Попков Ю. С.

Институт системного анализа, Москва

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЭФФИЦИЕНТА РОЖДАЕМОСТИ

Излагаются методы вывода дифференциальных уравнений любых процессов, в отношении которых известно только то, что они зависят от предполагаемого набора переменных и параметров. В частности, найдена универсальная система нелинейных дифференциальных уравнений свободного движения, указывающая на существование процессов, в которых инерциальные перегрузки компенсируются за счёт любой из высших производных, а течение внутреннего времени останавливается при любых скоростях изменения этих процессов. Демонстрируется, что эти процессы допускают дискретные переходы из нашего трёхмерного пространства в двойственное к нему, выполняемые за счёт больших энергий, в частности, — за счёт электромагнитных полей большой напряжённости.

1. Введение

Уравнения, которые можно найти с помощью экстремальной теории размерностей [1], по сути своей должны описывать некие реально существующие экстремальные свободные или возмущаемые движения любых масс (в гравитационных, электромагнитных и иных полях). В данной работе найдена методика получения дифференциальных уравнений любых процессов на основе лишь информации о том, от каких переменных и констант эти уравнения могли бы зависеть, и, в частности найдены совершенно новые (причём весьма простые и удивительные) уравнения движения, обладающие кажущимися фантастическими свойствами, наверняка указывающими на какие-то пока ещё нам неизвестные формы движения и процессы. В [1] было продемонстрировано, что если классический анализ размерностей [2–4] дополнить

[1]Работа выполнена по программе "Фундаментальные основы информационных технологий и систем"РАН, проект № 1-3

принципом экстремальности (понятием особых экстремалей [5, с. 295-320; 6, с. 200-245]), то это существенно расширяет возможности этого анализа и позволяет предсказывать множество новых фундаментальных физических постоянных и находить (как это демонстрируется ниже) новые закономерности в природе, открывающие непознанные возможности научно-технического прогресса.

Демонстрируется, как с помощью экстремальной теории размерностей [1], с одной стороны, удалось найти простые и весьма удивительные уравнения, которые, вероятно, составят основу для применения совершенно новых принципов движения в пространстве и новых процессов в физике, указывающие на существование специфической формы свободного движения (в отсутствие любых сил, кроме инерциальных, рождаемых самим движением), реализующегося только по траекториям, определяемым параметрическим семейством экспонент; а с другой — открылась возможность находить функциональный вид правых частей не только относительно простых, но и весьма сложных многочленных дифференциальных уравнений, причём было найдено, что вид этих правых частей определяется числом и функциональным видом найденных экстремалей.

В частности, найдено, что любая траектория обобщённого свободного движения удовлетворяет любому из бесконечного числа найденных нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых определяет ту или иную высшую производную, соответствующее управление которой при любой скорости и ускорении тела позволяет обеспечить движение по семейству найденных экспонент с компенсацией перегрузок на движущемся объекте и с остановкой "внутреннено"времени на этом объекте. Это означает, прежде всего, возможность движения с любыми скоростями (не превосходящими скорости света в вакууме) и ускорениями, не испытывая на себе действие инерциальных сил (перегрузок). На примере полёта самолёта в атмосфере продемонстрирована возможность определения с помощью эктремальной теории размерностей функционального вида сложных многочленных дифференциальных уравнений.

2. Экстремали в теории размерностей

Введёное в [1] в классический анализ размерностей понятие особых экстремалей, опирающееся на нижеприведённую теорему, позволило находить новые фундаментальные физические постоянные, как это продемонстрировано в [1], и получать, как демонстрируется ниже, новые уравнения движения, реализующиеся в природе в рамках любых интересующих нас размерных физических величин. Формулировка теоремы опирается на следующие определения и допущения.

Допущения. Пусть выбрана некоторая система единиц с основными единицами $B_1, \ldots, B_n$ (например, $B_1 = L$ —единица длины, $B_2 = M$ —единица массы и $B_3 = T$ — единица времени в гауссовой системе единиц [СГС]: сантиметр, грамм, секунда) и заданы k известных экстремальных базовых постоянных $A_1, \ldots, A_k$ (например, заряд электрона $A_1 = e$, скорость света $A_2 = c$ и гравитационная постоянная $A_3 = G$) и $m - k$ произвольно выбранных физических параметров $A_{k+1}, \ldots, A_m$, имеющих размерности $[A_i] = [B_1]^{\alpha_{i1}}, \ldots, [B_n]^{\alpha_{in}}$, $i = 1, \ldots, m$. И пусть ищется представление произвольного параметра (или процесса) X, имеющего размерность $[X] = [B_1]^{\beta_1}, \ldots, [B_n]^{\beta_n}$, которое запишем в виде, более удобном для наших дальнейших ссылок на него

$$R \stackrel{\triangle}{=} X - CA_1^{\alpha_1} \ldots A_m^{\alpha_m} = 0,$$

где C — произвольная безразмерная постоянная. Это равенство в аргументах размерностей принимает вид

$$[X] = [B_1]^{\beta_1} \ldots [B_n]^{\beta_n} = ([B_1]^{\alpha_{11}} \ldots [B_n]^{\alpha_{1n}})^{\alpha_1} \ldots ([B_1^{\alpha_{m1}} \ldots [B_n]^{\alpha_{mn}})^{\alpha_m}.$$

Уравнивание размерностей с обеих сторон этого равенства приводит к линейной системе n уравнений с m неизвестными α_i:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\alpha_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если эта система несовместна, то это означает, что параметры A_i выбраны неудачно и их следует заменить. Если же система совместна, то, в зависимости от ранга n_0 матрицы $\{\alpha_{ij}\}$, она позволяет выразить n_0 параметров α_i $(n_0 \leq n)$ через остальные $(m - n_0)$. т.е. $\alpha_1(\alpha_{n_0+1}, \ldots, \alpha_m), \ldots, \alpha_{n_0}(\alpha_{n_0+1}, \ldots, \alpha_m)$.

Теорема 1. *В случае удовлетворения вышеприведенных допущений поставленная задача представления параметра X через параметры A_i, $i = 1, \ldots, m$, позволяет найти $m - n_0$ экстремальных формул, связывающих между собой параметры A_i, с помощью особых экстремалей из условий $\partial \lg X / \partial \alpha_j = 0$, $j = n_0 + 1, \ldots, m$, а также n_0 экстремальных формул, выражающих n_0 основных единиц через параметры A_i, $i = 1, \ldots, m$, из условий $\partial \lg R / \partial \alpha_j = 0$, в которые вместо X по очереди подставляются параметры B_j, $j = 1, \ldots, n_0$. Если равенство $R = 0$ при некотором C совместно со всеми особыми* *экстремалями, то существует огибающая параметрического семейства экстремалей (определяющая некоторую реальность), а если — несовместно, то искомое представление X недопустимо.*

Продемонстрируем, как с помощью теоремы 1 и следствий из неё [1] можно получать новые дифференциальные уравнения движения, указывающие на существование неизвестных до сих пор особенностей нашего мира, а также покажем, как эта теорема позволяет выявлять недопустимые представления параметров (процессов) X. Эта недопустимость обнаруживается как результат того, что параметрическое семейство экстремалей не имеет огибающей.

Ради упрощения изложения ограничимся двумерным эвклидовым пространством (x, t), где x — произвольный физический объект, имеющий любую размерность, а t — произвольный параметр, также могущий иметь произвольную размерность, который будем использовать в качестве независимой переменной. В случае многомерного пространства полученные результаты можно отнести к отдельным компонентам этого пространства. Сначала, ради ещё большего упрощения, рассмотрим в качестве объекта x эвклидову координату математической точки, перемещающейся в плоскости (x, t), где в качестве параметра t берётся время. Примем следующие обозначения: e -заряд электрона, c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная, h — аналог постоянной Планка [1], L_0 — некоторая фундаментальная длина.

Будем искать на основе экстремальной теории размерностей [1] представление траектории $x(t)$ в виде следующего разложения через вышеуказанные физические параметры и любые производные от $x(t)$ по времени ($\dot{x}$, $\ddot{x}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}, \ldots$):

$$x(t) = Ch^k e^l c^m L_0^n G^p \dot{x}^q \ddot{x}^r (x^{(3)})^s \ldots, \tag{1}$$

где C — неизвестная безразмерная постоянная.

Запишем это уравнение в основных размерностях гауссовой системы единиц [СГС](сантиметр, грамм, секунда):

$$[L] = \left[\frac{ML^2}{T}\right]^k \cdot \left[\frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T}\right]^l \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^m \cdot [L]^n \cdot \left[\frac{L^3}{MT^2}\right]^p \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^q \cdot \left[\frac{L}{T^2}\right]^r \cdot \left[\frac{L}{T^3}\right]^s \ldots.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем систему трёх линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных (степеней):

$$\begin{aligned} 0 &= k + \tfrac{1}{2}l - p \ldots, \\ 0 &= k + l + m + 2p + q + 2r + 3s + \ldots, \\ 1 &= 2k + \tfrac{3}{2}l + m + n + 3p + q + r + s + \ldots. \end{aligned}$$

Определяя из этой системы любые три степени через остальные, получаем, например:

$$
\begin{aligned}
&k = 2 + m - 2n + q + 4r + 7s\ldots,\\
&l = -3 - 2m + 3n - 2q - 7r - 12s\ldots,\\
&p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}r + s\ldots,
\end{aligned}
$$

В результате разложение (1) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&x(t) = Ch^{2+m-2n+q+4r+7s} \cdot e^{-3-2m+3n-2q-7r-12s} \cdot c^m \cdot L_0^n\cdot\\
&G^{1/2-(1/2)n+(1/2)r+s} \cdot \dot{x}^q \cdot \ddot{x}^r \cdot (x^{(3)})^s\ldots,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Логарифмируя выражение (2) и приравнивая нулю частные производные от $\lg x$ по $m, n, q, r, s, \ldots$ (т.е. определяя особые экстремали [1]), приходим к следующему множеству экстремальных параметров и экстремальных соотношений

$$
h = \frac{e^2}{c}, \quad L_0 = \frac{h^2\sqrt{G}}{e^3}, \tag{3}
$$

$$
\dot{x} = \frac{e^2}{h}, \quad \ddot{x} = \frac{e^7}{h^4\sqrt{G}}, \quad x^{(3)} = \frac{e^{12}}{h^7 G}. \tag{4}
$$

Принципиально важным в экстремальных уранениях (3) и (4) является то, что входящие в них параметры (e, c, G, h, L_0) представляют собой экстремальные базовые размерные физические константы, имеющие строго определённые численные значения, найденные в [1] (следует иметь в виду, что классическая постоянная Планка $\hbar$ и найденная Планком фундаментальная длина L_{Plank} не входят в число экстремальных базовых параметров и их использование недопустимо в полученных уравнениях).

Подставляя экстремали (3) и (4) в (2), получаем

$$
x = C\frac{h^2\sqrt{G}}{e^3}. \tag{5}
$$

Формально уравнения (3)-(5) определяют огибающую параметрического семейства экстремалей (2)-(4), причём уравнения (4), (5) с учётом (3) нетрудно привести к следующему эквивалентному виду:

$$
\dot{x}^2 = x\ddot{x}, \quad \dot{x}^3 = x^2 x^{(3)}, \quad \dot{x}x^{(3)} = \ddot{x}^2, \tag{6}
$$

$$
C = 1, \quad x = \frac{h^2\sqrt{G}}{e^3} = \frac{\dot{x}^2}{\ddot{x}}. \tag{5a}
$$

В самом деле, уравнения (6) и (5a) получаются следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}x^{(3)} = \tfrac{e^2}{h}\tfrac{e^{12}}{h^7 G} = \tfrac{e^{14}}{h^8 G} = \ddot{x}^2 = \left[\tfrac{e^7}{h^4\sqrt{G}}\right]^2,\\
&\dot{x}^2 = \tfrac{e^4}{h^2} = x\ddot{x} = C\tfrac{h^2\sqrt{G}}{e^3}\tfrac{e^7}{h^4\sqrt{G}} = C\tfrac{e^4}{h^2}, \quad C = 1,\\
&\dot{x}^3 = \tfrac{e^6}{h^3} = x^2 x^{(3)} = \tfrac{c^2 h^4 G}{e^6}\tfrac{e^{12}}{h^7 G} = C^2\tfrac{e^6}{h^3}, \ldots.
\end{aligned}
$$

Уравнения (6) указывают на то, что произвольные динамические системы допускают существование бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих некоторое "свободное" движение, поскольку они не включают в свой состав никаких силовых переменных. Причём эти уравнения носят весьма универсальный характер и являются составной частью любых процессов. Заметим, что вывод уравнений (6) из зависимостей (4) и (5) может показаться парадоксальным, если учесть, что (e, c, G, h, L_0) — экстремальные фундаментальные постоянные, а $x(t)$ — это функция. Однако теория размерностей — это всего лишь теория поиска удачных проекций неизвестных сложных бесконечномерных процессов на некоторые, удачным образом выбранные, подпространства; и пока ещё в этой теории гораздо больше искусства, чем собственно теории.

Заметим, что если в разложении (1) в явном виде учесть производные от $x(t)$ также и более высоких порядков, то в дополнение к системе уравнений (6) можно найти ещё и множество других уравнений свободного движения. В связи с этим полный вывод всех уравнений свободного движения мы проведём ниже в рамках более естественной для их вывода исходной постановки задачи. В этой постановке мы учтём, однако, по существу излишнюю, но существенную для нашего дальнейшего изложения, переменную $g(t)$, определяющую внешнее ускорение динамической системы.

Траекторию движения будем искать в виде функции
$x(t) = x(g, \dot{x}, \ddot{x}, x^{(3)}, \ldots)$, воспользовавшись разложением

$$
x(t) = C\ddot{x}^k \cdot \dot{x}^l \cdot g^m \cdot x^{(3)p} \cdot x^{(4)q} \cdot x^{(5)r} \cdot x^{(6)s} \cdot x^{(7)u} \cdot x^{(8)v} \ldots, \qquad (7)
$$

Запишем это уравнение в основных размерностях системы [СГС]:

$$
[L] = \left[\tfrac{L}{T^2}\right]^k \cdot \left[\tfrac{L}{T}\right]^l \cdot \left[\tfrac{L}{T^2}\right]^m \cdot \left[\tfrac{L}{T^3}\right]^p \cdot \left[\tfrac{L}{T^4}\right]^q \cdot \left[\tfrac{L}{T^5}\right]^r \cdot \left[\tfrac{L}{T^6}\right]^s \cdot \left[\tfrac{L}{T^7}\right]^u \cdot \left[\tfrac{L}{T^8}\right]^v \ldots.
$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, приходим к следующей системе двух линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных (степеней):

$$
\begin{aligned}
&1 = k + l + m + p + q + r + s + u + v \ldots,\\
&0 = 2k + l + 2m + 3p + 4q + 5r + 6s + 7u + 8v \ldots,
\end{aligned}
$$

Выражая из этой системы любые две степени через остальные, получаем, например,

$$k = -1 - m - 2p - 3q - 4r - 5s - 6u - 7v \ldots,$$
$$l = 2 + p + 2q + 3r + 4s + 5u + 6v \ldots.$$

Это приводит к разложению

$$x = C\ddot{x}^{(-m-2p-3q-4r-5s-6u-7v-1)} \cdot \dot{x}^{(2+p+2q+3r+4s+5u+6v)} \cdot$$
$$g^m \cdot x^{(3)p} \cdot x^{(4)q} \cdot x^{(5)r} \cdot x^{(6)s} \cdot x^{(7)u} \cdot x^{(8)v} \ldots. \tag{8}$$

Отсюда находим следующее множество особых экстремалей:

$$\ddot{x} = g, \tag{9}$$

$$\ddot{x}^2 = \dot{x}x^{(3)}, \quad \ddot{x}^3 = \dot{x}^2x^{(4)}, \quad \ddot{x}^4 = \dot{x}^3x^{(5)},$$
$$\ddot{x}^5 = \dot{x}^4x^{(6)}, \quad \ddot{x}^6 = \dot{x}^5x^{(7)}, \quad \ddot{x}^7 = \dot{x}^6x^{(8)}, \ldots. \tag{10}$$

Очевидно, что в (10) все четные производные $x^{(2k)}, k > 1$ имеют тот же знак, что и $\ddot{x}$, а все нечетные — знак $\dot{x}$. Неизвестную до сих пор систему нелинейных дифференциальных уравнений (10) запишем в компактной форме

$$\ddot{x}^{k+1} = \dot{x}^k x^{(k+2)}, k = 1, 2, 3, ... \tag{11}$$

Первое уравнение системы уравнений (11) имеет следующие общие решения

$$x = e^{C_1 t}\left(C_2 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-C_1 s} ds + C_3\right) =$$
$$e^{C_1 t}\left(\frac{C_2}{C_1}e^{-C_1 t_0} + C_3\right) - \frac{C_2}{C_1} = K_1 e^{C_1 t} + K_2, \tag{12}$$

$$\dot{x} = const, \tag{13}$$

причем уравнение (13) описывает хорошо известное свободное движение тела, которому, как всегда казалось, не существует альтернатив. Однако уравнения (11) также описывают свободное движение, что следует уже из самого их вида, включающего только инерциальные переменные $x^{(k)}$ (при $m = 0$ в (8)).

Интересно отметить, что решения (12), (13) удовлетворяют также и всем остальным уравнениям бесконечной системы (11), а не только первому из них.

Из самого вида уравнений (11) следует, что при любых скоростях $\dot{x}$ удовлетворение этих уравнений в любой момент t обеспечивается за счёт компенсации инерциального ускорения $\ddot{x}$ теми или иными из высших производных по закону $x^{(k+2)}(t) = \ddot{x}^{k+1}/\dot{x}^k$, обеспечивающему не только компенсацию ускорения, но одновременно и движение по траекториям семейства (12). Однако эти уравнения играют роль не только "компенсаторов"инерциального ускорения.

Заметим, что с воздействием высших производных на динамику до сих пор не приходилось сталкиваться потому, что эти производные проявляют своё влияние на движение лишь при весьма экзотических условиях, не наблюдавшихся в известных к настоящему времени как рукотворных, так и природных динамических системах.

При $m = 0$ совместное решение уравнений (8) и (11) даёт $C = 1$ и систему бесконечного числа уравнений

$$\dot{x}^{k+1} = x^k x^{(k+1)}, k = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

представляющих собой уравнения огибающей поверхности параметрического семейства (8) после подстановки в него экстремалей (11). Решение уравнений (14) дается экспонентой

$$x = K_1 e^{C_1 t}, \tag{15}$$

определяющей допустимые состояния переменной $x(t)$, причём решение (15) представляет собой двухпараметрическое подсемейство трёхпараметрического семейства (12).

3. Экзотические решения уравнений огибающей семейства экстремалей

Уравнения особых экстремалей и огибающей поверхности параметрического семейства, как следует из изложенного, привели к удивительному результату: объект (или процесс) им удовлетворяющий, оказывается, может находиться в специфическом свободном движении (как в рассмотренном случае при $m{=}0$) в условиях изменяющихся его скоростей и ускорений. Эти уравнения указывают также на то, что объект в этом свободном движении не испытывает инерциальных перегрузок, поскольку инерциальные ускорения при любых скоростях компенсируются теми или иными высшими производными; причём эти уравнения демонстрируют также тот факт, что возможно создание динамических систем, обеспечивающих подобную компенсацию.

Но это далеко не все удивительные особенности этих уравнений. Оказывается, что при любых скоростях движения объекта по экспоненциальной огибающей (заметим, что это не имеет никакого отношения к проблемам, связанным с релятивистскими скоростями) время в самом объекте, т.е. его "собственное"время, не изменяется, сколько бы времени при этом ни прошло в окружающем его пространстве; и при этом сам объект остаётся неизменяемым во время его нахождения на любой из кривых $x = K_1 e^{C_1 t}$.

В самом деле, если вместо параметрического разложения (7) рассмотреть разложение не x, а $t = t(x, \dot{x}, \ddot{x}, x^{(3)}, \ldots)$, то снова получаем уравнения (14) и огибающую этого параметрического семейства, имеющую вид (с учётом уравнений (14)):

$$t = Cx/\dot{x} = C\dot{x}/\ddot{x} = \ldots. \tag{16}$$

Подставляя любое из выражений t из (16) в (15) и дифференцируя полученное выражение, находим

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(K_1 e^{CC_1 x/\dot{x}}\right) = CC_1 K_1 e^{CC_1 x/\dot{x}} \left(\frac{\dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2}\right) = 0,$$

т.е. объект x, независимо от своей природы и размерности, совершенно не влияющих на вид уравнений (11) и (14), во время движения по экспоненциальной огибающей не изменяется;

а подставляя в (16) экспоненту (15), получаем

$$t = C\frac{x}{\dot{x}} = C\frac{K_1 e^{C_1 t}}{K_1 C_1 e^{C_1 t}} = \frac{C}{C_1} = const,$$

т.е. время в системе координат, связанной с "движущимся"объектом, не изменяется, независимо от скорости движения.

Указанные свойства особых экстремалей и экспоненциальных огибающих параметрических семейств, вероятно, удастся использовать в будущем при создании динамических систем, не подверженных воздействию времени и инерциальных перегрузок. К этим свойствам уравнений огибающей (14) следует добавить ещё и органически присущую этим уравнениям возможность разрыва фазовых координат $(x, \dot{x})$, что позволяет реализовывать дискретные переходы в пространстве в случае удовлетворения ограничений на энергию в точках разрыва [8, 9].

На рис.1 в пространстве (x, t) схематически изображён переход из начального состояния (x_0, v_0) в момент $-t_0$, где $x_0 = x(-t_0)$, $v_0 = v(-t_0)$ (точка А на рис 1.), в состояние $(x(0), v(-0))$ (точка B) по изображённой на рис 1 кривой AB, представляющей собой огибающую поверхности параметрического семейства, удовлетворяющую уравнениям (14). Однако вернуться в будущем в некоторое время t_0 в исходное состояние (x_0, v_0) (т.е. в точку E) по траекториям уравнений (14) возможно только при двукратном разрыве одной из фазовых координат $(x(t), v(t))$, где $v(t) = \dot{x}$, при t=0 и t_0. Иного способа возвращения "домой"по траекториям уравнений (8) не существует. И это связано с тем, что непрерывные траектории между верхней и нижней полуплоскостями на рис. 1 невозможны, что следует из самих уравнений (14) и что хорошо согласуется с результатами работ [8, 9]. Рассмотрим возможные движения по траекториям уравнений (14).

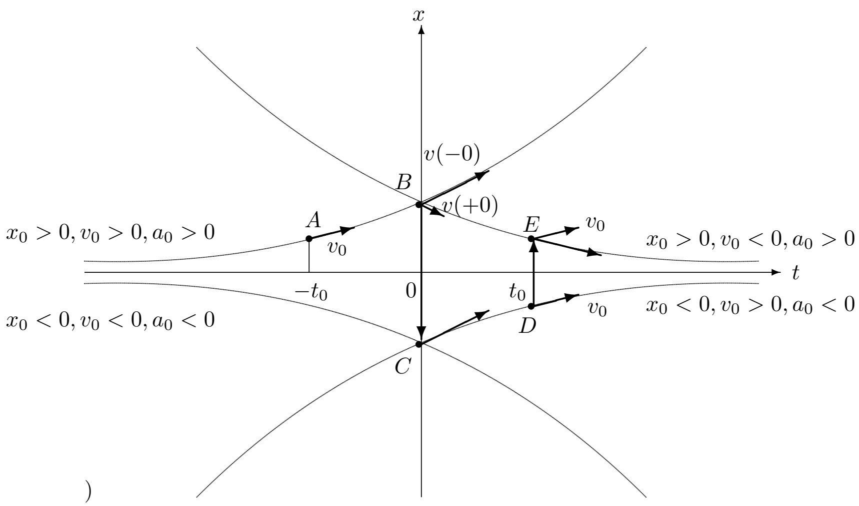

Рис. 1

Возможны только два пути движения по траекториям уравнений (14) с возвращением назад в будущем. Первый путь - это движение по траектории $ABCDE$ с двукратным разрывом положения $x(t)$ в моменты $t = 0$ и $t = t_0$ с реализацией в эти моменты энергозатрат на переход (в двойственное пространство), рассчитанных в [8, 9]. И второй путь - это движение с импульсным изменением скорости: в момент t=0 вектор скорости $v(-0)$ импульсно заменяется вектором

$v(+0)$ на рис. 1, а в момент t_0 вектор скорости $v(t_0 - 0)$ заменяется на исходный v_0 (разумеется, тоже с огромными энергозатратами).

4. Некоторые специальные случаи и приложения полученных решений

Чтобы продемонстрировать возможности выявления условий существования или отсутствия огибающей параметрических семейств экстремалей, рассмотрим некоторые частные случаи разложения (1). Примем сначала, что в (1) $l = m = n = 0$, т.е. в разложении не участвуют величины e, c, L_0. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} &k = p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r + s, \\ &q = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2}r - 6s \end{aligned} \tag{17}$$

и имеем следующее разложение

$$x(t) = Ch^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r+s)} \cdot G^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r+s)} \cdot \dot{x}^{(-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}r-6s)} \cdot \ddot{x}^{r} \cdot (x^{(3)})^{s}. \tag{18}$$

Вычисляя экстремали и подставляя их в (18), приходим к следующим уравнениям для огибающей

$$Gh = \frac{\dot{x}^7}{\ddot{x}^2} = \frac{x^2\dot{x}^3}{C^2} = \frac{\dot{x}^6}{x^{(3)}}. \tag{19}$$

Три уравнения (19) не имеют решения $x(t)$ ни при каком значении C. А следовательно, огибающей в этом случае не существует, что указывает на невозможность принятого представления переменной $x(t)$. Однако, если в (17) положить s=0, т.е. исключить из рассмотрения третью производную, то оказывается, что огибающая существует при $C^2 = 4/9$, удовлетворяет первым двум уравнениям (19) и задаётся параметрическим семейством

$$x(t) = \left(\frac{5}{3}(\frac{4}{9}Gh)^{1/3}t + C_1\right)^{(3/5)},$$

определяющим некоторый класс возможных траекторий, зависящих от фундаментальных физических постоянных Gh.

Если же в разложении (18) исключить первую производную, т.е. положить в (17) $q = 0$, то в этой задаче тоже существует огибающая, удовлетворяющая (с безразмерной постоянной $C = 49/6$) уравнениям

$$(Gh)^2 = \left(\frac{\ddot{x}^{12}}{(x^{(3)})^7}\right)^2 = \frac{x^7\ddot{x}^3}{C^7}.$$

Существует огибающая также и в случае, если в разложении (18) устранить вторую производную. Однако в общем случае получить какую-либо информацию о том, существует ли огибающая параметрического семейства экстремалей в произвольно поставленной задаче R=0 (т.е. существует ли реальное физические решение задачи) заранее предсказать едва ли возможно.

Покажем, что экстремальная теория размерностей позволяет получить представление о виде правых частей дифференциальных уравнений, описывающих даже весьма сложные процессы, в которых эти правые части включают не один, а множество аддитивных членов. Продемонстрируем это на следующем, достаточно наглядном примере. Пусть требуется выяснить функциональный вид правой части дифференциального уравнения, описывающего изменение скорости самолёта в горизонтальном полёте с работающим двигателем, если мы имеем лишь предположение, что дифференциальное уравнение зависит, по-видимому, от величины скорости полёта v, плотности атмосферы ρ, силы тяги двигателя F, от массы самолёта m и от площади его крыла S. С помощью экстремальной теории размерностей попытаемся определить возможный вид правой части дифференциального уравнения

$$m\frac{dv}{dt} = f(v, S, m, \rho, F), \tag{20}$$

предположительно описывающего подобный полёт.

Будем искать функцию f из (20) в виде следующего разложения

$$m\dot{v} \stackrel{\triangle}{=} f = Cv^k S^l m^n \rho^p F^q, \tag{21}$$

где C — безразмерная постоянная.

В размерностях системы [СГС] равенство (21) принимает вид

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right] = \left[\frac{L}{T}\right]^k \cdot \left[L^2\right]^l \cdot [M]^n \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^p \cdot \left[\frac{ML}{T^2}\right]^q,$$

откуда, приравнивая размерности с обеих сторон, получаем:

$$\begin{aligned} 1 &= n + p + q, \\ 1 &= k + 2l - 3p + q, \\ 2 &= k + 2q. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно любых трёх неизвестных, находим

$$k = 2 - 2q, \quad l = \frac{1}{2}(q + 3p - 1), \quad n = 1 - p - q. \tag{22}$$

С учётом (22) разложение (21) принимает вид

$$m\dot{v} \overset{\triangle}{=} f = Cv^{2-2q} \cdot S^{\frac{1}{2}(q+3p-1)} \cdot m^{1-p-q} \cdot \rho^p \cdot F^q. \tag{23}$$

Логарифмируя выражение (23) и приравнивая нулю частные производные от $\lg f$ по p и q, приходим к следующим экстремальным соотношениям

$$\rho = \frac{m}{S^{\frac{3}{2}}}, \quad F = \frac{mv^2}{\sqrt{S}}. \tag{24}$$

Подставляя экстремали (24) в (23), находим

$$f = C\frac{mv^2}{\sqrt{S}}. \tag{25}$$

С учётом экстремалей (24) общее выражение f для огибающей семейства экстремалей допускает всего два следующих представления:

$$f_1 = C_1 F, \quad f_2 = C_2 S\rho v^2. \tag{26}$$

Следовательно, разыскиваемое дифференциальное уравнение (20) должно иметь следующий вид (с точностью до безразмерных постоянных):

$$m\dot{v} = C_1 F + C_2 S\rho v^2. \tag{27}$$

Известно, что уравнение (27) горизонтального полёта самолёта в действительности имеет вид

$$m\dot{v} = F\cos\alpha - \frac{c_x(\alpha)}{2} S\rho v^2, \tag{28}$$

где α — угол (атаки) между вектором скорости и вектором силы тяги двигателя, а $c_x(\alpha)$ — коэффициент лобового сопротивления, определяемый полярой самолёта, конкретной для каждого самолёта.

В рассмотренном примере константы C_1 и C_2 не могут быть найдены теоретически ни с помощью экстремальной теории размерностей, ни какими-либо иными теоретическими методами, поскольку они зависят от формы самолёта и конкретного угла установки двигателя в его корпусе (явно не учитываемых в поставленной задаче (26)), влияющих на величину агрегированных эмпирических коэффициентов $\cos\alpha = C_1$ и $-\frac{c_x(\alpha)}{2} = C_2$. Причём эти коэффициенты неодинаковы даже у всех самолётов одного и того же типа, сходящих с одного и того же конвейера.

Таким образом, экстремальная теория размерностей предоставляет возможность находить вид дифференциальных уравнений, моделирующих сложные динамические процессы, причём находить с той точностью, с какой мы в состоянии предугадать те параметры и переменные, от которых этот процесс зависит (в последнем примере роль подобных угаданных параметров играют те, которые являются аргументами функции f в правой части уравнения (20)). Так что в общем случае подобным образом можно находить вид и гораздо более сложных дифференциальных уравнений. А следовательно, экстремальную теорию размерностей можно использовать не только для поиска новых фундаментальных физических постоянных и параметров подобия (как это продемонстрировано в [1]), но и для вывода уравнений, математически моделирующих сложные динамические процессы, а также для оценки степени достоверности уравнений, описывающих уже известные нам процессы.

Следует отметить, что полученные результаты имеют тесную связь с предложенным в [7] "Обобщённым законом Ньютона", согласно которому любое движение подчиняется уравнению:

$$F_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \hat{K}_i \vec{r}^{(i)} = 0, \tag{29}$$

где $\vec{r}^{(i)}$ — i-ая производная по времени от радиус-вектора в некоторой системе координат, а F_0 и $\hat{K}_i$ — размерные коэффициенты. В зависимости от формы тела, характера движения массы внутри него и внешних сил в уравнении (29) ненулевыми могут оказываться разные члены.

Пусть в некоторой динамической системе созданы условия для проявления влияния на динамику, например, третьей производной $x^{(3)}$ (см. примеры подобных реализаций, рассчитанных в [7]). Рассмотрим частный случай этого проявления в отсутствие внешних сил, т.е. в случае, когда в уравнении (29) $F_0 = \hat{K}_0 = \hat{K}_1 = \hat{K}_4 = \hat{K}_5 = \ldots = 0$, $\hat{K}_2 = 1$, $\hat{K}_3 = const \neq 0$ и это уравнение (с точностью до знака, весьма условного в любых уравнениях физики) принимает вид

$$\ddot{x} = \hat{K}_3 x^{(3)}. \tag{30}$$

Легко убедиться, что уравнение

$$\ddot{x}^2 = \dot{x} x^{(3)}. \tag{31}$$

не противоречит уравнению (30). В самом деле, подставляя линейную зависимость (30) в (31), приходим к уравнению $\ddot{x}^2 = \dot{x}\ddot{x}/\hat{K}_3$, общее решение которого, как легко проверить, совпадает с общим решением (12), (13) при $C_1 = 1/\hat{K}_3$ и K_2=0. Отсюда следует, что уравнение (31) согласуется с уравнением (30).

Аналогично можно показать, что линейная зависимость $\ddot{x} = \hat{K}_{n+2}x^{(n+2)}$ не нарушает общего решения (12), (13) любого из уравнений $\ddot{x}^{n+1} = \dot{x}^n x^{(n+2)}$, n=1,2....

В случае свободного движения, управляемого только n-й производной ($n \geq 3$), обобщенный закон Ньютона (с точностью до знака при $\ddot{x}$) сводится к уравнению

$$\ddot{x} = \hat{K}_n x^{(n)}, \quad n \geq 3, \tag{32}$$

а соответствующее ему экстремальное уравнение свободного движения имеет вид (11) при $k = n-2$ (т.е. вид $\ddot{x}^{n-1} = \dot{x}^{n-2}x^{(n)}$). Из (11) и (32) получаем уравнение

$$\ddot{x}\left(\frac{\ddot{x}^{n-2}}{\dot{x}^{n-2}} - \frac{1}{\hat{K}_n}\right) = 0,$$

из которого следует $\ddot{x} = 0$ и уравнение $\ddot{x} = \dot{x}/\hat{K}_n^{\frac{1}{n-2}}$, подставляя в которое $\ddot{x}$ из (24), находим следующее представление для общего члена ряда (29):

$$\hat{K}_{n+2}x^{(n+2)} = \frac{\dot{x}}{\hat{K}_{n+2}^{\frac{1}{n}}}, \quad n \geq 1. \tag{33}$$

Заметим, что экспоненциальные траектории (12) и (15) не относительны, а абсолютны. Это означает, что они должны формироваться относительно неподвижного пространства (эфира), т.е. для реализации, например, траекторий (15) необходимо знать абсолютную скорость и ускорение движущегося объекта не относительно каких бы то ни было внешних объектов, а относительно неподвижного пространства. Если абсолютная начальная скорость $\dot{x}(-t_0) = v_0$ и ускорение $\ddot{x}(-t_0) = a_0$ заданы, то как система координат (x, t) на рис. 1, так и начальный участок AB экспоненциальной траектории (15) в этой системе координат автоматически определяются по этим двум начальным данным на основании формул

$$x(-t_0) = x_0 = \frac{v_0^2}{a_0}, \quad x(0) = K_1 = x_0 e^{\frac{v_0}{x_0}t_0}.$$

И отметим ещё, что уравнения (9)и (4) совместимы при $g \neq 0$ (т.е. имеют общее решение $x(t)$) в том и только том случае, если $g(t)$ —

экспоненциальная функция, совпадающая со второй производной по времени t от функции (12) (или (15)). Отсюда следует, во-первых, что движение с компенсацией инерциального ускорения реализуется только на экспоненциальных кривых семейства (12) (или (15)), и, во вторых, что управление второй производной $\ddot{x}$ по закону $g(t) = K_1 C_1^2 e^{C_1 t}$ обеспечивает реально реализуемое движение по указанным кривым, если известны, к примеру, начальная скорость и ускорение относительно неподвижного пространства (эфира).

К сожалению, при современном состоянии науки и техники определение любых координат относительно неподвижного пространства — задача невыполнимая. Однако, когда речь идёт не о движении тела в абсолютном неподвижном пространстве, а всего лишь о тех или иных процессах, протекающих по закону экспоненты (15), то для реализации многих процессов, удовлетворяющих уравнениям (14), не требуется привязка к неподвижному пространству (x, t). Рассмотрим, к примеру, разложение вида (7), в котором вместо переменной $x(t)$ используем напряжённость электрического или магнитного поля (учтя тот факт, что в гауссовой системе единиц электрическое и магнитное поля имеют одинаковую размерность), которую обозначим буквой $H(t)$:

$$H(t) = C\dot{H}^p \cdot \ddot{H}^q \cdot H^{(3)r} \dots . \tag{34}$$

Запишем это уравнение в основных размерностях системы [СГС]:

$$\left[\tfrac{M^{1/2}}{L^{1/2}T}\right] = \left[\tfrac{M^{1/2}}{L^{1/2}T^2}\right]^p \cdot \left[\tfrac{M^{1/2}}{L^{1/2}T^3}\right]^q \cdot \left[\tfrac{M^{1/2}}{L^{1/2}T^4}\right]^r \dots .$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, приходим к следующей системе двух линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных (степеней):

$$\begin{aligned} 1 &= p + q + r + \dots, \\ 1 &= 2p + 3q + 4r + \dots, \end{aligned}$$

Отсюда получаем, например:

$$\begin{aligned} p &= 2 + r + \dots, \\ q &= -1 - 2r - \dots . \end{aligned}$$

Это приводит к разложению

$$H = C\dot{H}^{(2+r\dots)} \cdot \ddot{H}^{(-1-2r\dots)} \cdot H^{(3)r} \dots \tag{35}$$

и к следующему множеству особых экстремалей:

$$\ddot{x}^2 = \dot{x}x^{(3)}, \quad \ddot{x}^3 = \dot{x}^2 x^{(4)}, \dots . \tag{36}$$

Подставляя (36) в (35), получаем

$$H = C\dot{H}^2/\ddot{H}, \tag{37}$$

причём совместное решение уравнений (36) и (37) даёт $C = 1$ и систему бесконечного числа уравнений

$$\dot{H}^{k+1} = H^k H^{(k+1)}, k = 1, 2, 3, \ldots \tag{38}$$

задающих уравнения огибающей, имеющих следующее экспоненциальное решение

$$H = K_1 e^{C_1 t}. \tag{39}$$

Отсюда можно сделать вывод, что электропроводящее тело, помещённое в электромагнитное поле H, изменяющееся по закону, удовлетворяющему уравнениям (38), по существу оказывается в среде, в которой время останавливается. При этом как только напряженность вокруг тела достигает критической величины $H^* = c\sqrt{8\pi\rho_m\sqrt{2}}$ (где c — скорость света в вакууме, а ρ_m — средняя плотность тела), определяемой формулой (23) из [10, с. 110], происходит ещё и переход этого тела из нашего физического пространства Минковского X в двойственное пространство Минковского X^* [8-10]. Поскольку величина критического поля пропорциональна корню квадратному из плотности тела, то энергетически наиболее выгодно создавать изменяемое магнитное поле снаружи объектов малой плотности, например, вокруг тонкостенной металлической капсюлы массой m и достаточно большого объёма V, так что её средняя плотность $\rho_m = m/V$ оказывается приемлемо малой.

Движение же в пространстве X^* возможно по "каналам"(интегралам в X^* [9]) при поддержании $H > H^*$. Как только напряжённость магнитного поля снижается до $H < H^*$, происходит обратный переход из X^* в X.

Литература

1. *Смольяков Э.Р.* Особые экстремали в анализе размерностей // ДАН. 2008. Т. 421. N 5. С. 602-606.

2. *Buckingham E.* / Phys. Rev. V. 4. P. 345. (1914).

3. *Бриджмен П.В.* Анализ размерностей. Л.- М.:ГТТИ. 1934.

4. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука. 1977.

5. *Брайсон А., Ю-Ши-Хо.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир. 1972.

6. *Смольяков Э.Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: Едиториал УРСС, 2005.

7. *Смольяков Э.Р.* Нелинейные законы движения и обоснование движения инерцоидов // ДАН. 2003. Т. 393, N 6. С. 770-775.

8. *Смольяков Э.Р.* Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН. 2006. Т. 406. N 6. С. 734-737.

9. *Смольяков Э.Р.* Интегралы движения в двойственном пространстве. // ДАН. 2007. Т. 414, N 4. С. 459-463.

10. *Смольяков Э.Р.* Теория движения электрически заряженных массивных тел в пространстве Минковского и двойственном в нему // "Динамика неоднородных систем". Труды Института системного анализа РАН. 2007. Том 29. Вып. 11. С. 85-117.