Смольяков В. Э., Смольяков Э. Р.

Институт системного анализа, Москва

РАСШИРЕННАЯ СИСТЕМА ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ РАВНОВЕСИЙ

1. Введение

Знание наисильнейшего конфликтного равновесия в любых конфликтных задачах (в частности, в игровых задачах любого типа: бескоалиционных, коалиционных, антагонистических, некооперативных, кооперативных и иных типов, причём как в динамике, так и в статике) играет ключевую роль в поиске решения этих задач. Причём, если в конфликтных задачах с двумя участниками для поиска наисильнейшего равновесия весьма эффективно использование итерационной схемы формализованного построения сходящихся последовательностей из монотонно усиливающихся одних и ослабляющихся других равновесий [1], представляющих собой модификации исходной базовой системы равновесий, то в задачах с тремя и более участниками без использования усложнённых равновесий найти наисильнейшее равновесие не помогают даже итерации исходной игры. Коалиционные равновесия, совершенно естественные для задач с тремя и более участниками, вырождаются в базовую систему равновесий для задач с двумя участниками [1]. Заметим, что все результаты классической теории игр [2-4] не позволяют в большинстве прикладных задач найти не только единственное, но даже хотя бы какое-нибудь конфликтное равновесие.

В работе вводятся усложнённые понятия равновесия и продолжено изучение кольцевых структур из ранее известных и новых базовых равновесий, включая равновесия из работ [5-9]. На примерах игр с двумя и тремя участниками демонстрируется, что усложнённые равновесия существенно расширяют возможности нахождения наисильнейшего равновесия в задачах с любым числом участников.

Со времени зарождения теории игр (за которое наиболее естественно принять 1928 г., когда Дж.Нейманом впервые было со строго математических позиций сформулировано понятие седловой точки в "чистых"и смешанных"стратегиях, лёгшее в основу понятия решения антагонистических игр) и до сих пор наиболее важными для прогресса теории игр и в то же время наиболее трудными по своей доступности являлись математические формулировки понятий игрового равновесия, не содержащие в себе каких-либо искусственных норм поведения. Именно отсутствие удовлетворительных определений равновесия (и недостаточность их) и являлось основным тормозом в развитии теории игр. Заметим, что теорию игр и конфликтов можно сделать удовлетворительной только в том случае, если в этой теории имеется понятие слабого конфликтного равновесия, существующего в любых конфликтных задачах, поскольку в этом случае открывается возможность вводить любые другие понятия более сильных конфликтных равновесий (не содержащих в себе каких-либо искусственных норм поведения участников), не интересуюсь вопросами их существования. При таком построении теории оказывается, что любая конфликтная задача всегда имеет наисильнейшее равновесие (решение). А вопрос о её единственности в этом случае начинает зависеть по существу только от числа используемых базовых понятий равновесия. Эта идеология построения общей теории игр и конфликтов и была заложена в монографии [1].

Среди всех предлагавшихся в 20-м века понятий игрового равновесия заслуживают внимания только те, которые не вносят в игру каких-либо искусственных норм поведения участников. К таким формулировкам равновесия можно отнести только три, ставших классическими, предложенных Дж.Нейманом (1928 г.), Дж.Нэшем [3] (в 1951 г.) и Э.Вайсбордом [4] (в 1974 г.). Однако даже эти, казавшиеся весьма удовлетворительными с математической и интуитивной точек зрения понятия равновесия (решения) игры, имели весьма серьёзные недостатки.

Во-первых, любое из классических равновесий существует далеко не во всех играх, для которых оно, казалось бы, предназначено. Во-вторых, все эти равновесия, когда существуют, не оказываются единственными в игре (а в таких случаях их практическая ценность весьма низка). Заметим, что эта их неединственность создала в среде специалистов по теории игр даже иллюзию, будто бы для игровых задач множественность решений неизбежна и естественна. В-третьих, классические равновесия [2-4], к сожалению, обладают ещё и совершенно неприемлемыми с точки зрения всех участников игры качествами. Например, равновесие по Нэшу, даже когда оно существует в игре и единственно, нередко может быть абсолютно неприемлемо одновременно для всех участников вследствие того, что оно может оказаться самым худшим из всего того, что может реализоваться в игре (как это демонстрируется, к примеру, на стр. 9 в [1]).

Поиск же новых понятий игрового равновесия, не вносящих в игру никаких искусственных норм поведения, является задачей не менее трудной, чем совершение новых фундаментальных открытий в науке и технике. По этой причине прогресс теории игр в 20-м столетии, несмотря на усилия большого числа математиков, в том числе всемирно известных, был более чем скромен. И лишь с 80-х годов 20 века наметилась положительная тенденция и удалось получить ряд новых понятий игрового равновесия (см. библиографию в [1]), которые, в совокупности с уже известными, позволили находить наисильнейшие равновесия, т.е. наиболее устойчивые и наиболее приемлемые для всех участников решения любых игровых задач — антагонистических, некооперативных, кооперативных, статических, динамических и иных типов, причём решать любые типы игр с единых позиций, а не так, как это делается в классической теории игр, где для каждого типа игр пытались найти свои специфические понятия равновесия.

В [8] было найдено, как на основе наисильнейшего (или равноценных наисильнейших) равновесия в любой конфликтной задаче с N участниками можно определить единственный устойчивый (справедливый) делёж в кооперативных играх, устраивающий одновременно всех участников, от которого ни один из них не пожелал бы или не посмел бы отказаться. Этот дележ можно назвать идеальным (справедливым) решением кооперативной игры, поскольку он, во-первых, существует в любой игре; во-вторых, с ним вынужден согласиться любой учавстник игры (поскольку он удовлетворяет требованиям естественной устойчивости, в соответствии с которыми выход участника из кооперации не позволит ему выиграть больше причитающейся ему доли от справедливого дележа); в-третьих, это решение единственно (за редкими исключениями). Этим требованиям к кооперативному решению, к сожалению, не удовлетворяет ни одно из известных в классической теории игр поняий решения кооперативной игры, но, однако, удовлетворяет понятие решения кооперативной игры [8], основанное на наисильнейших конфликтных равновесиях и на формулах работы [8]. Если же делёж-решение не опирается на сильнейшие равновесия в игре (которые в классической теории вообще не были известны), то с подобным дележём не согласится хотя бы один из участников, и у него имеются возможности "загнать"игру в ситуацию, обеспечивающую ему выигрыш больший, чем получаемый им в соответствии с дележём-решением кооперативной игры. Понятно, что игры, абсолютно симметричные относительно N участников, теоретически могут иметь много наисильнейших равновесий, и обеспечить в такой игре всего одно наисильнейшее равновесие не представляется возможным ни при каком (разумном) определении понятий равновесия. А вот если игра имеет хоть какую-то асимметрию относительно участников, то, представляется, разумно построенная система понятий равновесия должна обязательно привести всего к единственному наисильнейшему равновесию в подобной асимметричной игре. И существование этого единственного наисильнейшего равновесия (в условиях, когда не все используемые понятия равновесия существуют в любых игровых задачах) способна обеспечить некоторая "полная"(по аналогии с полнотой системы собственных функций в гильбертовом пространстве) система понятий равновесия. Поиск подобной "полной"системы (но состоящей из конечного множества понятий равновесия, в отличие от гильбертова пространства) и должен являться (по мнению автора) основной целью исследований в области конфликтных задач.

Теорию игр можно будет считать концептуально завершённой только тогда, когда в любых игровых задачах, даже со сколь угодно малой стратегической асимметрией относительно участников, удастся находить единственное наисильнейшее равновесие, которое можно будет назвать "идеальным"решением игры (причём в этом случае автоматически и любая кооперативная игра будет иметь тоже единственное решение).

2. Базовая система равновесий, пополненная рядом усложненных равновесий

Чтобы не усложнять понимание материала необходимостью обращения к [1], в предельно кратком изложении приводятся используемые ниже понятия равновесия из [1] новые усложненные равновесия. А чтобы не усложнять изложение также и излишними деталями, связанными с вопросами существования максимумов, принимаются следующие допущения.

Допущения 1. *Пусть Q_i, $i = \overline{1,N}$, — метрические пространства, а G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times \ldots \times Q_N$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i = \overline{1,N}$, $q = q_1 \ldots q_N \in G$.*

Предполагается, что i-й участник, выбирая стратегию (состояние) q_i из проекции $Pr_{Q_i}G$ множества G на пространство Q_i или из доступного ему сечения $G(q^i)$, где $q^i = q_1 \dots q_{i-1}q_{i+1} \dots q_N$, стремится обеспечить максимум своей платежной функции $J_i(q)$, $i = \overline{1, N}$. Положим $J^i = \sum\limits_{k \neq i} J_k$ и $J_{P_k} = \sum\limits_{i \in P_k} J_i$, где P_k — коалиция из k участников.

Определение 1. Ситуацию $q^* = (q^*_{P_k}, q^*_{P_{N-k}}) \in G$ назовем коалиционно A_{P_k}-экстремальной для коалиции P_k, состояшей из k участников, если $G(q^*_{P_{N-k}}) = q^*_{P_k}$, или каждому состоянию $q_{P_k} \in G(q^*_{P_{N-k}}) \setminus q^*_{P_k}$ коалиции P_k можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние $\hat{q}_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})$ остальных $N - k$ участников, так, чтобы

$$J_{P_k}(q_{P_k}, \hat{q}_{P_{N-k}} < q_{P_k} >) \leq J_{P_k}(q^*). \tag{1}$$

Ситуацию $q* \in G$ назовем A'-равновесием [1, 6], если она коалиционно экстремальна для любой коалиции P_k, $1 \leq k < N$, из всего возможного числа $2^N - 2$ коалиций, т.е. если $A' = \bigcap\limits_{P_k} A_{P_k}$, $1 \leq k \leq N - 1$.

Множество ситуаций, одновременно A_{P_k}-экстремальных для всех возможных коалиций, состоящих только из k участников, обозначим A'_{P_k}.

Заметим, что множество всех возможных коалиций, состоящих только из k участников, равно числу сочетаний $c^k_N \stackrel{\triangle}{=} \frac{N!}{(N-k)!k!}$, а число всех возможных коалиций с числом участников от одного до $N - 1$ включительно равно $\sum\limits_{k=1}^{N-1} c^k_N = 2^N - 2$. Очевидно, множество A' можно представить также в виде $A' = \bigcap\limits_{k} A'_{P_k}$, $1 \leq k \leq N - 1$.

Поскольку множество A'-равновесий может быть пустым, то в качестве основной, базовой системы равновесий в [1] принимается система не коалиционных, а индивидуальных равновесий, составленных лишь из коалиций P_1, включающих только одного участника. В этом случае наиболее слабым понятием равновесия оказывается A-равновесие (совпадающее, по определению, с A'_{P_1}-равновесием), существующее (в любой ε-аппроксимации) в любых конфликтных задачах, независимо от класса используемых в них платежных функций и множеств.

Определение 2. Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовем A_i- экстремальной, если при заданной стратегии q^{i*} допустимой оказывается только одна стратегия $q^*_i = G(q^{i*})$ или если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q^*_i$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \stackrel{\triangle}{=} \hat{q}^i < q_i > \in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i < q_i >, q_i) \leq J_i(q^*), \tag{2}$$

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия, если неравенства вида (1) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для всех $i = \overline{1, N}$, т.е. если $q^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i \triangleq A$.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$ назовем B_{P_k}-равновесием, если равенство

$$\max_{q_{P_{N-K}} \in A_{P_k}(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \tag{3}$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k (состоящей из k участников), число которых задается числом сочетаний $c_N^k \triangleq \frac{N!}{(N-k)!k!}$. Это означает, что "векторное"равенство (3) на самом деле определяет c_N^k равенств, отвечающих c_N^k возможным коалициям, каждая из которых включает k участников (из общего числа N участников). А следовательно, множество ситуаций $B_{P_k}(\subset A_{P_k})$, образованное из всех B_{P_k} равновесий, представляет собой пересечение всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют указанным c_N^k равенствам, "векторно"задаваемым равенством (3).

Определение 4. Ситуацию $q^* \in B_{P_k}$ назовем $\bar{D}_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет "векторному"условию:

$$\max_{q \in B_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*), \tag{4}$$

выражающему собой c_N^k равенств (отвечающих c_N^k возможным коалициям из k участников), одновременное удовлетворение которых означает, что множество ситуаций $\bar{D}_{P_k}(\subset B_{P_k})$, состоящее из $\bar{D}_{P_k}$-равновесных ситуаций, представляет собой пересечение всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют этим c_N^k равенствам.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$ назовем C_{P_k}-равновесием, если "векторное"равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in G(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \tag{5}$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k, состоящей из k участников, число которых задается числом сочетаний c_N^k. Это означает, что "векторное"равенство (5) представляет собой систему из

c_N^k равенств. А следовательно, множество C_{P_k}-равновесных ситуаций представляет собой пересечение всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют указанным c_N^k равенствам, векторно задаваемым равенством (5).

Определение 6. Ситуацию $q^* \in C_{P_k}$ назовем D_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет "векторному"равенству

$$\max_{q \in C_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*), \tag{6}$$

представляющему собой c_N^k равенств, одновременное удовлетворение которых означает, что множество ситуаций D_{P_k} может быть найдено как результат пересечения всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют этим c_N^k равенствам.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in A'_{P_k}$ назовем B'_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет "векторному"равенству

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in A'_{P_k}(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*), \tag{7}$$

где под A'_{P_k} подразумевается пересечение всех c_N^k множеств вида A_{P_k}, отвечающих каждой конкретной коалиции из k участников.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in B'_{P_k}$ назовем D'_{P_k}-равновесием, если она удовлетворяет "векторному"равенству

$$\max_{q \in B'_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*). \tag{8}$$

Определение 9. Ситуацию $q^* \in A_{P_k}$ назовем $\bar{D}'_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет векторному равенству

$$\bar{D}'_{P_k} = Arg \max_{q_{P_k} \in A_{P_k}(q^*_{P_{N-k}})} J_{P_k}(Arg \max_{q_{P_{N-k}} \in A_{P_k}(q_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q)), \tag{9}$$

представляющему собой c_N^k одновременно удовлетворяющихся равенств.

Определение 10. Ситуацию $q^* \in A'_{P_k}$ назовем $D^A_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет векторному равенству

$$D^A_{P_k} = Arg \max_{q_{P_k} \in A'_{P_k}(q^*_{P_{N-k}})} J_{P_k}(Arg \max_{q_{P_{N-k}} \in A'_{P_k}(q_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q)), \tag{10}$$

представляющему собой c_N^k одновременно удовлетворяющихся равенств.

Определение 10а. Ситуацию $q^* \in A$ назовем D_k^A-экстремальной, если

$$D_k^A = Arg \max_{q_k \in A(q^{k*})} J_k(Arg \max_{q^k \in A(q_k)} J^k(q)), \quad k = 1, 2, ...N. \tag{10a}$$

Назовем ситуацию q^* базовым D^A-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{k=1}^{N} D_k^A$.

Определение 11. Ситуацию $q^* \in G_{P_k}$ назовем $D_{P_k}^G$-равновесием, если она удовлетворяет векторному равенству

$$D_{P_k}^G = Arg \max_{q_{P_k} \in G(q^*_{P_{N-k}})} J_{P_k}(Arg \max_{q_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q)), \qquad (11)$$

представляющему собой c_N^k одновременно удовлетворяющихся равенств.

Определение 11а. Ситуацию $q^* \in G$ назовем D_k^G-экстремальной, если

$$D_k^G = Arg \max_{q_k \in G(q^{k*})} J_k(Arg \max_{q^k \in G(q_k)} J^k(q)), \;\; k = 1, 2, ...N. \qquad (11a)$$

Назовем ситуацию q^* базовым D^G-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{k=1}^{N} D_k^G$.

Определение 12. Ситуацию $q^* \in A'_{P_k}$ назовем $\hat{C}'_{P_k}$-равновесием, если "векторное"равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in G(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \qquad (12)$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k, представляя собой систему из c_N^k равенств. А следовательно, множество $\hat{C}'_{P_k}$-равновесных ситуаций задается пересечением c_N^k равенств (12).

Определение 13. Ситуацию $q^* \in \hat{C}'_{P_k}$ назовем $\hat{D}'_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет "векторному"равенству

$$\max_{q \in \hat{C}'_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*), \qquad (13)$$

представляющему собой систему из c_N^k равенств.

Определение 14. Ситуацию $q^* \in A$ назовем $\bar{C}^0$-равновесием, если

$$J_k(q^*) = \max_{q_k \in A(q^{k*})} J_i(q^{k*}, q_k), \;\; k = \overline{1, N}, \qquad (14)$$

где $q^k = (q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_N)$.

Заметим, что ситуация $q^* \in G$ называется равновесной по Нэшу [3] (или, короче, назовем ее $\bar{C}$-равновесием), если в определении 14 множество A заменить на множество G.

Понятия базовых равновесий для равновесий любых типов (B, C, D и других) нетрудно получить из приведённых определений, если в них рассматривать только коалиции P_1, состоящие из одного участника (по аналогии с тем, как определение 2 получается из определения

1, определение 10а получается из определения 10 и определение 11а - из определения 11.)

Вообще говоря, можно в самом общем виде ввести еще и понятия усложненных несимметричных равновесий по аналогии с тем, как это сделано в [1]. Однако для задач с любым числом участников вполне достаточно ограничиваться лишь введенными в [1] несимметричными равновесиями.

3. Общие подходы к поиску равновесий и иерархические связи между равновесиями

В рассматриваемом общем случае остается в силе доказанная в [1, с. 28-30] и скорректированная по отношению к вышеприведенной расширенной базовой системе равновесий следующая теорема.

Теорема 1. *В любой конфликтной задаче на основе базовой системы конфликтных равновесий имеется возможность итерационно строить новые равновесия. После того, как найдены все базовые равновесия (решение "нулевой итерации"), задача решается заново, но не на множестве G, а на множестве A, что позволяет найти еще одну систему равновесий ("первой итерации"), и так далее. В результате находятся последовательности из равновесий A^k, $\bar{C}^k$, B'^k, B^k, D^k, D'^k, $\bar{D}^k$, k =0,1,2,..., причем итерации A^k и $\bar{C}^k$ из базовых равновесий A и $\bar{C}^0$ образуют замкнутое кольцо из попарно вложенных друг в друга равновесий; и всегда $A^{k-1} \supseteq A^k$, т.е. с увеличением индекса k множества A^k сужаются (усиливаются), а последовательные итерации равновесия по Нэшу на множествах A^k расширяются (ослабляются), т.е. $\bar{C}^{k-1} \subseteq \bar{C}^k$, k = 1,2,3,.... Итерации остальных базовых равновесий, как правило, ослабляются, хотя в отдельных случаях могут и усиливаться (только в задачах с двумя участниками всегда ослабляются B- и C-равновесия). В любых задачах всегда выполняются следующие связи между равновесиями:*

$$
\begin{array}{llllll}
\bar{C} & \subset & G & & & \\
\cap & & \cup & & & \\
\bar{C}^0 & \subset & A & \supset B' \supset & \left|\begin{array}{l} \supset B \supset \\ \supset D', \\ \supset D^A \supset D', \\ \supset \hat{C}' \supset \hat{D}', \end{array}\right. & \left|\begin{array}{l} \supset C \supset D^G \supset D, \\ \supset \bar{D}, \\ \supset \bar{D}' \supset \bar{D}, \end{array}\right. \\
\cap & & \cup & & & \\
\bar{C}^1 & \subset & A^1 & \supset B'^1 \supset & \left|\begin{array}{l} \supset B^1 \supset \\ \supset D'^1, \\ \supset D^{A1} \supset D'^1, \\ \supset \hat{C}'^1 \supset \hat{D}'^1, \end{array}\right. & \left|\begin{array}{l} \supset C^1 \supset D^{G1} \supset D^1, \\ \supset \bar{D}^1, \\ \supset \bar{D}'^1 \supset \bar{D}^1. \end{array}\right. \\
\cap & & \cup & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Доказательство. Кольцевая структура из пар равновесий A^k и $\bar{C}^k$, $k = 1, 2, \dots$ доказана в [1]. Покажем, что всякая B-равновесная ситуация является также B'-равновесной, причем подобная зависимость между B и B'-равновесиями имеет место на любой итерации, поскольку на любой k-й итерации как бы заново решается новая конфликтная задача на исходном игровом множестве A^k.

Пусть множество B не пусто и $q^* \in B$. По определению множества B в ситуации q^* достигаются N максимумов в (3) при $P_k = P_1$. Отсюда следует, во-первых, что $q^* \in A \triangleq \bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i$ и что вследствие того, что $A(q_i^*) \subset A_i(q_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяются также и N условий (7). А эти последние говорят о том, что ситуация q^* является также и B'-равновесной. Следовательно, любая B-равновесная ситуация является также и B'-равновесной.

Заметим еще, что в задачах с двумя участниками B'-равновесие совпадает с $\bar{C}^0$-равновесием, содержится в A-равновесии и содержит в себе все остальные более сильные равновесия, в то время как в играх с числом участников больше двух $\bar{C}^0$-равновесие содержит в себе только равновесие по Нэшу (14).

Непосредственно из определений следует, что на любой итерации множество B'-равновесных ситуаций содержит в себе множество D'-равновесных ситуаций, а множество B-равновесных ситуаций содержит в себе множество $\bar{D}$-равновесных ситуаций.

В завершение доказательства заметим, что для задач с двумя участниками кольцевая структура равновесий оказывается существенно более богатой за счет того, что в случае $N = 2$ на каждой следующей итерации всегда расширяется не только $\bar{C}^0 = B'$-равновесие, но и B-равновесие. Кроме того, $C = \bar{C}$, в то время как в задачах с тремя и более участниками множество C в общем случае не совпадает со множеством $\bar{C}$. И, наконец, в задачах с двумя участниками на любых итерациях всегда имеет место весьма облегчающее формализованное нахождение наисильнейшего равновесия включение $D' \supset \bar{D}$, в то время как в задачах с тремя и более участниками последнее включение имеет место не всегда.

Процедура выделения насильнейшего равновесия в задачах с N участниками. На роль наисильнейшего конфликтного равновесия, в первую очередь, претендуют те из равновесий $\bar{D}$, D', $\bar{D}'$, D^A, $\hat{D}$, которые оказываются непустыми на минимальной итерации. Если же множество B' оказывается пустым, то наисильнейшее равновесие ищется в классе усложнённых (коалиционных) равновесий, учитывая естественную взаимную иерархию между ними, вытекающую из их определений, а также фактор принадлежности ситуации, претендующей называться насильнейшим равновесием, одновременно к нескольким типам равновесий.

4. Примеры решения конфликтных задач

На следующих примерах, которые можно рассматривать как некооперативные или как кооперативные игры, демонстрируется, что использование только базовой системы равновесий из [1] с применением любого числа итераций в соответствии с теоремой 1 (и даже использование на каждой итерации несимметричных равновесий) не позволяет найти единственное наисильнейшее равновесие, без которого поставленную игровую задачу (рассматриваемую как кооперативную или как некооперативную игру) невозможно считать удовлетворительно решенной с точки зрения естественных запросов практики. Однако усложненные равновесия, даваемые определениями 1-14 (и понятными их иными аналогами) позволяют найти единственное наисильнейшее равновесие и установить иерархическую связь между наиболее сильными равновесиями, что позволяет найти решение как кооперативной, так и некоооперативной игры, устраивающее всех участников.

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & 12 & 3 \\ \cdot & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & \cdot \\ 2 & \cdot & 11 & 10 \end{bmatrix}, \qquad J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 9 & \cdot & 5 & 1 \\ \cdot & 4 & 11 & 10 \\ 3 & 7 & 8 & \cdot \\ 12 & \cdot & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Оба игрока располагают четырьмя стратегиями: первый игрок выбирает одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов. Игровое множество G в этой задаче состоит из тех 12 ситуаций a_{ij} в вышеприведенных матрицах, в элементах которых вписаны значения платежных функций. Найдем сначала существующие в любой конфликтной задаче наислабейшие равновесия, задаваемые в данном случае матрицей $A = A_1 \cap A_2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ + & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}.$$

Находим, далее, базовые равновесия, включая новое D^A-равновесие

$$\begin{aligned} &B_1' = B_1 = (a_{11}, a_{23}, a_{33}, a_{43}), \ \ B_2' = (a_{11}, a_{13}, a_{24}), \\ &B_2 = (a_{11}, a_{13}, a_{24}, a_{32}), \ \ B' = B = a_{11}, \\ &C_1 = (a_{11}, a_{23}, a_{33}), \ \ C_2 = (a_{13}), \ \ C = \emptyset, \\ &D_1' = \bar{D}_1 = a_{43}, \ \ D_2' = \bar{D}_2 = a_{24}, \ \ D_1 = a_{33}, D_2 = a_{13}, \\ &D' = \bar{D} = D = \bar{D}' = \emptyset, \ \ D^A = a_{11}. \end{aligned}$$

Таким образом, на нулевой итерации на роль наисильнейшего равновесия в игре предварительно претендует D^A-равновесная ситуация a_{11}. Чтобы выяснить, существуют ли ещё какие-либо ситуации, которые могли бы претендовать на роль наисильнейшего равновесия, рассмотрим вспомогательную игру на множестве A с платежными функциями

$$J_1^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 & 7 \\ \cdot & \cdot & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 11 & \cdot \end{bmatrix}, \qquad J_2^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 9 & \cdot & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 11 & 10 \\ \cdot & \cdot & 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Наислабейшие A^1-равновесия в этой вспомогательной игре задаются матрицей $A^1 = A_1^1 \cap A_2^1$:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, \quad A^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

а базовые равновесия 1-й итерации имеют вид

$$\begin{aligned}
&B_1^{'1} = B_1^1 = B_2^{'1} = B_2^1 = B^{'1} = B^1 = (a_{11}, a_{24}, a_{43}),\\
&C_1^1 = (a_{11}, a_{43}),\ \ C_2^1 = (a_{11}, a_{24}),\ \ C^1 = a_{11},\\
&D_1^1 = D_1^{'1} = \bar{D}_1^1 = a_{43},\ \ D_2^1 = D_2^{'1} = \bar{D}_2^1 = a_{24},\ \ D^1 = D^{'1} = \bar{D}^1 = \emptyset,\\
&D^{A1} = \bar{D}^{'1} = (a_{11}, a_{24}, a_{43}).
\end{aligned}$$

Итак, на 1-ой итерации наисильнейшими D^{A1}-равновесиями оказались уже три D^A- равновесных ситуации (a_{11}, a_{24}, a_{43}), причем все они оказались, к тому же, ещё и более сильными $\bar{D}^{'1}$-равновесиями, чем понятие D^{A1}-равновесности. А поскольку $\bar{D}^{'1}$-равновесность более сильная, чем D^{A1}- равновесность, то дополнительная D^A- равновесность ситуации a_{11} по сравнению с двумя другими не даёт этой ситуации никаких заметных преимуществ перед последними. Этот пример является интересным в том отношении, что показывает, что найденное на нулевой итерации наисильнейшее равновесие вовсе не обязательно оказывается наисильнейшим в конфликтной задаче.

Если рассматриваемая игра трактуется как некооперативная, то в рамках пока что известных понятий равновесия в качестве решения в ней следует признать три найденных эквивалентных наисильнейших равновесия. А если игра рассматривается как кооперативная, то, опираясь на эти три эквивалентных равновесия, можно, пользуясь результатами работы [9], найти также решение и кооперативной игры, представляющее в данном случае следующий единственный справедливый делёж кооперативного дохода (равного 17 и получаемого в любой из ситуаций $(a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{43})$): $x_1 = \frac{(4+7+11)}{47}17$, $x_2 = \frac{(9+10+6)}{47}17$. Таким образом, знание наисильнейшего равновесия играет ключевую роль при определении решения любых конфликтных задач (бескоалиционных, коалиционных, антагонистических, кооперативных и иных типов).

Пример 2. Рассмотрим игру с тремя участниками, каждый из которых располагает всего двумя стратегиями. Пусть $J = (J_1, J_2, J_3)$ — платежная вектор-функция в этой игре, в которой из теоретически 8 возможных ситуаций E, F, H, K, L, M, N, P (рис. 1) реализоваться

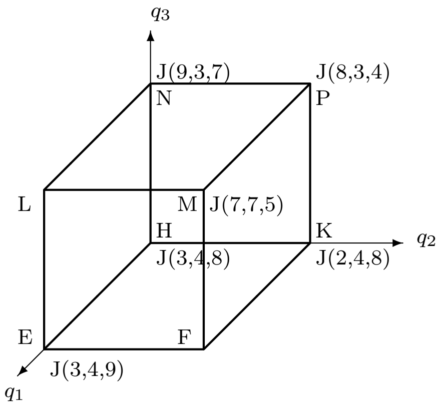

Рис. 1

могут только шесть (т.е. это игра с двумя запрещёнными ситуациями F и L), в каждой из которых значения платежных функций игроков принимают следующие значения: $J(E)$ = (3,4,9), $J(H)$ = (3,4,8), $J(K)$ = (2,4,8), $J(M)$ = (7,7,5), $J(N)$ = (9,3,7), $J(P)$ = (8,3,4). Все 6 допустимых ситуаций и значения платежных функций в них изображены на рис. 1 в системе координат (q_1, q_2, q_3), где q_i — стратегия i-го игрока, принимающая всего два значения.

Найдём основные базовые и усложнённые равновесия:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = (E, H, K, M, N, P), A_3 = (E, H, K, M) = A,\\
&A_{12} = (E, H, M), A_{13} = (E, M, N, P), A_{23} = (E, H, K, M),\\
&A'_{P_2} = (E, M), A' = A \cap A'_{P_2} = (E, M),\\
&B_1 = (E, H, K), B_2 = (M, N, P), B_3 = (E, H, M), B = \emptyset,\\
&C_1 = B_1, C_2 = B_2, C_3 = B_3, C = \emptyset,\\
&B'_1 = (E, H, K), B'_2 = (E, M), B'_3 = (E, H, M), B' = E,\\
&C'_1 = (E, H, K), C'_2 = M, C'_3 = (E, H, M), C' = \emptyset,\\
&B_{12} = (E, H, M), B_{13} = (E, M, N, P), B_{23} = (E, H, K, M), B_{P_2} = (E, M),\\
&C_{12} = (E, H, M), C_{13} = (E, M, N, P), C_{23} = (E, H, K), C_{P_2} = E,\\
&B'_{12} = B'_{13} = B'_{23} = B'_{P_2} = C'_{P_2} = (E, M), \hat{D}' = \emptyset,\\
&D_1^A = \max\nolimits_{q_1 \in A(q^{1*})} J_1(Arg \max\nolimits_{q^1 \in A(q_1)} J^1(q)) =\\
&\max J_1(E, H, K) = (E, H),\\
&D_2^A = \max J_2(E) = E, D_3^A = \max J_3(E, H) = E, D^A = E.
\end{aligned}
$$

Итак, оказалось, что $A' = B'_{P_2} = C'_{P_2} = (E, M), B' = C_{P_2} = D^A = E$, т.е. E — это наисильнейшее равновесие в рассматриваемой конфликтной задаче. И поскольку это равновесие ярко выявилось уже на нулевой итерации, то проводить 1-ю итерацию нет необходимости, учитывая трудоёмкость поиска равновесий в задачах с тремя участниками. Правда, следующая итерация позволила бы выявить, какая из остальных ситуаций является немного слабее её.

Покажем, каким образом ищутся равновесия в играх с тремя (и более) участниками. Прежде всего объясним процедуру поиска A_i-экстремальных ситуаций. Начнём с поиска множества A_1. Из ситуации $q* = E$, при фиксированной в этой ситуации совместной стратегии $q_{P_{23}} \stackrel{\triangle}{=} q^{1*}$ (заметим, что здесь возможно ещё и второе обозначение для остальных $N-1$ участников) двух других участников, 1-й игрок может попытаться перейти только в ситуацию H. Но поскольку в обеих этих ситуациях в сечении $G(q^{1*})$ (т.е. вдоль линии EH) платёжная функция 1-го игрока принимает одно и то же значение $J_1(E){=}3$ (т.е. максимальное значение), то обе эти ситуации принадлежат множеству A_1. Ситуация K автоматически принадлежит множеству A_1, так как в сечении $G(q^{1*})$ (т.е. вдоль линии FK), включающем точку K, у 1-го игрока не имеется других ситуаций, кроме самой ситуации K, куда бы 1-й игрок мог перейти. Точно так же автоматически принадлежит множеству A_1 и ситуация N, из которой 1-му игроку также некуда переходить. Сравним оставшиеся две ситуации M и P в сечении $G(q^{1*})$, проходящем через эти точки и лежащем на линии MP. Поскольку в этом сечении максимум платёжной функции J_1 достигается в точке P и равен 8, то эта точка автоматически принадлежит множеству A_1. Что же касается оставшейся точки M, то она также принадлежит множеству A_1, поскольку при попытке 1-го игрока перейти из ситуации M, где значение его платёжной функции $J_1(M) = 7$, в ситуацию P коалиция P_{23}, в составе 2-го и 3-го игроков, имеет возможность наказать 1-го игрока, переведя игру в ситуацию K (или в ситуацию H), в которой 1-й игрок получает $J_1(K) = 2$, т.е. не только не больше, но даже строго меньше, чем он имеет в исходной ситуации M. Аналогичным образом находится, что множество A_2 совпадает со множеством A_1.

Множество A_3 ищется на вертикальных отрезках EL, FM, HN и KP. Ситуации E и M 3-й игрок не в состоянии улучшить, так как вдоль отрезков EL и FM у него не имеется возможности перейти в какое-либо другое состояние, если коалиция P_{12} из 1-го и 2-го игроков фиксирует свои стратегии в ситуациях E и M (при этом фиксируются отрезки, соответственно, EL и FM). Сравним выигрыши 3-го игрока в ситуациях H и N. Вдоль сечения HN игрового множества G 3-й игрок имеет максимум $J_3(H) = 8$ в ситуации H, которая, следовательно, автоматически принадлежит множеству A_3. А при попытке улучшить для себя ситуацию N, в которой он получает $J_3(N) = 7$, 3-й игрок имеет возможность перейти только в ситуацию H, причём коалиция P_{12} не в состоянии помешать ему улучшить свой выигрыш с 7 до 8, поскольку всё, что она может попытаться сделать против 3-го игрока, так это перевести игру в ситуации K или E, но и в этих двух ситуациях 3-й игрок всё равно получает не меньше 8. Это означает, что ситуация N не может принадлежать множеству A_3. Точно такое же рассмотрение пары ситуаций K и P показывает, что ситуация K автоматически принадлежит множеству A_3, поскольку в ней 3-й игрок получает J_3=8, а в ситуации P — всего 4. А вот с ситуацией P 3-й игрок никогда не согласится, поскольку несомненно перейдёт в ситуацию K, в которой коалиция P_{12} не в состоянии его наказать, так как из K она могла бы перевести его только в ситуации H и E, в которых он получил бы не меньше 8, т.е. больше значения $J_3 = 4$, которое он имеет в исходной ситуации P.

Продемонстрируем теперь, как ищутся ”коалиционные” множества A_{ij}. Множество A_{12} включает те ситуации, которые коалиция P_{12} не в состоянии улучшить для себя. Пусть зафиксирована стратегия 3-го участника, при которой коалиция P_{12} имеет возможность выбора среди ситуаций EHK. Наилучшей для коалиции P_{12} является такая ситуация из этих трёх доступных для неё, в которой она получает максимальный выигрыш. Очевидно, таких ситуаций две: это ситуации E и H, в которых $J_{P_{12}}$=7. Следовательно, обе эти ситуации принадлежат множеству A_{12}. А с ситуацией K коалиция P_{12} никогда не согласится, поскольку безнаказанно может перейти из неё в ситуации E или H, увеличив свой выигрыш по сравнению с ситуацией K, причём 3-й игрок не в состоянии как-либо наказать эту коалицию . Следовательно, ситуации E и H принадлежат множеству A_{12}, а ситуация K не принадлежит. Если же 3-й игрок использует свою вторую стратегию, делающую доступными для коалиции P_{12} ситуации M, N и P, то эта коалиция предпочтёт максимальный выигрыш среди этих трёх, равный $J_{P_{12}}$=14 и достигаемый в ситуации M (а следовательно, $M \in A_{12}$). Любую же из ситуаций N и P коалиция P_{12} в состоянии улучшить для себя безнаказанно переходом из них в ситуацию M, из которой у 3-го игрока не имеется возможности никуда перейти с целью наказать коалицию P_{12}, поскольку переход из ситуации M в несуществующую по условиям задачи ситуацию F невозможен (ситуации F и L являются запрещёнными, недоступными). Аналогичным образом находятся и множества A_{13} и A_{23}.

Рассмотрим нахождение множеств B_i. Из определения множества B_1 следует, что 1-й игрок при каждой фиксированной своей стратегии предлагает остальным игрокам (т.е. коалиции P_{23}) выбрать наилучшую для них стратегию на множестве A_1, т.е. на множестве, на котором эта коалиция держит под угрозами любые попытки 1-го улучшить свои стратегии. Так что подобный шаг со стороны 1-го игрока — это двойной реверанс в сторону коалиции P_{23}, вдвойне выгодный для неё. При фиксировании 1-м игроком одной из двух своих возможных стратегий, например стратегии q_1^0, приводящей к реализации сечения $G(q_1^0) = (HKPN)$, коалиция P_{23} выбирает в сечении $A_1(q_1^0)$, в данном случае совпадающем с сечением $(HKPN)$ (поскольку A_1 совпадает со всем игровым множеством G), наивыгоднейшие для себя ситуации H и K, в которых она получает максимальный в этом сечении выигрыш, равный J_{23}=12. А при выборе 1-м игроком второй своей стратегии q_1^1, приводящей к реализации сечения $G(q_1^1) = (EM)$, коалиция P_{23} выбирает в сечении $A_1(q_1^1)$, в данном случае совпадающем с сечением $G(q_1^1)$, свой максимум в этом сечении, равный J_{23}=13, достигаемый в ситуации E. Аналогично ищутся множества B_2 и B_3.

Любое из множеств C_i ищется аналогично множествам B_i, с тем отличием, что максимум каждой рассматриваемой коалиции ищется не в сечениях множества A_i, а в соответствующих сечениях множества G. И если этот максимум оказывается в ситуации, принадлежащей соответствующему сечению множества A_i, то эта ситуация считается принадлежащей множеству C_i; в противном случае рассматриваемое сечение вообще не учитывается. Рассмотрим, к примеру, поиск множества C_3. Пусть 3-й игрок фиксирует свою первую стратегию q_3^0, приводящую к реализации сечения $G(q_3^0) = (EHK)$. Максимум выигрыша коалиции P_{12} в этом сечении достигается в ситуациях E и H и равен J_{12}=7. Так как эти ситуации входят во множество A_3, то обе они принадлежат множеству C_3. Пусть теперь 3-й игрок фиксирует свою вторую стратегию q_3^1, реализующую сечение $G(q_3^1) = (MNP)$. В этом сечении максимум коалиции P_{12} достигается в ситуации M и равен $J_{12}(M)$=14. Поскольку ситуация M является элементом множества A_3, то эта ситуация принадлежит множеству C_3.

Рассмотрим, далее, нахождение множеств B_{ij}. По своему определению, множество B_{12} означает, что коалиция P_{12} при любой зафиксированной своей стратегии предоставляет возможность 3-му игроку выбрать наилучшую для него ситуацию на множестве ситуаций A_{12}, ни одну из которых сама эта коалиция не в состоянии улучшить для себя. Т.е. коалиция P_{12} предлагает 3-му игроку очень выгодный для него выбор. У этой коалиции на плоскости (q_1, q_2) имеются 4 стратегии (например, их можно на этой плоскости отметить буквами E, F, H, K). Учитывая, что $A_{12} = (EHM)$, замечаем, что только три стратегии коалиции P_{12} обеспечивают реализацию трёх ситуаций, входящих во множество A_{12}. При фиксации любой из этих трёх стратегий у 3-го игрока имеется только единственный выбор, реализующий каждую из ситуаций E, H и M. Следовательно, $B_{12} = (E, H, M)$. Множество B_{13} ищется на множестве $A_{13} = (E, M, N, P)$. Коалиция P_{13} фиксирует свои возможные стратегии, которые обеспечивают реализацию множества A_{13}. При этом у 2-го игрока в сечениях EF и LM имеется всего единственный выбор ситуаций E и M на множестве A_{13}. А в сечении NP обе ситуации N и P принадлежат множеству A_{13} и обеспечивают 2-му игроку одинаковый максимум $J_2(N) = J_2(P)$=3. Следовательно, $B_{13} = (E, M, N, P)$. Что же касается коалиции P_{23}, то она по очереди фиктрует свои стратегии, обеспечивающие реализацию хотя бы одного из элементов множества A_{23}. Поскольку в каждом из получаемых сечений у 1-го игрока имеется только единственный выбор одной из стратегий множества A_{23}, то все ситуации этого множества образуют множество B_{23}.

Множества C_{ij} ищутся по аналогии с множествами B_{ij}, учитывая те различия между этими множествами, которые имеются между множествами B_i и C_i.

5. Поиск наисильнейших равновесий в дифференциальных игровых задачах.

Рассмотрим программные динамические задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник ($i = \overline{1, N}$), используя смешанную стратегию $q_i(u_i, t)$, максимизирует свой функционал

$$J_i(q) = \int\limits_T dt \int\limits_{W(t)} f_0^i(u, x, t) dq, \;\; i = \overline{1, N} \tag{15}$$

при ограничениях

$$(u, t) \in W \subset E \times T \tag{16}$$

$$\dot{x} = \int\limits_{W(t)} f(u, x, t) dq, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset E^1, \tag{17}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, j = \overline{1, n}, \;\; x_k(t_1) = x_k^1, k \in K \subset \{\overline{1, N}\} \tag{18}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$; $u = (u_1, \ldots, u_N)$;
$q = q(u,t) = q_1(u_1,t) \ldots q_N(u_N,t)$;
$E = \prod_{i=1}^{N} E_i$, E_i — конечномерные пространства; W — компактное множество в $E \times T$; $W(t)$ — сечение множества W в момент $t \in T = [t_0, t_1]$; $U_i \stackrel{\triangle}{=} Pr_{E_i} W$ — проекция множества W на E_i; Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i,t)$ i-го участника в задаче (15)-(17) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W на некоторое компактное множество $U = U_1 \times \ldots \times U_N$ (множество Q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [10] представляет собой выпуклый компакт в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*(T, C(U_i)))$, $P_{q_i}(t)$ — носитель меры $q_i(\cdot,t)$ в момент $t \in T$. Пусть G — подмножество компактного множества $Q = \prod_{i=1}^{N} Q_i$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи, причем ограничения (13) вводят в задачу (15)-(18) неявную зависимость между стратегиями участников, а ограничения (16) — явную в связи с тем, что почти (в смысле меры Лебега) в каждый момент $t \in T$ меры $q_i(\cdot,t)$ могут быть выбраны только так, чтобы прямое произведение их носителей $\prod_{i=1}^{N} P_{q_i}(t)$ или $P_{q_i}(t) \times P_{q^i}(t)$ оказывалось во множестве $W(t)$. Только такие меры считаются допустимыми. Таким образом, множество G — это множество только таких наборов мер $q_i(\cdot,t)$, произведение носителей которых в каждый момент $t \in T$ лежит в $W(t)$.

Допущения 2. *Пусть $T = [t_0, t_1]$ – ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1; множество W – компакт в $E \times T$; отображение $\hat{f} = (f_0^1, \ldots, f_0^N, f_1, \ldots, f_n)$: $U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u,x,\cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot,\cdot,t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $|\hat{f}|$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x|+1)$, где $s(t)$ – некоторая интегрируемая функция; $x(t)$: $T \to E^n$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (15); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица:*

$$|\hat{f}(u,\bar{x},t) - \hat{f}(u,x,t)| \le b(t)|\bar{x} - x|$$

для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Как правило, решение конкретных дифференциальных игр удается получить только с использованием необходимых условий существования равновесий. Однако найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач или для равновесия по Нэшу в дифференциальной игре, к сожалению, невозможно принципиально. Однако, если A-равновесие немного усилить, назвав это усиление A^c-равновесием, то желаемые необходимые условия получить оказывается уже возможным [1]. Это усиление дается следующим определением.

Определение 15 [1]. Стратегию $q^* \in G$ назовем согласованной A_i^c-экстремальной, если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \triangleq \hat{q}^i < q_i > \in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i < q_i >, q_i) \leq J_i(q^*), \tag{19}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t) \neq q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \neq q_i^*(t)$. Ситуацию q^* назовем ситуацией согласованного A^c-равновесия, если неравенства (14) удовлетворяются для всех $i = \overline{1, N}$, т.е. если $q^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i^c \triangleq A^c$.

Конструктивные и эффективные для приложений теоремы 5.1.1 и 5.3.1 из [1] дают необходимые условия существования не только согласованных A^c-равновесий, но (при естественных незначительных ее модификациях) и любых более сильных (согласованных) равновесий из приведенной выше базовой системы равновесий (т.е. $\bar{C}^0$-, B-, C-, $\bar{C}^N$, D-, D'- и $\bar{D}$-равновесий) и из расширенной системы равновесий, задаваемой определениями 1-14, и поэтому может быть успешно использована на практике. Эта теорема по существу заменяет чрезвычайно сложную задачу поиска конфликтных равновесий в динамических задачах совокупностью гораздо более простых "локальных"(в каждый момент времени t) статических задач, платежными функциями в которых являются гамильтонианы.

Заключение. Изложенные в работе усложненные равновесия, как показано на примерах игровых задач с двумя и тремя участниками, позволяют существенно расширить возможности нахождения в произвольных статических и динамических конфликтующих системах единственного наисильнейшего конфликтного равновесия, оказывающегося решением некооперативных игр или же играющего роль базы, на основе которой находится единственный делёж (решение) кооперативных игр.

Литература

1. *Смольяков* Э.Р. Теория конфликтных равновесий. М.: Едиториал УРСС, 2005.

2. *Воробьёв Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука. 1984.

3. *Nash J.* Annals of Mathematics. 1951. V. 54. N 2. P. 286-295.

4. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.

5. *Смольяков Э.Р.* Расширенная базовая система конфликтных равновесий. ДАН. 2006. Т. 409. N 2. С. 163--166.

6. *Смольяков Э.Р.* Усиленные равновесия для конфликтных задач ДАН. 2007. Т. 415. N 3. С. 318--321.

7. *Смольяков Э.Р.* Вспомогательные сильные равновесия для динамических конфликтных задач. Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. N 11. С. 1497-1506.

8. *Смольяков Э.Р.* Единственный справедливый дележ в статических и динамических кооперативных играх. Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. N 12. С. 1637-1648.

9. *Смольяков Э.Р.* Ещё шаг к единственности решения игровых задач ДАН. 2008. Т. 423. N 6. С. 743-747.

10. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.