f(n)} C(n,a,t)\ln\frac{C(n,a,t)}{\tilde{\nu}(n,a,t)} + \\
+ \quad & [G(n,t)-C(n,a,t)]\ln[G(n,t)-C(n,a,t)], \qquad (9)\\
& n=1,\dots,N;\ t=0,\Delta,2\Delta,...
\end{aligned}
$$

где $\tilde{\nu}(n,a,t)=\nu(n,a,t)/(1-\nu(n,a,t))$. Функция $H[C(n,t)]$ называется обобщенной информационной энтропией Ферми-Дирака. Поскольку энтропия $H[C(n,t)]$ и распределение вероятностей $p[C(n,t)]$ связаны монотонным преобразованием (8 и аппроксимацией Стирлинга, то *распределение* $C(n,t)$, соответствующее максимуму вероятности, *будет соответствовать и максимуму энтропии* $H[C(n,t)]$.

В выражение (9) для энтропии входят две группы параметров. Первая из них содержит параметры $G_a(n,t)$, $a\in I_f$, которые характеризуют потенциальные возможности деторождения женщинами из соответствующих возрастных групп. Для определения численных значений этих параметров (3) имеются достаточно объективные статистические данные о биологических возможностях и численности фертильных женщин.

Вторая группа содержит априорные вероятности $\nu(n,a,t)$, $a\in I_f(n)$ рождения ребенка женщинами соответствующих возрастов. Функция $\nu(n,a,t)$ нормирована по переменной a, т.е. $\sum_{a\in I_f(n)}\nu(n,a,t)=1$. Поскольку функция $\nu(n,a,t)$ меняется во времени медленно, для вычисления ее значений в момент времени t можно, например, использовать ретроспективные данные о ASFR $b^r(n,a,t-s), b^r(n,a,t-s+1),\dots,b^r(n,a,t-1)$. Тогда за априорные вероятности для данного момента времени t можно принять их нормированное среднее значение на ретроспективном интервале s:

$$
\nu(n,a,t)=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{b^r(n,a,t-j)}{\sum_{a\in I_f(n)}\sum_{j=1}^{s}b^r(n,a,t-j)}. \qquad (10)
$$

Другой подход к формированию априорных вероятностей основан на описании функции $\nu(n,a,t)$ стандартным распределением, которое качественно отражало бы морфологию этой функции, а его параметры (причем, небольшое их число) зависили бы от региона, времени и, возможно, от каких-то еще факторов. На рис.4.1 показан качественный график функции $\nu(a)$ при фиксированных n,t. Он иллюстрирует естественное распределение вероятностей рождения ребенка у женщины из интервала фертильности: единственный максимум, зона наибольших вероятностей смещена в сторону младших возрастов, участок роста вероятности - более крутой, чем участок спада. Подходящим для описания этих особенностей является гамма-распределение с единственной модификацией, связанной с нормировкой на интервале $I_f(n)$:

$$\nu(n,a,t) = \begin{cases} Aa^{\gamma(n,t)}exp(-\varepsilon(n,t)a), & \text{если } a \in I_f(n), \\ 0, & \text{если } a \neq I_f(n), \end{cases} \tag{11}$$

где константа

$$A = \left[\sum_{a \in I_f(n)} a^{\gamma(n,t)} \exp(-\varepsilon(n,t)a) \right]^{-1}. \tag{12}$$

Функция $\nu(n,a,t)$ при фиксированных n,t зависит от целочисленной переменной a. Максимум функции $\nu(n,a,t)$ достигается при значении переменной

$$a = a^* = \begin{cases} [\tilde{a}], & \text{если } \nu(n,[\tilde{a}],t) \geq \nu(n,[\tilde{a}]+1,t), \\ [\tilde{a}]+1, & \text{если } \nu(n,[\tilde{a}],t) < \nu(n,[\tilde{a}]+1,t). \end{cases} \tag{13}$$

В этом выражении $[\bullet]$ обозначает целую часть числа $\bullet$ (ближайшее меньшее целое), и

$$\tilde{a} = \frac{\gamma}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Итак, в рамках принятых гипотез, распределение $C(n,t)$ (2) новорожденных по возрастам женщин из возрастного интервала $I_f(n)$ является случайным с функцией распределения вероятностей $p[C(n,t)]$ (4) и энтропией $H[C(n,t)]$ (9).

Наряду с указанным свойством распределение $C(n,t)$ должно удовлетворять определенным условиям. Первая группа содержит условия балансового типа:

$$\sum_{a \in I_f(n)} C(n,a,t) = K(n,0,t), \qquad n = 1,\ldots,N;\; t = 0,\Delta,2\Delta,... \tag{15}$$

Вторая группа содержит условия, возникающие из соотношения (**??**) между общим b и специфицированным по возрасту $b(a)$ коэфициентами рождаемости:

$$\sum_{a \in I_f(n)} \frac{C(n,a,t)}{K_F(n,a,t)} = b(n,t), \qquad n = 1,\ldots,N;\; t = 0,\Delta,2\Delta,... \tag{16}$$

Напомним, что из демографической статистики общая численность новорожденных $K(n,0,t)$ и общий коэфициент рождаемости $b(n,t)$ обычно известны.

Из полученных выражений для энтропии (9) и ограничений (15, 16) следует, что при фиксированных n,t, распределение новорожденных по возрастам женщин из интервала фертильности является решением следующей задачи:

$$H(C) = -\sum_{a\in I_f}\left(C(a)\ln\frac{C(a)}{\tilde{\nu}(a)} + [G_a - C(a)]\ln[G_a - C(a)]\right) \Rightarrow \max,$$
$$\sum_{a\in I_f} C(a) = K(0), \tag{17}$$
$$\sum_{a\in I_f}\frac{C(a)}{K_F(a)} = b.$$

Здесь $C(a) = C(n,a,t)$, $G_a = G_a(n,t)$, $K(0) = K(n,0,t)$, $b = b(n,t)$, $\nu(a) = \nu(n,a,t)$, $K_F(a) = K_F(n,a,t)$, $I_f = I_f(n)$.

Данная задача относится к классу задач на условный экстремум, и ее решение может быть найдено методом Лагранжа в терминах условий стационарности функции

$$L(C,\lambda,\nu) = H(C)+\lambda[K(0)-\sum_{a\in I_f} C(a)]+\mu[b-\sum_{a\in I_f}\omega_a C(a)], \quad \omega_a = \frac{1}{K_F(a)}, \tag{18}$$

где λ,μ - множители Лагранжа. Условия стационарности этой функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial C(a)} &= \ln\frac{G_a - C(a)}{C(a)}\tilde{\nu}(a) - \lambda - \omega_a\mu = 0,\ a\in I_f,\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= K(0) - \sum_{a\in I_f} C(a) = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \nu} &= b - \sum_{a\in I_f}\omega_a C(a) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда решение задачи (17) имеем вид:

$$C^*(a) = \frac{G_a\nu(a)}{\nu(a) + (1-\nu(a))u_* v_*^{\omega_a}}, \qquad u_* = \exp(\lambda_*),\ v_* = \exp(\mu_*),\ \ a\in I_f, \tag{20}$$

Специфицированный по возрасту коэфициент рождаемости

$$b(a) = \frac{C^*(a)}{K_F(a)}, \qquad a \in I_f. \tag{21}$$

Значения экспоненциальных множителей Лагранжа u_*, v_* определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \frac{1}{K(0)} \sum_{a \in I_f} \frac{G_a \nu(a)}{\nu(a) + (1-\nu(a))uv^{\omega_a}} = 1, \\ \Psi(u,v) &= \frac{1}{b} \sum_{a \in I_f} \frac{\omega_a G_a \nu(a)}{\nu(a) + (1-\nu(a))uv^{\omega_a}} = 1, \\ u &\geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Эта система нелинейных уравнений, несмотря на свой экзотический вид, имеет единственное решение (u_*, v_*), которое можно определить численно с помощью мультипликативного алгоритма следующего вида:

$$u^{m+1} = u^m[\Phi(u^m, v^m)]^\gamma, \qquad v^{m+1} = v^m[\Psi(u^m, v^m)]^\gamma, \tag{23}$$

где γ - параметр.

Пример 1. Продемонстрируем возможности предлагаемого метода определения специфицированного по возрасту матерей коэфициента рождаемости на примере Швеции. Интервал фертильности $I_f = [16, 44]$. В этом случае переменная $h = a - 16$ и длина интервала фертильности $\Delta_f = 28$. Примем величину $g = 5$ (см. (4)). В таблице 1 приведены значения ASFR ($b^r(a,t)$) за 1995 - 2000гг, в последней строке таблицы приведены значения TFR ($b^r(t)$) за этот же период. В таблице 2 приведены значения переменной $\tilde{\omega}_a^r = 10^5/K_F^r(a,t)$. Данные заимствованы из ежегодников EuroStat (1995-2000).

Таблица 1

Год / Возраст	1995	1996	1997	1998	1999	2000	$\bar{\nu}^r(a)$	$b(a,t)$
16	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.0005	0.0017
17	0.004	0.005	0.004	0.003	0.003	0.004	0.0016	0.0050
18	0.008	0.010	0.007	0.007	0.006	0.007	0.0032	0.0104
19	0.017	0.021	0.013	0.012	0.014	0.014	0.0065	0.0227
20	0.028	0.032	0.024	0.021	0.021	0.023	0.0106	0.0350
21	0.043	0.045	0.034	0.032	0.032	0.034	0.0157	0.0483
22	0.058	0.056	0.048	0.042	0.041	0.041	0.0206	0.0564
23	0.074	0.072	0.059	0.055	0.051	0.050	0.0262	0.0642
24	0.088	0.084	0.072	0.067	0.064	0.061	0.0276	0.0781
25	0.104	0.103	0.086	0.077	0.076	0.078	0.0376	0.0895
26	0.118	0.112	0.099	0.096	0.090	0.090	0.0434	0.1014
27	0.130	0.119	0.107	0.104	0.103	0.107	0.0475	0.1158
28	0.132	0.120	0.120	0.112	0.111	0.113	0.0502	0.1259
29	0.131	0.121	0.119	0.116	0.117	0.120	0.0509	0.1143
30	0.124	0.114	0.112	0.115	0.115	0.122	0.0489	0.0997
31	0.116	0.106	0.107	0.109	0.110	0.114	0.0462	0.0914
32	0.105	0.093	0.096	0.101	0.100	0.104	0.0417	0.0814
33	0.094	0.081	0.084	0.087	0.088	0.094	0.0379	0.0700
34	0.078	0.070	0.074	0.075	0.077	0.082	0.0315	0.0688
35	0.070	0.058	0.063	0.067	0.066	0.070	0.0273	0.0638
36	0.055	0.049	0.050	0.055	0.056	0.057	0.0223	0.0545
37	0.044	0.038	0.043	0.044	0.045	0.045	0.0180	0.0445
38	0.035	0.029	0.033	0.034	0.034	0.036	0.0139	0.0337
39	0.026	0.021	0.024	0.026	0.026	0.028	0.0104	0.0249
40	0.018	0.015	0.017	0.019	0.020	0.019	0.0075	0.0172
41	0.012	0.009	0.012	0.012	0.012	0.013	0.0048	0.0111
42	0.008	0.006	0.007	0.007	0.008	0.008	0.0030	0.0070
43	0.004	0.003	0.005	0.005	0.005	0.005	0.0018	0.0044
44	0.003	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.0010	0.0024
b^r	1.730	1.599	1.524	1.505	1.498	1.544	1.0000	1.543

Таблица 2

Год / Возраст	1995	1996	1997	1998	1999	2000
16	2.07	2.08	2.13	2.05	2.00	2.05
17	2.00	2.02	2.07	2.11	2.03	2.00
18	1.86	1.91	2.02	2.06	2.10	2.02
19	1.75	1.81	1.91	2.01	2.04	2.09
20	1.76	1.81	1.80	1.89	1.99	2.04
21	1.65	1.77	1.80	1.78	1.87	1.97
22	1.62	1.75	1.76	1.79	1.76	1.86
23	1.79	1.74	1.75	1.77	1.76	1.90
24	1.77	1.81	1.78	1.72	1.73	1.76
25	1.65	1.71	1.80	1.76	1.70	1.72
26	1.56	1.61	1.69	1.78	1.74	1.70
27	1.46	1.58	1.60	1.68	1.76	1.73
28	1.44	1.57	1.57	1.59	1.66	1.76
29	1.46	1.56	1.56	1.56	1.57	1.65
30	1.61	1.68	1.55	1.55	1.55	1.57
31	1.69	1.75	1.68	1.54	1.54	1.55
32	1.71	1.79	1.74	1.66	1.53	1.54
33	1.78	1.81	1.78	1.73	1.65	1.52
34	1.76	1.79	1.80	1.77	1.71	1.65
35	1.72	1.78	1.79	1.79	1.76	1.71
36	1.70	1.74	1.78	1.78	1.77	1.76
37	1.67	1.74	1.73	1.77	1.76	1.77
38	1.65	1.74	1.74	1.73	1.76	1.76
39	1.76	1.78	1.74	1.73	1.72	1.76
40	1.68	1.72	1.78	1.73	1.72	1.71
41	1.65	1.73	1.72	1.77	1.72	1.72
42	1.68	1.73	1.73	1.72	1.76	1.73
43	1.56	1.66	1.73	1.72	1.71	1.76
44	1.48	1.59	1.66	1.73	1.72	1.71

Рассмотрим $t = 2000$. Емкость нулевой возрастной группы $K^r(0, 2000) = 90623$. Для определения соответствующего данному моменту времени распределния $C^*(a, 2000)$ (20) необходимо задать априорные вероятности $\nu(a, 2000)$. Воспользуемся первым способом (10) для $t =$

$1995, 1996, 1997, 19998, 1999:$

$$\bar{\nu}^r(a) = \nu(a, 2000) = \frac{\sum_{j=1}^{5} b^r(a, 2000-j)}{\sum_{a\in I_f}\sum_{j=1}^{5} b^r(a, 2000-j)}.$$

С учетом данных из таблицы.1 получим значения априорных вероятностей $\bar{\nu}^r(a)$, приведенные в предпоследней колонке таблицы 1.

Подставляя указанные параметры в (22,23), получим распределение $C^*(a, 2000)$ (20). Тогда специфицированный по возрасту коэфициент рождаемости, вычисленный первым способом

$$b(a) = b(a, 2000) = C^*(a, 2000)\omega_a^r(2000), \qquad \omega_a^r(2000) = 10^{-5}\tilde{\omega}_a^r(2000).$$

Его значения приведены в таблице 1. Различие между реальным $b^r(a, 2000)$ и расчетным коэфициентом $b(a, 2000)$ оценивалось относительной интегральной погрешностью

$$\delta = \frac{\sum_{a\in I_f}[b^r(a, 2000) - b(a, 2000)]^2}{\sum_{a\in I_f}[b^r(a, 2000)]^2 + \sum_{a\in I_f} b^2(a, 2000)},$$

значение которой равнялось 0.033.

4. Итерационный метод восстановления специфицированного по возрасту коэфициента рождаемости

Прямое измерение специфицированного по возрасту коэфициента рождаемости $b(n, a, t)$ (ASFR) представляет собой весьма непростую в организационном и технологическом смысле процедуру, связанную со значительными затратами. Следствием этого является нерегулярность таких измерений или реализация их в рамках специальных кампаний. Но, с другой стороны, распределение коэфициента рождаемости по возрасту матерей является важным фактором при принятии социально-экономических решений. Поэтому особую актуальность приобретают модели, позволяющие восстанавливать это распределение по косвенным данным.

Такую возможность предоставляет энтропийная модель (17 - 21), которая позволяет восстанавливать ASFR, но с использованием ретроспективных данных: $b^r(n, a, t-s), \ldots, b^r(n, a, t-1)$.

Рассмотрим ситуацию, когда такая информация отсутствует, но «энтропийное» происхождение ASFR имеет место. Это означает, что реальное распределение $b^r(n, a, t)$, $a \in I_f$ есть решение задачи (17 - 21) для региона n и момента времени t при *измеряемых* реальных значениях

- численности новорожденных $K^r(n,0,t)$,

- распределения по возрасту численности фертильных женщин $K^r_F(n,a,t)$, $a \in I_f$ и

- общего коэфициента рождаемости $b^r(n,t)$

и *неизмеряемом* распределении априорных вероятностей $\nu^r(n,a,t)$, $a \in I_f$.

Иными словами предполагается, что реальный ASFR

$$\begin{aligned} b^r(n,a,t) &= \frac{C^*_r(n,a,t)}{K^r_F(n,a,t)}, \\ C^*_r(n,a,t) &= \arg\max\{H(C,\nu^r)| \\ \sum_{a\in I_f} C(n,a,t) &= K^r(n,0,t), \ \sum_{a\in I_f} \frac{C(n,a,t)}{K^r_F(n,a,t)} = b^r(n,t)\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее региональные и временные индексы будем опускать, полагая, что такая задача максимизации энтропии решается для каждого региона и момента времени, т.е. будем оперировать переменными $b^r(a), C^*_r(a),\ \nu^r(a), K^r_F(a), K^r(0), b^r$.

Обозначим ASFR, генерируемый задачей максимизации энтропии (17 - 21), но при произвольных априорных вероятностях $\nu(a)$, в виде:

$$b(a) = \frac{C^*(a)}{K^r_F(a)}, \tag{25}$$

и TFR - в виде:

$$b = \sum_{a\in I_f} b(a). \tag{26}$$

В этих определениях $C^*(a)$ есть решение следующей задачи максимизации энтропии:

$$H(C(a)) = -\sum_{a\in I_f} \left(C(a) \ln \frac{C(a)}{\tilde{\nu}(a)} + [G_a - C(a)] \ln[G_a - C(a)] \right) \Rightarrow \max, \tag{27}$$

$$\sum_{a\in I_f} C(a) = K^r(0), \quad \sum_{a\in I_f} \frac{C(a)}{K^r_F(a)} = b^r. \tag{28}$$

Здесь $K^r(0)$, $K^r_F(a), b^r$ - данные статистики.

Наряду с распределением *априоных* вероятностей $\nu(a)$, введем функцию распределения *апостериорных* вероятностей (полученных в результате решения задачи (27 - 28)) в виде:

$$\nu_{ps}(a) = \frac{b(a)}{\sum_{a\in I_f} b(a)} \tag{29}$$

Поскольку $C^*(a)$ зависит от априорных вероятностей $\nu(a)$, то апостериорная вероятность (29) также зависит от $\nu(a)$, т.е. $\nu_{ps}(a) = \nu_{ps}(a, \nu(a_-), \ldots, \nu(a_+))$. Следовательно, изменяя априорные вероятности, можно получать соответствующие апостериорные вероятности.

Из гипортезы об «энтропийном» происхождении ASFR следует, что существуют такое распределение априорных вероятностей $\nu^r(a)$, при котором распределения апостериорных и априорных вероятностей совпадают. Заметим, что этой гипотезой мы пользовались в предыдущем параграфе, когда априорные вероятности приравнивали к апостериорным, вычисленным по ретроспективным данным.

Воспользуемся следствием из «энтропийной» гипотезы и будем считать, что упомянутые распределения близки, если:

$$\max_{a \in I_f} |\nu_{ps}(a) - \nu(a)| \leq \delta. \tag{30}$$

Для построения соответствующего итерационного процесса ключевым является вопрос о правиле коррекции распределений априорных вероятностей $\nu(a)$ по вычисленным на каждом шаге итерационного процесса распределениям апостериорных вероятностей $\nu_{ps}(a)$.

Для решения задачи (30) необходимо ввести «обратную связь» :

$$\nu(a) = \mathcal{L}(\nu_{ps(a_-), \ldots, \nu_{ps}(a_+)}), \tag{31}$$

где $\mathcal{L}$ - оператор «обратной связи», характеризующий правило преобразования апостериорных вероятностей в априорные.

С учетом данного комментария итерационный алгоритм решения задачи (30) можно представить в следующем виде:

Нулевой шаг. Задаем начальные значения априорных вероятностей $\nu^0(a)$ для $a \in I_f$. Решаем задачу максимизации энтропии (27, 28) и получаем начальное значения апостриорных вероятностей $\nu_{ps}^1(a)$ для $a \in I_f$ согласно определения (29).

Первый шаг. Вычисляем новые значения априорных вероятностей согласно заданному правилу:

$$\nu^1(a) = \mathcal{L}(\nu_{ps}^1(a_-), \ldots, \nu_{ps}^1(a_+)), \qquad a \in I_f. \tag{32}$$

Используя эти априорные вероятности, вычисляем новые значения апостериорных вероятностей $\nu_{ps}^2(a)$ согласно (27 - 29).

....

n-ый шаг

$$C^*_{n+1}(a) \quad = \quad \arg\max\{H(C, \nu^n(a_-, \dots, \nu^n(a_+)))|(33)$$

$$\sum_{a\in I_f} C_{n+1}(a) = K^r(0),$$

$$\sum_{a\in I_f} \frac{C_{n+1}(a)}{K^r_F(a)} = b^r\},$$

$$\begin{aligned} b^{n+1}(a) &= \frac{C^*_{n+1}(a)}{K_F(a)}, \\ \nu^{n+1}_{ps}(a) &= \frac{b^{n+1}(a)}{\sum_{a\in I_f} b^{n+1}(a)}, \\ \nu^{n+1}(a) &= \mathcal{L}(\nu^{n+1}_{ps}(a_-), \dots, \nu^{n+1}_{ps}(a_+)). \end{aligned} \tag{34}$$

Условие остановки. Если

$$\max_{a\in I_f} |\nu^{n+1}_{ps} - \nu^{n+1}(a)| \leq \delta, \tag{35}$$

то STOP.

Пример 2. Рассмотрим применение алгоритма (**??**), используя реальные данные из примера 1, а именно, $K^r(0, 2000) = 90623$, распределение $K^r_F(a, 2000) = 10^5/\tilde{\omega}_a(2000)$, где значения $\tilde{\omega}_a(2000)$ приведены в последнем столбце таблицы 2, $b^r(2000) = 1.543$. Кроме этих данных нам понадобяться значения реального ASFR $b^($a_-, 2000) = 0.001$ и приближенное значения возраста женщин с максимальным значением ASFR. Для 2000г. значение a_{max} лежит в интервале 28-30 лет (см. таблицу 1, столбец 2000).

Для реализации нулевого шага алгоритма необходимо задать нулевое приближение для распределения априорных вероятностей $\nu^0(a)$. Воспользуемся его представлением в виде подходящего гамма- распределения (11). Параметры γ и ε определим, используя указанную выше дополнительную информацию. Согласно (14)

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a_{max}}.$$

Из (11, 12) следует, что значение параметра γ определяется решением уравнения:

$$a^\gamma_- \exp(-\frac{\gamma a_-}{\quad}) = \frac{b^r(a_-, 2000)}{\quad} \sum a^\gamma \exp(-\frac{\gamma a}{\quad})$$

Подходящим является значение $\gamma = 9$.

Теперь необходимо задать оператор $\mathcal{L}$ в алгоритме (**??**). Здесь будем использовать простейший из возможных, а именно, оператор следующего вида:

$$\nu^{n+1}(a) = \nu_{ps}^{n+1}(a), \qquad a \in I_f.$$

В таблице 3 приведены результаты расчета специфицированного по возрасту фертильных женщин коэфициента рождаемости $(a, 2000)$, полученные после 30 итераций. Относительная интегральная ошибка δ составляет 0.036.

Таблица 3

Год / Возраст	$b^r(a,2000)$	$b(a,2000)$
16	0.001	0.0131
17	0.004	0.0169
18	0.007	0.0221
19	0.014	0.0285
20	0.023	0.0348
21	0.034	0.0419
22	0.041	0.0501
23	0.050	0.0609
24	0.061	0.0710
25	0.078	0.0827
26	0.090	0.0932
27	0.107	0.0957
28	0.113	0.0956
29	0.120	0.1045
30	0.122	0.1110
31	0.114	0.1036
32	0.104	0.0912
33	0.094	0.0790
34	0.082	0.0610
35	0.070	0.0514
36	0.057	0.0441
37	0.045	0.0381
38	0.036	0.0329
39	0.028	0.0283
40	0.019	0.0242
41	0.013	0.0208
42	0.008	0.0179
43	0.005	0.0155
44	0.003	0.0131
$b^r(2000)$	1.544	1.544

Литература

1. *Карпова В.М.* Построение и исследование динамических моделей рождаемости. В кн. «Математическое моделирование социальных процессов», М., Изд. МАКС Пресс, 2004, вып. 6.
2. *Беккенбах Э., Белман Р.* Неравенства. М., Наука, 1965.
3. *Попков Ю.С.* Энтропийные модели рождаемости. Труды ИСА РАН, «Динамика неоднородных систем», том ,вып. 2009.