
II. Математические проблемы динамических систем

Т. В. Карамышева, М. Ю. Никитина

МГУ им. М. В. Ломоносова

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К КЛАССИФИКАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Аннотация

В работе проанализированы хаотические аттракторы некоторых трехмерных автономных систем ОДУ, рассмотренных в одной из работ Чена. Показано, что все они являются сингулярными аттракторами в смысле теории Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого.

1. Введение. В статье [1] изучалась проблема классификации хаоса в трехмерных автономных системах. Была сделана попытка классифицировать аттракторы на четыре типа: (1) аттракторы с гомоклинической орбитой; (2) аттракторы с гетероклинической орбитой; (3) аттракторы смешанного типа, т.е. с гомоклинической и гетероклинической орбитами; (4) остальные типы аттракторов. Цель данной работы – показать, что рассмотренные Ченом аттракторы являются сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ (Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого). По ФШМ-теории во всех хаотических системах обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется один универсальный сценарий перехода к хаосу. Сначала через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода некоторого исходного цикла, затем субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. Далее он может быть продолжен гомоклиническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контурам особых точек.

2. Сценарий перехода к хаосу. Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений, перечисленные Ченом в параграфе 5 статьи [1]. Покажем, что в обеих системах осуществляется единый сценарий перехода к хаосу.

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = b_2 x_2 - x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 x_2 + c_3 x_3 \end{cases}$$

При параметрах $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.1$, $b_2 = -12$, $b_{23} = -0.062$, $c_3 = -6.79$ Ченом получен аттрактор с двумя особыми точками (Рис. 1).

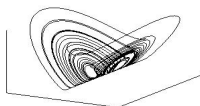


Рис. 1: $b_{23} = -0.062$

Удалось обнаружить, что бифуркация происходит по параметру b_{23} . При $b_{23} = -0.95$ возникает устойчивый цикл, при $b_{23} = -0.899$ происходит его удвоение и далее при $b_{23} = -0.876$ образуется аттрактор Фейгенбаума (Рис. 2).

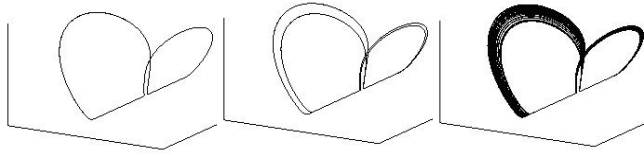


Рис. 2: каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода исходного цикла

Затем из каскада Шарковского удалось найти циклы периода пять при $b_{23} = -0.869$ и периода три при $b_{23} = -0.859$ (Рис. 3).

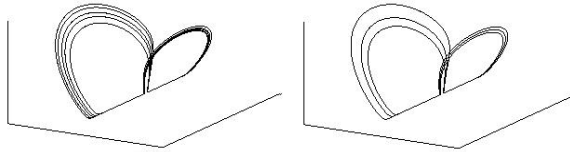


Рис. 3: циклы каскада Шарковского

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра найден цикл гетероклинического каскада с двумя витками при $b_{23} = -0.35$ и его удвоение при $b_{23} = -0.346$ (Рис. 4).

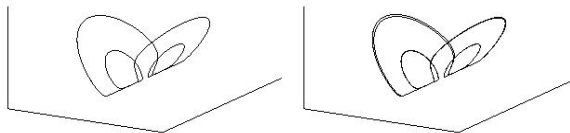


Рис. 4: циклы гетероклинического каскада

Далее найден цикл гомоклинического каскада при $b_{23} = -0.158$ и цикл гетероклинического каскада с тремя витками при $b_{23} = 0.0215$ (Рис. 5).

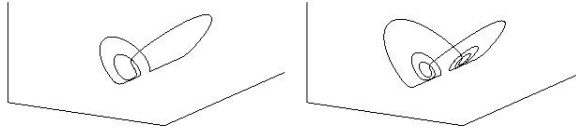


Рис. 5: гомоклинический и гетероклинический циклы

Таким образом, можно считать, что аттрактор (Рис. 1), полученный Ченом, является одним из сингулярных аттракторов гетероклинического каскада, циклы которого чередуются с циклами гомоклинического каскада, в полном соответствии с ФШМ-теорией.

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_3 + b \\ \frac{dx_3}{dt} = c_1x_1 + c_2x_2x_3 + c \end{cases}$$

При параметрах $a_1 = -1.44$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 2$, $b = -1.3$, $c_1 = -1.5$, $c_2 = -1$, $c = -\frac{a_1c_2}{a_2}b$, Ченом получен аттрактор с одной особой точкой (Рис. 6).

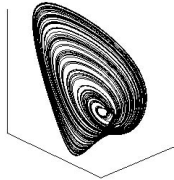


Рис. 6: $a_3 = 2$

Бифуркация происходит по параметру a_3 . При $a_3 = 2.3$ возникает устойчивый цикл, при $a_3 = 2.15$ — цикл удвоенного периода, при $a_3 = 2.085$ — цикл периода четыре и при $a_3 = 2.071$ — аттрактор Фейгенбаума (Рис. 7).

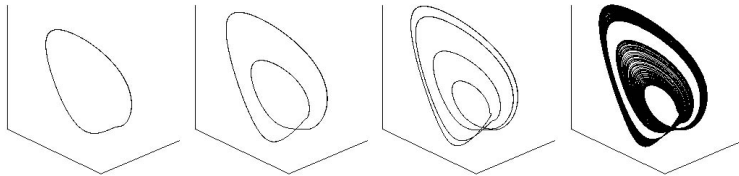


Рис. 7: каскад бифуркаций Фейгенбаума

Далее, при параметрах $a_3 = 2.051$ и $a_3 = 2.033$ были найдены циклы периодов пять и три соответственно (Рис. 8).

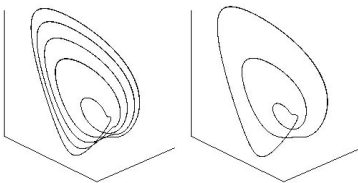


Рис. 8: циклы периодов пять и три

Один из циклов гомоклинического каскада был найден при значении параметра $a_3 = 1.988$ (Рис. 9). Заметим, что аттрактор, изображенный Ченом, находится внутри субгармонического каскада бифуркаций.

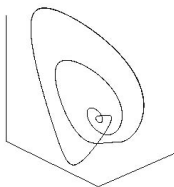


Рис. 9: гомоклинический цикл

3. Заключение. Результаты работы показали, что среди рассмотренных нами аттракторов из работы [1] не существует различных видов аттракторов, а все они подчиняются единому универсальному сценарию перехода к хаосу, начинающемуся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов и продолжающемуся затем субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского — каскадом рождения устойчивых циклов любого периода, и гомоклиническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру.

4. Литература

- [1] [Chen G. & Zhou T. Classification of Chaos in 3-D Autonomous Quadratic Systems—I. Basic Framework and Methods //Int J. of Bifur. Chaos, 2006, V. 16, № 9, P. 2459-2480]
- [2] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М., Едиториал УРСС, 2004, 320 с.
- [3] Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New methods for chaotic dynamics (monograph), World Scientific, 2006, 363 p.