Попков Ю. С.

Институт системного анализа, Москва

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЭФФИЦИЕНТА РОЖДАЕМОСТИ

Предлагаются динамические модели с энтропийным оператором, имитирующие пространственно - временную эволюцию возрастного распределения коэфициента рождаемости.

1. Введение

Общий (TFR) и специфицированный по возрасту (ASFR) коэффициенты рождаемости являются динамическими характеристиками деторождения в том смысле, что их значения, наблюдаемые в данный момент времени t, являются результатом ретроспективных процессов, происходящих на интервале времени $[t-s, t]$. Поэтому особый интерес приобретает возможность моделирования динамики указанных параметров процесса рождаемости. Это позволило бы не только воспроизводить «историю» рождаемости, но и более надежно предсказывать значения указанных коэффициентов в будущем.

2. Динамическая модель общего коэффициенте рождаемости

На процесс рождаемости оказывает определяющее влияние, так называемая, *репродуктивная установка*, которая представляет собой макрохарактеристику намерений населения в целом или его социальных слоев в сфере деторождения. Репродуктивную установку можно рассматривать, с одной строны, как желаемый эталон рождаемости, принятый населением, а с другой, как своеобразную позицию на шкале ценностей человеческой жизни: что важнее, иметь ребенка или посвятить себя карьерному росту; престижно иметь трех детей или четырех; может быть завести второго ребенка, если государство обеспечивает заметными дополнительными привилегиями и т.д.

Если придерживаться первой трактовки этого понятия, то репродуктивная установка - это потенциально возможный коэффициент рождаемости, который признается населением как некоторый эталон. Поэтому в качестве единицы измерения можно принять ту же, что и принята для общего коэффициента рождаемости, т.е. [*кол. детей/одну женщину*].

Для стран с невысоким уровнем жизни существенно поднимают репродуктивную установку различные экономические программы: доплаты матерям за рождение очередного ребенка, содействие государства в улучшении жилишных условия, бронтрование рабочих мест матерям на длительный период и т.д. В странах с высоким уровнем жизни влияние экономических программ существенно ниже. Там определяющую роль играет некая атрибутика жизни, немного похожая на ситуацию с модой. Например, в США в 60-х годах прошлого века оказалось «модным» иметь много детей, причем в интервале ранних фертильных возрастов, и как результат возник известный «baby boom». Напротив, в Западной Европе в конце прошлого и начало нового веков происходил сдвиг деторождения в сторону старших возрастов матерей: сначала карьера, потом дети. Поскольку риск потери возможностей к деторождению в интервале старших возрастов женщин возрастает, общие показатели рождаемости начали подать, несмотря на экономические программы.

Репродуктивная установка зависит от текущего состояния рождаемости, характеризуемого общим коэффициентом рождаемости, причем эта зависимость направлена на сохранение существующего состояния, т.е. носит «стабилизирующий» характер. Эта особенность репродуктивной установки особенно ярко проявляется в стандартах воспроизводства, зафиксированных в религиозных традициях ислама.

Наконец, важную роль в формировании репродуктивной установки населения, размещенного на определенной территории, играет миграция, а именно, иммиграция населения с отличными от резидентов репродуктивними установками. Происходит неизбежное смешивание населения, что приводит к изменению репродуктивной установки общего населения, размещенного на данной территории.

Подводя итог сказанному, можно утверждать, что репродуктивная установка есть характеристика потенциальной рождаемости. Если общий коэффициент рождаемости является характеристикой реальной рождаемости, то репродуктивная установка характеризует предельно возможную рождаемость в условиях существующей реальной рождаемости, существующего социально-экономического статуса резидентного и иммигрирующего населения.

Введем следующие обозначения: $R(n,t)$ - функция репродуктивной установки, $I(n,t)$ - удельный иммиграционный поток ([*кол. иммигрантов/одного жителя*]), $E(n,t)$ - удельная стоимость обобщенных экономических программ поддержки рождаемости ([*ед. стоимости / одного жителя*]) в регионе n в момент времени t. В силу изложенной выше феноменологии функция репродуктивной установки $R(n,t) = R[n, b(n,t), I(n,t), E(n,t)]$. Напомним,что единицей ее измерения является [*кол.детей/одну женщину*]. Будем предполагать, что все переменные являются дифференцируемыми функциями времени, причем время релаксации общего коэффициента рождаемости существенно больше, чем длина интервала времени l, на котором общий коэффициент рождаемости мало меняется.

Изменяемость общего коэффициента рождаемости $b(n,t)$ во времени удобно характеризовать относительной скоростью. Так, если имеет место одинаковая абсолютная скорость изменения общего коэффициента рождаемости для двух существенно различных значений этого коэффициента, то ее значимость больше для меньшего значения коэффициента $b(n,t)$, чем для большего его значения. Введем относительную скорость

$$v(n,t) = \frac{1}{b(n,t)} \frac{db(n,t)}{dt}. \tag{1}$$

Естественно предположить, что «силой», приводящей к изменению относительной скорости (1), является репродуктивная установка, т.е.

$$\frac{1}{b(n,t)} \frac{db(n,t)}{dt} = \zeta R[n, b(n,t), I(n,t), E(n,t)]. \tag{2}$$

Здесь $\zeta \gg 1/l$ - коэффициент пропорциональности, измеряемый в [*кол. детей/одну женщину в ед. времени*], а переменные $I(n,t)$ и $E(n,t)$ являются внешними для региона n. Последнее является, вообще говоря, предположением, так как иммиграционный поток $I(n,t)$ в регион n является следствием миграционного взаимодействия всех регионов. Однако, исследование динамики рождаемости в этом случае оставим читателям.

Итак, поскольку $I(n,t)$ и $E(n,t)$ считаются заданными, структура уравнения (2) оказывается одинаковой для всех регионов, и индекс n

можно опустить:

$$\frac{1}{b(t)}\frac{db(t)}{dt} = \zeta R[b(t), I(t), E(t)]. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию репродуктивной установки $R[b(t), I(t), E(t)]$, и исследуем некоторые ее качественные свойства. Из ее определения как характеристики намерений населения в сфере деторождения, заложенных природой, следует, что

$$R[b(t), I(t), E(t)] > 0, \ \text{ для всех } b(t) \geq 0,\ I(t) \geq 0,\ E(t) \geq 0. \tag{4}$$

Выше уже отмечалось, что текущее состояние рождаемости в терминах общего коэффициента рождаемости $b(t)$ является стабилизирующим фактором, работающим на сохранение текущей относительной скорости $v(t)$ (1). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial R}{\partial b} < 0. \tag{5}$$

Иммиграция, как правило, приводит к увеличению рождаемости, причем, количественная оценка этого влияния зависит от объема иммиграционного потока. Поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial I} \geq 0. \tag{6}$$

Более сложным является характер влияния экономических программ. В странах с низкой рождаемостью они направлены на ее повышение, и для них

$$\frac{\partial R}{\partial E} \geq 0. \tag{7}$$

Однако существуют страны (например, Китай), где рождаемость очень высокая и государство вводит специальные экономические программы, направленные на ее ограничение (рождение более, чем одного ребенка, становиться экономически невыгодным). В этом случае

$$\frac{\partial R}{\partial E} < 0. \tag{8}$$

В дополнение к указанным свойствам будем полагать, что функция репродуктивной установки допускает представление мономом степени k с коэффициентами, зависящими от общего коэфициента рождаемости:

$$R(b, I, E) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1+i_2+i_3=j} \eta_{i_1,i_2,i_3}(b) b^{i_1} I^{i_2} E^{i_3}. \tag{9}$$

Кажется естественным начать анализ с линейной его части ($k = 1$). Для линейной аппроксимации функции репродуктивной установки введем следующее обозначение:

$$R(b, I, E) = \alpha - \beta b + \gamma(b)I + \delta(b)E. \tag{10}$$

Поскольку в уравнение (2) входит общий масштабный множитель ζ, то без ограничения общности можно считать, что

$$0 < \{\alpha, \beta, \gamma(b), \delta(b)\} \leq 1. \tag{11}$$

Степень влияния иммиграционного потока на репродуктивную установку уменьшается с ростом коэфициента рождаемости. Поэтому, учитывая (11), $\gamma(0) = 1$ и $\gamma(b) = 0$ для всех значений $b \geq b_I^*$, где b_I^* - значение общего коэффициента рождаемости, заведомо превышающее его значение в иммиграционном потоке I. Рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию этой зависимости:

$$\gamma(b) = \begin{cases} 1 - \frac{b}{b_I^*}, \text{для } 0 \leq b \leq b_I^*, \\ 0, \text{для } b > b_I^*. \end{cases} \tag{12}$$

Если, как отмечалось выше, иммиграционния приводит к увеличению рождаемости или к сохранению ее на первоначальном уровне, то экономические программы могут быть направлены как на увеличение, так и на снижение рождаемости. Будем ориентироваться на «западный» стандарт воспроизводства, при котором рождаемость низкая и экономические программы направлены на ее подъем. Однако степень их влияния на репродуктивную установку зависит от общего коэффициента рождаемости, причем $\delta(0) = 1$ и $\delta(b) = 0$ для всех $b \geq b_E^*$. Здесь b_E^* - значение общего коэффициента рождаемости, при котором экономические программы становятся неэффективными. Для описания зависимости $\delta(b)$ воспользуемся кусочно=линейной ее аппроксимацией, аналогичной (12):

$$\delta(b) = \begin{cases} 1 - \frac{b}{b_E^*}, \text{для } 0 \leq b \leq b_E^*, \\ 0, \text{для } b > b_E^*. \end{cases} \tag{13}$$

Для «западного» стандарта воспроизводства $b_E^* < b_I^*$. Из (12, 13) следует, что существует три интервала для общего коэффициента рождаемости b, в которых функция репродуктивной установки имеет определенный вид. Обозначим их следующим образом: $J_1 = [0, b^*E)$, $J_2 = [b_E^*, b_I^*)$, $J_3 = [b_I^*, \infty)$.

Подставляя (12, 13) в (3) получим уравнение динамики общего коэффициента рождаемости. Поскольку функции $\gamma(b), \delta(b)$ - кусочно-линейные, данное уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{db}{dt} = \zeta b \begin{cases} R_1(b), \text{если } b \in J_1, \\ R_2(b), \text{если } b \in J_2, \\ R_3(b), \text{если } b \in J_3. \end{cases} \tag{14}$$

В этом уравнении

$$\begin{aligned} R_1(b) &= A_1 - C_1(b_E^*, b_I^*)b, \\ R_2(b) &= A_2 - C_2(b_I^*)b, \\ R_3(b) &= A_3 - C_3 b. \end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты в этих равенствах имеют вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha + I + E, \qquad C_1(b_E^*, b_I^*) = \beta + \frac{I}{b_I^*} + \frac{E}{b_E^*}, \\ A_2 &= \alpha + I, \qquad C_2(b_I^*) = \beta + \frac{I}{b_I^*}, \\ A_3 &= \alpha, \qquad C_3 = \beta. \end{aligned} \tag{16}$$

Из уравнения (14) и равенств (15, 16) видно, что структура правой части уравнения одинаковая для трех указанных интервалов, а параметры функций $R_1(b), R_2(b), R_3(b)$ различные.

Интервал J_1.Допустим, что начальное значение общего коэффициента рождаемости $b(0) \in J_1$. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять параметры функции $R_1(b)$, чтобы решение уравнения (14) $b(t) \in J_1$ для всех $t \geq 0$. Из таких условий можно установить интервалы значений удельных иммграционных потоков и общей стоимости экономических программ, при которых общий коэффициент рождаемости принадлежит интервалу J_1.

Итак, имеем:

$$\frac{db}{dt} = \zeta b[A_1 - C_1(b_E^*, b_I^*)b], \qquad b(0) \in J_1. \tag{17}$$

Это уравнение имеет стационарную точку $b_0^* = 0$ и стационарную точку

$$b_{11}^* = \frac{A_1}{C_1(b_E^*, b_I^*)}. \tag{18}$$

Нулевая стационарная точка принадлежит интервалу J_1, а стационарная точка b_2^* принадлежит интервалу J_1, если

$$b_I^* \frac{\alpha + I}{\beta b_I^* + I} \leq b_E^*. \tag{19}$$

Рассмотрим условия устойчивости этих стационарных значений общего коэффициента рождаемости. Для этого построим дифференциальное уравнение относительно отклонения $y(t) = b(t) - b^*$ от стационарного значения общего коэффициента рождаемости. Оно приобретает следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = \zeta[y(A_1 - 2C_1 b^*) - C_1 y^2]. \tag{20}$$

Решение этого уравнения устойчиво «в малом», если

$$A_1 - 2C_1 b^* < 0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что стационарное значений $b^* = 0$ неустойчиво, так как $A_1 = \alpha + I + E > 0$. Напротив, стационарное значение b_{11}^* (18) устойчиво «в малом», так как $-A_1 < 0$. Устойчивость «в малом» гарантирует существование области начальных отклонений от стационарного значение общего коэффициента рождаемости, но не определяет ее размеры. Последнее весьма важно тогда, когда необходимо повышать рождаемость. В этом случае размеры окрестности дают представление о предельных значениях удельных иммиграционных потоков и экономических программ, которые позволяют повышать рождаемость.

Обратимся снова к уравнению (20).

Рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение

$$y(t) = y(0)\exp(at) - w\int_0^t \exp(a(t-\tau))y^2(\tau)d\tau,$$

где для стационарной точки b_2^*

$$a = -A_1, w = C_1.$$

Обозначим $|y(t)| = u(t) > 0$. Из записанного выше интегрального уравнения имеем следующую оценку:

$$u(t) \geq u(0)\exp(at) + w\int_0^t \exp(a(t-\tau))u^2(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = av(t) + wv^2(t),\ v(0) > 0.$$

Согласно теоремы Гронуэла - Беллмана имеет место неравенство:

$$u(t) \geq v(t).$$

Поскольку $v(t) \geq 0$, то решение дифференциального уравнение для переменной $v(t)$ будет устойчивым «в большом», если правая часть в этом уравнении будет отрицательной. Для этого

$$v < -\frac{a}{w} = \frac{A_1}{C_1} = b^*_{11}. \qquad (22)$$

Если начальные значения общего коэффициента рождаемости $b(0) \in [0, 2b^*_E]$, то стационарное его значение устойчиво. Если ориентироваться на «западный» стандарт рождаемости, для которого $b(0) < b^*_{11}$, то требется повышать общий коэффициент рождаемости. Для этого случая область допустимых начальных значений общего коэффициента рождаемости совпадает с интервалом J_1.

Итак, условие (19), при котором стационарное значение общего коэффициента рождаемости принадлежит интервалу J_1, не зависит от от удельной обобщенной стоимости экономических программ поддержки рождаемости. Если это условие выполняется, то абсолютные значения общего коэффициента рождаемости (18) зависят как от удельных потоков иммиграции, так и от удельной обобщенной стоимости экономических программ.

Интервал J_2.Допустим, что начальное значение общего коэффициента рождаемости $b(0) \in J_2$. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять параметры функции $R_2(b)$, чтобы решение уравнения (14) $b(t) \in J_2$ для всех $t \geq 0$.

Имеем следующее дифференциальное уравнение для интервала J_2:

$$\frac{db}{dt} = \zeta b[A_2 - C_2(b^*_I)b], \qquad b(0) \in J_2. \qquad (23)$$

Это уравнение имеет стационарную точку $b^*_0 = 0$, которая не принадлежит интервалу J_2 и стационарную точку

$$b^*_{21} = \frac{A_1}{C_1(b^*_I)}. \qquad (24)$$

Последняя принадлежит интервалу J_2, если

$$\frac{b^*_E}{b^*_I} \leq b^*_I \frac{\alpha + I}{\beta b^*_I + I} \leq 1. \qquad (25)$$

Заметим, что это условие противоречит неравенству (19). Поэтому, если принять данное условие, то стационарноое значение общего коэффициента рождаемости будет принадлежать интервалу J_2 и не принадлежать интервалу J_1.

Для анализа устойчивости стационарного значения b^*_{21} общего коэффициента рождаемости рассмотрим дифференциальное уравнение относительно отклонения $y(t) = b(t) - b^*_{21}$: Допустим, что начальное значение общего коэффициента рождаемости $b(0) \in J_2$. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять параметры функции $R_2(b)$, чтобы решение уравнения (14) $b(t) \in J_2$ для всех $t \geq 0$.

$$\frac{dy}{dt} = \zeta[y(A_2 - 2C_2 b^*_{21}) - C_2 y^2]. \tag{26}$$

Решение этого уравнения устойчиво «в малом», так как $A_2 - C_2 b^*_2 < 0$. Если абсолютные значения начальных отклонений $|y(0)| \in [0, b^*_{21}]$ (см. (22)), то b^*_{21} устойчиво «в большом».

Таким образом, стационарное значение общего коэффициента рождаемости принадлежит интервалу $J_2 = [b^*_E, b^*_I)$, если выполняется условие (25). Это значение устойчиво «в большом», для начальных значений

$$b(0) \in \begin{cases} [b^*_E, 2b^*_{21}], \text{если } 2b^*_{21} \leq b^*_I, \\ J_2, \text{если } 2b^*_{21} \geq b^*_I. \end{cases} \tag{27}$$

По сравнению с предыдущим случаем, экономические программы поддержки рождаемости на работают в интервале J_2, так как коэфициент $\delta(b)$ (13) на этом интервале принят равным нулю.

Интервал J_3. Допустим теперь, что начальное значение общего коэффициента рождаемости $b(0) \in J_3$. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять параметры функции $R_3(b)$, чтобы решение уравнения (14) $b(t) \in J_3$ для всех $t \geq 0$.

Для данного интервала уравнение (14) приобретает наиболее простой вид:

$$\frac{db}{dt} = \zeta b(\alpha - \beta b), \qquad b(0) \in J_3. \tag{28}$$

Нулевое стационарное значение находится вне интервала J_3. Ненулевое стационарное значение

$$b^*_{31} = \frac{\alpha}{\beta} \geq b^*_I. \tag{29}$$

В интервале J_3 общий коэфициент рождаемости весьма высокий, его стационарное значение зависит только от параметров собственной динамики α, β.

Стационарное значение общего коэфициента рождаемости b^*_{31} (29) устойчиво «в большом» для начальных значений $b(0) \in [b^*_I, 2b^*_{31}] \subset J_3$.

В дальнейших исследованиях может оказаться полезной дискретная форма модели (14). Напомним, что время релаксации общего коэфициента рождаемости существенно больше, чем время релаксации процесса изменения численности населения. Иными словами, в течении промежутков времени длиной l лет (в уравнении (**??**) принят шаг квантования времени $\Delta = 1$ *году*) общий коэфициент рождаемости меняется мало. Поэтому при переходе к дискретному аналогу дифференциального уравнения (14) примем шаг квантования времени, равный l. Тогда из (14) получим следующее разностное уравнение:

$$b((q+1)l) = b(ql) + l\zeta b(ql) \begin{cases} R_1[b(ql)], & \text{если } b(ql) \in J_1, \\ R_2[b(ql)], & \text{если } b(ql) \in J_2, \\ R_3[b(ql)], & \text{если } b(ql) \in J_3. \end{cases} \tag{30}$$

$$b((q+1)l) = 0, \quad \text{если } b((q+1)l) < 0. \tag{31}$$

В этом уравнении функции $R_1(b), R_2(b), R_3(b)$ определены равенствами (15). Условие (37) появилось из-за того, что свойство положительности решений дифференциального уравнения при переходе к разностному автоматически не сохраняется.

3. Динамическая модель специфицированного по возрасту коэфициента рождаемости

Специфицированный по возрасту коэффициент рождаемости так же, как общий коэфициент рождаемости, меняется во времени, причем это изменение зависит от эволюции его на некотором временном интервале в прошлом по отношению к рассматриваемому моменту времени. Мотивируются эти изменения репродуктивной установкой. Но, в отличии от общего коэфициента рождаемости, в данном случае речь идет о репродуктивной установке для каждой возрастной группы в интервале фертильности. Следуя общей концепции стохастического механизма формирования распределения новорожденных по возрастам матерей, изложенной в [3], будем опираться на гипотезу об «энтропийном» происхождении этого распределения. Согласно этой гипотезе реализуемое распределение численности новорожденных $C(n,a,t)$ по возрастным группам матерей соответствует максимуму энтропии при выполнении балансовых условий. Распределение $C(n,a,t)$ и специфицированный по возрасту коэфициент рождаемости $b(n,a,t)$ связаны следующим соотношением:

$$b(n,a,t) = \frac{C(n,a,t)}{K_F(n,a,t)}, \qquad a \in I_f, \tag{32}$$

что позволяет использовать энтропийную модель [3] для определения ASFR. Напомним, что как функция времени специфицированный по возрасту коэффициеннт рождаемости кусочно-постоянен, т.е.

$$b(n,a,t) = b(n,a,ql), \text{ для всех } t \in [ql,(q+1)l). \tag{33}$$

Рассмотрим случай, когда миграция отсутствует, что позволяет опустить региональный индекс n. Тогда для $t \in [ql,(q+1)l)$ специфицированный по возрасту коэфициента рождаемости $b(a,ql)$, где $a \in I_f$ ($b(a,ql|a \in I_f)$) определяется решением следующей задачи максимизации энтропии:

$$H(b(a,ql|a \in I_f)) = -\sum_{a\in I_f} K_F(a,ql) \times$$

$$\left(b(a,ql) \ln \frac{K_F(n,ql)b(a,ql)}{\tilde{\nu}(a,ql)} + [g - b(a,ql)] \ln K_F(a,ql)[g - b(a,ql)] \right)$$

$$\Rightarrow \max, \sum_{a\in I_f} K_F(a,ql)b(a,ql) = K(0,ql), \tag{34}$$

$$\sum_{a\in I_f} b(a,ql) = b(ql),$$

$$\tilde{\nu}(a,ql) = \frac{\nu(a,ql)}{1 - \nu(a,ql)}.$$

Пусть в некоторый момент основного времени, принятый за нулевой $t = 0$ заданы начальные значения $b(0), b(a,0|a \in I_f), \nu(a,0|a \in I_f)$ и начальные значения координат состояния населения $K(0)$. В течение l лет общий и специфицированный по возрасту коэффициенты рождаемости и априорные вероятности сохраняют свои значения $b(0), b(a,0|a \in I_f), \nu(a,0|a \in I_f)$. Используя $b(a,0|a \in I_f)$ в основном уравнении демографического процесса, можно определять значения компонент вектора состояния населения в последовательные моменты основного времени $t = 1,\ldots,l-1$ и, наконец, для $t = l$ получим $K(l)$. Нас будут интересовать не все компоненты вектора $K(l)$, а только $K(0,l)$ - количество новорожденных, и $K_F(a,l)$ - распределение численности женщин в интервале I_f фертильных возрастов.

Параллельно с этой процедурой, используя динамическую модель общего коэффициента рождаемости и начальное значение $b(0)$ этого коэффициента, определяем его значение $b(l)$ в момент времени l.

Таким образом, к моменту времени l определены все внешние параметры, необходимые для определения специфицированного по возрасту коэфициента рождаемости, за исключением априорных вероятностей $\nu(a,l|a \in I_f)$. Например, положим $\nu(a,l|a \in I_f) = b(a,0|a \in I_f)$. Здесь могут быть использованы и другие правила.

Теперь можно обратиться к энтропийной модели (34) и вычислить специфицированный по возрасту коэфициент рождаемости $b(a,l|a \in I_f)$. Итак, к моменту времени $t = l$ имеется набор параметров, аналогичный тому, который имелся в начальный момент времени $t = 0$. Следовательно, изложенную процедуру можно повторить и получить значения специфицированного по возрасту коэфициента рождаемости $b(a,2l|a \in I_f)$ и т.д.

Рассмотрим изложенную процедуру более детально. В ней задействованы три модели: динамики численности поло-возрастных групп M1, динамики общего коэффициента рождаемости M2 и энтропийная модель специфицированного по возрасту коэффициента рождаемости M3.

Поскольку здесь рассматривается случай отсутствия миграции, то динамика численности мотивируется только биологическим воспроизводством. Поэтому модель M1 описывается следующим разностным уравнением:

$$K(t+1) = \begin{cases} (U+G(t))K(t), & \text{если } K(t+1) > 0, \\ 0, & \text{если } K(t+1) < 0, \end{cases}, \qquad K(0) > 0. \quad (35)$$

Заметим, что элементами матрицы $G(t)$ являются специфицированные по возрасту коэффициенты рождаемости и смертности (предполагаются заданными), которые на интервалах времени $t \in [ql,(q+1)l)$ остаются постоянными.

В динамической модели M2 общего коэффициента рождаемости при отсутствии иммиграционного потока имеет вид:

$$b((q+1)l) = b(ql) + l\zeta b(ql) \begin{cases} R_1[b(ql)], & \text{если } b(ql) \in J_1, \\ R_3[b(ql)], & \text{если } b(ql) \in \tilde{J}_3. \end{cases} \quad (36)$$

$$b((q+1)l) = 0, \quad \text{если } b((q+1)l) < 0. \quad (37)$$

В этих выражениях

$$R_1(b) = A_1 - C_1(b_E^*)b, \qquad R_3(b) = A_3 - C_3 b. \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha + E(ql), \qquad C_1(b_E^*) = \beta + \frac{E(ql)}{b_E^*}, \\ A_3 &= \alpha, \qquad C_3 = \beta, \qquad \tilde{J}_3 = [b_E^*, \infty). \end{aligned} \quad (39)$$

Напомним, что воздействие $E(ql)$ обусловлено экономическими программами поддержки рождаемости. В принципе величина этого воздействия должна быть связана с количеством новорожденных и трендом его на некотором временном интервале в прошлом по отношению к данному ql моменту времени. Здесь мы не рассматриваем конкретный вид такой связи, но обозначаем возможность ее введения.

И наконец, в энтропийной модели М3 (34) вычисляется специфицированный по возрасту коэффициент рождаемости с использованием информации о количестве новорожденных $K(0, ql)$, емкостях возратных групп фертильных женщин $K_F(a_-^f, ql), \ldots, K_F(a_+^f, ql)$, значении общего коэффициента рождаемости $b(ql)$ и априорных вероятностях $\nu(a, ql) = b(a,(q-1)l),\ a \in I_f$.

Литература

1. *Карпова В.М.* Построение и исследование динамических моделей рождаемости. В кн. «Математическое моделирование социальных процессов», М., Изд. МАКС Пресс, 2004, вып. 6.
2. *Беккенбах Э., Белман Р.* Неравенства. М., Наука, 1965.
3. *Попков Ю.С.* Энтропийные модели рождаемости. Труды ИСА РАН, «Динамика неоднородных систем», том ,вып. 2009.