Рабовер В. И.

Институт системного анализа РАН, Москва

ИДЕАЛЫ ПЛОСКИХ ФУНКЦИЙ И ГЛАДКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ

В работе даны общие сведения об идеалах функций, вводятся понятия регулярного расположения и продолжающей схемы; рассматриваются тройки замкнутых множеств (в свете задачи о продолжении); формулируются некоторые достаточные условия регулярности; объясняются некоторые вспомогательные факты из анализа.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые алгебраические вопросы теории продолжения гладких функций. Речь пойдет о продолжении функций, определенных на конечных наборах замкнутых множеств и продолжимых с каждого из множеств в отдельности. (Ситуации такого рода возникают в частности в некоторых задачах редукции, см., например, [1].)

Возможность такого продолжения зависит от расположения множеств набора. Расположение, гарантирующее продолжимость (при любых исходных данных) называется *регулярным*. В работе в частности будут указаны некоторые достаточные условия регулярности. (Например, набор из трех множеств, каждые два из которых покрывают третье, – регулярен.)

С каждым замкнутым множеством можно связать идеал функций, обращающихся на этом множестве в 0 вместе со всеми производными (идеал так называемых *плоских* функций). Расположение идеалов, отвечающее регулярному расположению множеств, мы называем *корегулярным*. В работе будут сформулированы некоторые достаточные условия корегулярности. (Например, набор из трех идеалов, пересечение каждых двух из которых лежит в третьем, – корегулярен.)

Свойство корегулярности набора идеалов имеет и чисто алгебраическую интерпретацию. *Классом вычетов* по идеалу называют просто «сдвинутый» идеал (ко всем функциям идеала надо прибавить какую–то другую, одну и ту же, функцию). В работе мы введем понятие *близости* между классами вычетов. В этих терминах корегулярность набора идеалов означает, что любой набор попарно близких классов вычетов по этим идеалам (по одному классу на каждый идеал) имеет общую точку пересечения.

В некоторых случаях для данного набора идеалов можно указать единую процедуру (формулу) нахождения общей точки пересечения классов (зависящую только от идеалов, но не от выбора классов). Мы называем такую процедуру *продолжающей схемой* . (Дело в том, что общая точка пересечения классов как раз и есть решение исходной задачи о продолжении.) В работе будет указано простое достаточное условие на расположение идеалов, гарантирующее существование схемы. (Например, упомянутая выше корегулярная тройка идеалов обладает схемой.)

Классические результаты по теории гладких продолжений с замкнутых множеств принадлежат Уитни [2] и Лоясевичу [3] (см. также [4]). Они дают точные критерии продолжимости, но совсем не затрагивают комбинаторный аспект задачи. Нас же здесь главным образом интересует комбинаторная сторона дела. (Уитни рассматривает **одно** замкнутое множество, Лоясевич дает критерий регулярного расположения **пары** множеств, комбинаторика начинается, когда множеств – три и больше.)

В работе даны общие сведения об идеалах функций, вводятся понятия регулярного расположения и продолжающей схемы; рассматриваются тройки замкнутых множеств (в свете задачи о продолжении); формулируются некоторые достаточные условия регулярности; объясняются некоторые вспомогательные факты из анализа.

2. Идеалы функций

Здесь уточняется терминология и приводятся необходимые сведения о гладких функциях, продолжениях, струях, идеалах, и.т.п.

2.1. Обозначения

Для функции $f: V \to \mathbb{R}$, определенной в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ через $\partial_{i_1 \ldots i_k} f : V \to \mathbb{R}$ обозначается ее частная производная по переменным с номерами $i_1, \ldots, i_k$.

Когда это позволяет контекст, мы будем также пользоваться сокращенными обозначениями $\partial f \equiv \partial_i f$

$$\partial^k f \equiv \partial_{i_1 \ldots i_k} f \,, \qquad ,$$

в которых сохраняется информация лишь о порядке k производной. (Это удобно, нужно лишь условиться, что повторяющийся символ ∂^k (например, $\partial^k f = \partial^k g$) подразумевает один и тот же набор индексов $i_1 \ldots i_k$.)

2.2. Струи и касания

Через s далее всегда обозначается произвольное фиксированное целое число ≥ 0. Функция $f : V \to \mathbb{R}$ в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* C^s, если она обладает всеми непрерывными частными производными $\partial^\nu f : V \to \mathbb{R}$ порядка $\nu = 0,\ldots,s$. Совокупность всех этих частных производных

$$F = \left(\partial^\nu f\right)_{\nu=0,\ldots,s}$$

называется s*–струей* функции f (это отображение $F : V \to \mathbb{R}^q$, где $q = 1 + n + n^2 + \cdots + n^s$).

Функция $f : V \to \mathbb{R}$ класса C^s называется s*–плоской* на множестве $A \subset V$, если ее s–струя F обращается в 0 на A. Функции $f_1, f_2 : V \to \mathbb{R}$ класса C^s s*–касаются* на множестве $A \subset V$, если их s–струи F_1, F_2 совпадают на A (т.е. если разность $f_1 - f_2$ есть s–плоская функция на A).

Мы будем также говорить, что произвольное отображение $F_A : A \to \mathbb{R}^q$, определенное на множестве $A \subset V$, *продолжимо до* s*–струи* на V, если существует C^s–функция $f : V \to \mathbb{R}$, у которой s–струя F совпадает на A с F_A.

Совершенно аналогично определяются функции класса C^∞, ∞– струи, ∞– касания и ∞– плоские функции, – нужно только всесто производных порядка $0,\ldots,s$ говорить о производных **всех** порядков.

Следующий классический результат устанавливает существование функ–ции, ∞–плоской в точности на заданном множестве.

> **Лемма** (Уитни). *Для любого замкнутого подмножества* $A \subset V$ *найдется* C^∞*– функция* $\Theta_A : V \to \mathbb{R}$, ∞*– плоская на* A *и* > 0 *на* $V \setminus A$.

2.3. Алгебра гладких функций

Множество всех C^s– функций $V \to \mathbb{R}$ на открытом $V \subset \mathbb{R}^n$ с поточечными операциями сложения и умножения образует $\mathbb{R}$–алгебру ($\mathbb{R}$–алгебра – это $\mathbb{R}$–линейное пространство $\mathcal{A}$ с $\mathbb{R}$–билинейным ассоциативным умножением $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$). Мы обозачаем эту алгебру через C_V^s.

В алгебре C_V^s обычно вводят так называемую *слабую топологию*. Именно для произвольной функции $f_0 \in C_V^s$ и произвольного компакта $T \subset V$ *окрестностью радиуса* $\varepsilon > 0$ *функции* f_0 *над* T называют множество функций $f \in C_V^s$, таких что поточечно в T

$$- \qquad \left|\partial^\nu f - \partial^\nu f_0\right| < \varepsilon, \qquad \nu = 0,\dots,s. \qquad V \subset \mathbb{R}^n$$

Всевозможные объединения таких окрестностей и образуют указанную топологию (т.е. являются по определению открытыми множествами). Понятно, что в слабой топологии сходимость $f_i \to f$ равносильна равномерной сходимости

$$\partial^\nu (f - f_i) \to 0$$

на каждом компакте $T \subset V$ и для всех $\nu = 0,\dots,s$.

2.4. Идеалы

Пусть $\mathcal{A}= C_V^s$ – алгебра C^s– функций на открытом множестве .
Идеал алгебры $\mathcal{A}$ это, как известно, множество $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$, такое что

$$0 \in \mathcal{J}, \qquad \mathcal{J} - \mathcal{J} \subset \mathcal{J}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}.$$

Идеал, содержащий единицу 1 (функцию, тождественно равную 1), совпадает с $\mathcal{A}$. Поэтому любой собственный (т.е. не равный $\mathcal{A}$) идеал, $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ целиком состоит из необратимых элементов. (Необратимые элементы в $\mathcal{A}$ – это в точности функции из $\mathcal{A}$, равные 0 хотя бы в одной точке). Наоборот, любой необратимый элемент $f \in \mathcal{A}$ лежит в каком–то собственном идеале (а именно, если $f(a) = 0$, то f лежит в идеале всех функций из $\mathcal{A}$, равных 0 в точке a).

Сумма и пересечение двух идеалов

–

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2, \qquad \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$$

суть идеалы. Вообще, любое пересечение идеалов есть идеал. Поэтому можно говорить об идеале, порожденном данным множеством $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, – это пересечение всех идеалов, содержащих $\mathcal{F}$. Например, идеал $(f_1,..., f_k)$ порожденный элементами $f_1,..., f_k \in \mathcal{A}$, есть $\mathcal{A}f_1 + \cdots + \mathcal{A}f_k$. Идеа$(f) = \mathcal{A}f$, порожденный одним элементом, называется *главным*.

2.5. Идеалы плоских функций

Пусть снова $\mathcal{A} = C_V^s$ – алгебра C^s – функций на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$. Для любого замкнутого подмножества $A \subset V$ будем обозначать через $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{A}$ идеал функций, s – плоских на A. (То, что это идеал, легко усматривается из того, что производная $\partial^\nu(fg)$ – есть сумма слагаемых вида $\partial^\alpha f \partial^{\nu-\alpha} g$, $\alpha \geq 0$). Для $A = V$ идеал $\mathcal{J}_V = 0$ (состоит из одной нулевой функции), для $A = \varnothing$ идеал $\mathcal{J}_\varnothing = \mathcal{A}$ (совпадает со всей алгеброй).

Идеалы $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{A}$ находятся в биективном соответствии с замкнутыми подмножествами $A \subset V$. (То, что разным A отвечают разные $\mathcal{J}_A$, видно из существования функции Уитни $\Theta_A : V \to \mathbb{R}$, плоской в точности на A, см. 2.2.).

Утверждение. *Для любых замкнутых подмножеств* $A, B \subset V$ верно

1° $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{J}_A \supset \mathcal{J}_B$

2° $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B = \mathcal{A}$

3° $\mathcal{J}_{A \cup B} = \mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B$

4° $\mathcal{J}_{A \cap B} \supset \mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B$.

Доказательство. 1°. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть $\mathcal{J}_A \supset \mathcal{J}_B$. В точке $a \in A$ плоски все функции из $\mathcal{J}_B \subset \mathcal{J}_A$, в частности функция Уитни Θ_B, т.е. $a \in B$, что и требуется.

2°. Докажем $\Rightarrow$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Нужно представить единицу $1 \in \mathcal{A}$ в виде $1 = \alpha + \beta$, где $\alpha \in \mathcal{J}_A$, $\beta \in \mathcal{J}_B$. Возьмем в качестве α, β C^s – разбиение единицы (см. 6.7), почленно подчиненное покрытию $V \setminus A$, $V \setminus B$. Тогда функции α, β – плоские соответственно на A, B (ибо они равны 0 в окрестности этих множеств), причем $\alpha + \beta = 1$, что и нужно.

Докажем $\Leftarrow$. Пусть $\mathcal{J}_A+\mathcal{J}_B=\mathcal{A}$. Тогда $1=\alpha+\beta$, $\alpha\in\mathcal{J}_A$, $\beta\in\mathcal{J}_B$, что невозможно, если $A\cap B$ содержит хотя бы одну точку, ибо в этой точке $\alpha+\beta=0$. В итоге $A\cap B=\varnothing$.

Свойства 3°, 4° очевидны. ►

3. Регулярность и схемы

Здесь определяется регулярное расположение семейства замкнутых множеств и вводится понятие продолжающей схемы. Рассматриваются простые примеры.

3.1. Классы вычетов и касания

Пусть $\mathcal{A}=C_V^s$ – алгебра C^s – функций на открытом множестве . Любой идеал $\mathcal{J}\subset\mathcal{A}$ задает разбиение $\mathcal{A}$ на классы вычетов, т.е. на множества $f+\mathcal{J}$, где $f\in\mathcal{A}$. Два элемента $f,g\in\mathcal{A}$ принадлежат $\mathcal{J}+\mathcal{J}'=\mathcal{A}$ одному классу, если и только если $f-g\in\mathcal{J}$. В этом случае говорят, что f,g сравнимы по модулю $\mathcal{J}$ и пишут

$$f\equiv g \mod \mathcal{J}.$$

В этих терминах s –касание функций $f,g\in\mathcal{A}$ на замкнутом множестве $A\subset V$ очевидно равносильно сравнению

$$f\equiv g \mod \mathcal{J}_A$$

где, как и ранее, $\mathcal{J}_A$ – идеал функций, s – плоских на A.

3.2. Пересекающиеся классы

Пусть $A,B\subset V$ – замкнутые подмножества в открытом множеств $V\subset\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{J}_A,\mathcal{J}_B$ – соответствующие идеалы плоских функций в алгебре $\mathcal{A}=C_V^s$. Из определений ясно, что классы $(f+\mathcal{J}_A)$, $(g+\mathcal{J}_B)$, пересекаются, если и только если

$$f \equiv g \bmod \left(\mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B \right).$$

При этом, если h – какой–то общий элемент этих классов, то пересечение – есть класс $h + \mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B$ (по идеалу $\mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B$). Аналогично можно говорить о пересечении любого числа классов. Классическая теорема коммутативной алгебры («теорема об остатках») гласит: если идеалы $\mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_k \subset \mathcal{A}$ таковы, что

$$\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_j = \mathcal{A} \quad \forall i \neq j,$$

то любые k классов $\left(f_1 + \mathcal{J}_1\right),\ldots,\left(f_k + \mathcal{J}_k\right)$ имеют непустое пересечение. (Идеалы $\mathcal{J}, \mathcal{J}' \subset \mathcal{A}$ с условием $\mathcal{J} + \mathcal{J}' = \mathcal{A}$ называют взаимно простыми.)

3.3. Близкие классы

Пусть снова $\mathcal{J}_A, \mathcal{J}_B$ – какие–то идеалы плоских функций в алгебре $\mathcal{A} = C_V^s$. Будем говорить, что классы $\left(f + \mathcal{J}_A\right)$, $\left(g + \mathcal{J}_B\right)$ близки, если

$$f \equiv g \bmod \mathcal{J}_{A\cap B}.$$

(т.е. если представители f, g касаются на пересечении $A \cap B$).

От выбора представителей f, g это определение не зависит. В самом деле, для других представителей $f' = f + h_A$, $g' = g + h_B$ (где $h_A \in \mathcal{J}_A$, $h_B \in \mathcal{J}_B$) имеем

$$f' - g' = (f - g) + (h_A - h_B) \in \mathcal{J}_{A\cap B} + (\mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B) \subset \mathcal{J}_{A\cap B},$$

что и требуется.

3.4.

Последнее включение $\subset$ вытекает из включения $\mathcal{J}_{A\cap B} \supset \mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B$, уже отмечавшегося ранее. На самом деле имеет место более точное соотношение

$$\mathcal{J}_{A\cap B} = \overline{\mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B}\,,$$

где черта обозначает замыкание в смысле слабой топологии в $\mathcal{A}$. (Это довольно тонкий факт.) Таким образом, близость классов $\left(f + \mathcal{J}_A\right)$, $\left(g + \mathcal{J}_B\right)$ можно выразить условием

$$f \equiv g \mod \left(\overline{\mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B}\right),$$

что и объясняет термин «близость»: это «чуть меньше» чем пересечение классов (см. критерий персечения в 3.2). Пересекающиеся классы разумеется всегда близки.

3.5. Регулярность

Пусть задано семейство замкнутых подмножеств $A_1,\dots,A_k \subset V$ в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ и соответствующее семейство идеалов $\mathcal{J}_{A_1},\dots,\mathcal{J}_{A_k}$ в алгебре $\mathcal{A} = C^s_V$. Будем говорить, что семейство $A_1,\dots,A_k$ регулярно (а семейство $\mathcal{J}_{A_1},\dots,\mathcal{J}_{A_k}$ корегулярно), если выполнено любое из четырех эквивалентных условий:

1. Любые k попарно близких классов $\left(f_1 + \mathcal{J}_{A_1}\right),\dots,\left(f_k + \mathcal{J}_{A_k}\right)$ имеют непустое пересечение.
2. Для любых $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{A}$, таких что $f_i \equiv f_j \mod \mathcal{J}_{A_i\cap A_j}$, найдется $f \in \mathcal{A}$, такое что $f \equiv f_i \mod \mathcal{J}_{A_i}$ для всех i.
3. Для любых C^s–функций $f_1,\dots,f_k : V \to \mathbb{R}$, таких что каждая пара f_i, f_j s–касается на $A_i \cap A_j$, найдется C^s–функция $f : V \to \mathbb{R}$, которая на каждом A_i s–касается f_i.
4. Любое отображение $F_A : A \to \mathbb{R}^q$, определенное на множестве $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ и продолжимое с каждого A_i до s–струи на V, продолжимо и со всего множества A до s–струи на V.

Замечание. Регулярность (корегулярность) зависит не только от геометрии расположения множеств, но, вообще говоря, и от класса гладкости C^s, и далее, при необходимости, мы будем указывать этот класс явно.▶

Простейший пример регулярного семейства (в любом классе C^s) дает семейство $A_1,\dots,A_k \subset V$ попарно не пересекающихся замкнутых множеств. В самом деле, из $A_i \cap A_j = \varnothing$ следует, что $\mathcal{J}_{A_i} + \mathcal{J}_{A_j} = \mathcal{A}$

(см. 2.5), и регулярность теперь вытекает из теоремы об остатках (см. 3.2).

3.6. Схемы

Пусть задано семейство замкнутых подмножеств $A_1,\ldots,A_k\subset V$ открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$. C^s–схемой (продолжающей схемой) для $A_1,\ldots,A_k$ мы называем любой набор функций

$$\varphi_1,\ldots,\varphi_k:V\to[0,1],\qquad \sum\varphi_i=1,$$

обладающих свойством: каковы бы ни были C^s–функции $f_1,\ldots,f_k:V\to\mathbb{R}$, такие что каждая пара f_i,f_j s–касается на $A_i\cap A_j$, функция

$$f=\sum\varphi_i f_i:V\to\mathbb{R}$$

принадлежит классу C^s и на каждом A_i s–касается f_i.

Из условий 3, 4 определения регулярности понятно, что семейство $A_1,\ldots,A_k$, обладающее схемой, заведомо регулярно. Более того, в этом случае, искомое в 4 продолжение f выражается через частные продолжения f_i в виде «универсальной» (поточечной) выпуклой комбинации с коэффициентами φ_i, зависящими только от множеств $A_1,\ldots,A_k$ (но не от f_i). Заметим, что в терминах условий 1, 2 определения регулярности, элемент $f=\sum\varphi_i f_i$ есть не что иное как искомая точка пересечения попарно близких классов

$$\left(f_1+\mathcal{J}_{A_1}\right)_{,\ldots,}\left(f_k+\mathcal{J}_{A_k}\right).$$

3.7. Локальные схемы

Следующее утверждение показывает, что регулярность и наличие схемы– свойства локальные. (Термин «вблизи» здесь и в дальнейшем используется как синоним слов «в некоторой окрестности»).

> **Утверждение.** Если семейство замкнутых подмножеств $A_1,\ldots,A_k\subset V$ открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$ обладает C^s–схемой вблизи каждой точки $a\in A=A_1\cup\cdots\cup A_k$, то оно обладает C^s–схемой и в целом в V. (Если вблизи каждой точки из A

имеется просто регулярность, то регулярность есть и в целом в V).

Доказательство. По условию у каждой точки $a \in A$ есть окрестность V_a и C^s– схема

$$\varphi_i^a : V_a \to [0,1], \quad \sum_i \varphi_i^a = 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Положим, кроме того, $V_b = V \setminus A$ и

$$\varphi_i^b \equiv \frac{1}{k} : V_b \to [0,1], \quad i = 1, \ldots, k.$$

Множества V_a, $a \in A$ и множество V_b дают открытое покрытие V. Возьмем почленно подчиненное этому покрытию C^s– разбиение единицы (см. 6.7)

$$(\alpha_e)_{e \in E}, \quad E = A \cup \{b\}.$$

Определим глобальные функции

$$\varphi_i = \sum_e \alpha_e \varphi_i^e : V \to [0,1], \quad i = 1, \ldots, k,$$

и покажем, что это C^s– схема на V.

Возьмем C^s– функции $f_1, \ldots, f_k : V \to \mathbb{R}$, такие что f_i, f_j s–касаются на $A_i \cap A_j$. Тогда каждая функция

$$f^e = \sum_i \varphi_i^e f_i : V_e \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

принадлежит классу C^s и на каждом множестве A_i s–касается f_i (ибо $\varphi_1^e, \ldots, \varphi_k^e$ – схема). Определим глобальную функцию

$$f = \sum_e \alpha_e f^e : V \to \mathbb{R}.$$

По свойству разбиений единицы (см. 6.7) это C^s– функция, причем на каждом A_i она s–касается f_i (поскольку в точках из A_i функции f^e s–касаются f_i). Остается показать, что

$$f = \sum_i \varphi_i f_i \quad \text{и} \quad \sum_i \varphi_i = 1.$$

Оба равенства проверяются прямым вычислением в произвольной точке из V (суммы по e конечные, по номерам тех носителей $\operatorname{supp}\alpha_e$, которые задевают эту точку):

$$f=\sum_e \alpha_e f^e=\sum_e \alpha_e\left(\sum_i \varphi_i^e f_i\right)=$$

$$=\sum_i f_i\left(\sum_e \alpha_e\varphi_i^e\right)=\sum_i \varphi_i f_i$$

$$\sum_i \varphi_i=\sum_i \left(\sum_e \alpha_e\varphi_i^e\right)=\sum_e \alpha_e\left(\sum_i \varphi_i^e\right)=\sum_e \alpha_e=1$$

Утверждение о схемах доказано. Если имеется просто локальная регулярность, то для данных $f_1,\ldots,f_k$ точно также существуют локальные функции f^e, которые на A_i касаются f_i, и искомое $f=\sum_e \alpha_e f^e$.►

3.8. Регулярные пары

Следующий критерий по существу есть переформулировка определения.

Утверждение. *Пара замкнутых подмножеств $A,B\subset V$ в открытом множестве $V\subset\mathbb{R}^n$ регулярна, если и только если*

$$\mathcal{J}_{A\cap B}=\mathcal{J}_A+\mathcal{J}_B\,.$$

Доказательство. Пусть пара A,B регулярна. Возьмем $f\in\mathcal{J}_{A\cap B}$. Тогда классы $(0+\mathcal{J}_A)$, $(f+\mathcal{J}_B)$ близки, и значит, ввиду регулярности, пересекаются, т.е. $f\in\mathcal{J}_A+\mathcal{J}_B$. Включение $\subset$ доказано, а включение $\supset$ верно всегда (см. 2.5). Пусть наоборот, верно равенство. Если классы $(f+\mathcal{J}_A)$, $(g+\mathcal{J}_B)$ близки, то

$$f-g\in\mathcal{J}_{A\cap B}=\mathcal{J}_A+\mathcal{J}_B$$

и значит классы пересекаются (см. 3.2), что и требуется. ►

3.9. Пример нерегулярной пары

Рассмотрим замкнутые множества $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$, где A_1 – парабола $y = x^2$, а A_2 – ось абсцисс $y = 0$.

Утверждение. *Пара* A_1, A_2 C^1 *– нерегулярна в любой окрестности начала координат* $O = (0,0)$.

Доказательство. Пересечение $A_1 \cap A_2$ состоит из одной точки O. Возьмем C^1– функции $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x, y) \equiv 0, \quad f_2(x, y) = x^2.$$

Функции f_1, f_2 1–касаются в точке O, и мы покажем, что ни в какой окрестности U начала O нет C^1–функции $f : U \to \mathbb{R}$, 1–касающейся на A_i, $i = 1, 2$. В самом деле, если f – такая функция, то на A_1 она 1–плоская, а на A_2 равна x^2. По лемме об оценке плоской функции 6.2, для малых $x > 0$ имеем

$$f(x,0) \le \rho_{A_1}(x,0)\sigma\left(\rho_{A_1}(x,0)\right),$$

где ρ_{A_1} – расстояние до A_1, а $\sigma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная монотонная функция, равная 0 в 0. Но $\rho_{A_1}(x,0) \le x^2$, а $f(x,0) = x^2$, таким образом,

$$x^2 \le x^2\sigma\left(x^2\right),$$

т.е. $\sigma\left(x^2\right) \ge 1$, что невозможно, ибо σ стремится к 0 в 0. В итоге нерегулярность пары A_1, A_2 установлена.►

3.10. Пример регулярной пары

Рассмотрим замкнутые множества $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$, где A_1 – ось абсцисс $y = 0$, а A_2 – ось ординат $x = 0$.

Утверждение. *Пара* A_1, A_2 C^1*– регулярна в любой окрестности* U *начала координат* $O = (0,0)$*, более того, она обладает* C^1*– схемой*

$$\varphi_1, \varphi_2 : U \to [0,1], \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1,$$

а именно,

$$\varphi_1(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2},\qquad \varphi_2(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

(В точке O полагаем $\varphi_1=\varphi_2=1/2$.)

Доказательство. Пересечение $A_1\cap A_2$ состоит из одной точки O. Возьмем любые C^1– функции $f_1,f_2:U\to\mathbb{R}$, 1–касающиеся в точке O. Надо показать, что функция

$$f=\varphi_1 f_1+\varphi_2 f_2:U\to\mathbb{R}$$

принадлежит классу C^1 и 1–касается f_i на A_i, $i=1,2$.

В точке O функция f непрерывна и имеет частные производные $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, причем значения f, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ в точке O как раз требуемые (это свойство дифференцирования выпуклых комбинаций 6.3).

Вне точки O функция f – класса C^1, и ее производная

$$\nabla f=(\varphi_1\nabla f_1+\varphi_2\nabla f_2)+(f_1\nabla\varphi_1+f_2\nabla\varphi_2),$$

откуда видно, что на множестве A_i функция f 1– касается f_i (поскольку на A_i выполнено $\varphi_i=1$, $\varphi_j=0$, $\nabla\varphi_1=\nabla\varphi_2=0$).

Остается установить непрерывность производных $\partial_1 f$, в точке O. Достаточно показать, что ∇f имеет нужный предел в O. Но такой предел имеет уже первая скобка в выражении для ∇f (по свойству дифференцирования выпуклых комбинаций 6.3), поэтому нужно лишь установить, что в точке O вторая скобка стремится к 0,

$$f_1\nabla\varphi_1+f_2\nabla\varphi_2\to 0.$$

Дифференцируя φ_1,φ_2, находим 1–ю и 2–ю компоненты этой (векторной) величины

$$\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}(f_1-f_2),\qquad \frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}(f_2-f_1).$$

Заметим, что функции

$$\frac{x^2}{x^2+y^2},\quad \frac{y^2}{x^2+y^2},\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ограничены. Поэтому остается проверить, что в точке O

$$\frac{f_1 - f_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0.$$

Разность $f_1 - f_2$ – 1–плоская в точке O. По лемме об оценке плоской функции 6.2

$$\left|f_1 - f_2\right| \le \sqrt{x^2 + y^2}\,\sigma\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

где $\sigma : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – непрерывная монотонная функция, равная 0 в 0. Отсюда нужный предел уже очевиден.▶

4. Цикличные тройки

Здесь доказывается теорема о регулярности набора из трех замкнутых множеств, каждое из которых покрыто двумя другими.

4.1. Циклы и коциклы

Тройку множеств A_1, A_2, A_3 назовем циклом, если для любых разных i, j, k

$$A_i \subset A_j \cup A_k .$$

Равносильное условие

$$A_i = (A_i \cap A_j) \cup (A_i \cap A_k).$$

Тройку множеств T_1, T_2, T_3 назовем коциклом, если для любых разных i, j, k

$$T_i \supset T_j \cap T_k .$$

Равносильное условие

$$T_i = (T_i \cup T_j) \cap (T_i \cup T_k).$$

Для любой тройки множеств B_1, B_2, B_3 парные объединения $B_i \cup B_j$ дают цикл, а парные пересечения $B_i \cap B_j$ дают коцикл.

4.2. Тройки множеств и тройки идеалов

Пусть, как и ранее, $\mathcal{A} = C_V^s$ – алгебра C^s – функций на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$, A_1, A_2, A_3 – замкнутые подмножества в V, и $\mathcal{J}_{A_1}, \mathcal{J}_{A_2}, \mathcal{J}_{A_3}$ – соответствующие идеалы плоских функций в $\mathcal{A}$.

Утверждение. *Тройка множеств A_1, A_2, A_3 циклична, если и только если тройка идеалов $\mathcal{J}_{A_1}, \mathcal{J}_{A_2}, \mathcal{J}_{A_3}$ коциклична.*

Доказательство следует из определений и следующих свойств идеалов плоских функций:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{J}_A \supset \mathcal{J}_B,$$

$$\mathcal{J}_{A \cup B} = \mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B . \blacktriangleright$$

4.3. Теорема о цикле

Эта теорема лежит в основе более общих условий регулярности, формулируемых в следующем разделе 5.

Теорема. *В произвольном классе C^s, всякая цикличная тройка замкнутых подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subset V$ открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ регулярна и обладает схемой*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : V \to [0,1], \ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1.$$

Другими словами, в алгебре $\mathcal{A} = C_V^s$, всякая коцикличная тройка идеалов $\mathcal{J}_{A_1}, \mathcal{J}_{A_2}, \mathcal{J}_{A_3} \subset \mathcal{A}$ корегулярна и обладает схемой.

Наличие схемы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ означает, что любые три попарно близких класса $\left(f_1 + \mathcal{J}_{A_1}\right)$, $\left(f_2 + \mathcal{J}_{A_2}\right)$, $\left(f_3 + \mathcal{J}_{A_3}\right)$ имеют общую точку пересечения f и она дается формулой

$$f = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3 .$$

Другими словами, каковы бы ни были C^s – функции $f_1, f_2, f_3 : V \to \mathbb{R}$, такие что каждая пара f_i, f_j s – касается на $A_i \cap A_j$, указанная функция f принадлежит классу C^s и на каждом A_i s – касается f_i.

4.4. Основные шаги доказательства теоремы

Полное доказательство занимает довольно большой объем, и здесь, в пп. 4.4 – 4.12, мы лишь наметим его основные идеи.

Обозначим

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad A_0 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

и заметим, что множество A разбито на 4 части: множество A_0 и 3 множества $(A_i \cap A_j) \setminus A_0$ (это следует из цикличности).

При доказательстве достаточно ограничиться случаем, когда V есть открытый куб $K \subset \mathbb{R}^n$. (В самом деле, каждую точку $a \in A$ можно окружить некоторым кубиком K_a, а если вблизи каждой точки существует локальная схема, то в силу 3.7 существует и глобальная схема).

Условимся, что далее индексы i, j, k всегда разные, а сумма $\sum$ без указания пределов всегда означает сумму по $i = 1, 2, 3$.

4.5.

В классе C^0 доказательство совсем простое. Именно, искомые функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : K \to [0,1]$ в точках из A_0 равны $1/3$, а вне A_0 полагаем

$$\varphi_i = \frac{\rho_j + \rho_k}{2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)},$$

где ρ_i – функция расстояния до A_i. Вне A_0 функция $f = \sum \varphi_i f_i$ непрерывна как композиция непрерывных, а в каждой точке из A_0 она непрерывна как выпуклая комбинация непрерывных функций, совпадающих в этой точке (см. 6.3). Наконец, на кажддом пересечении $A_i \cap A_j$ выполнено $\varphi_i = \varphi_j = 1/2$, $\varphi_k = 0$, и поэтому на каждом A_i верно $f = f_i$.

4.6.

Перейдем к случаю C^r, $r \geq 1$. Определим искомые функции

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : K \to [0,1].$$

Для этого, пользуясь леммой о плоской функции заданного роста 6.1, поставим в соответствие каждому множеству A_i C^r– функцию $\theta_i : K \to \mathbb{R}$, r – плоскую на A_i и такую, что $\theta_i > 0$ вне A_i и всюду в K

$$\theta_i \geq C\rho_i^{r+1}, \quad \left|\partial^\nu \theta_i\right| \leq C'\rho_i^{r+1-\nu}, \quad \nu = 0,...,r$$

где ρ_i – расстояние до A_i. Обозначим $\theta = \sum \theta_i$ и определим функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, полагая их равными $1/3$ на A_0, а вне A_0

$$\varphi_i = \frac{\theta_j + \theta_k}{2\theta}.$$

Заметим, что вне A_0 функции φ_i принадлежат классу C^r, причем $\sum \partial^\nu \varphi_i = 0$ (поскольку $\sum \varphi_i = 1$).

4.7.

Наша конечная цель – показать, что функция

$$f = \sum \varphi_i f_i : K \to \mathbb{R}$$

принадлежит классу C^r и на множестве A имеет нужную струю (определенную парными касаниями f_i, f_j).

Вне множества A_0 функция f очевидно C^r– гладкая, причем ее производные (по свойству гладких выпуклых комбинаций 6.5) можно представить в виде

$$\partial^\nu f = D^\nu + \overline{D}^\nu, \quad \nu = 1,...,r$$

где

$$D^{\nu} = \sum \varphi_i \partial^{\nu} f_i ,$$

а $\bar{D}^{\nu}$ – есть сумма каких-то слагаемых вида

$$\sum \partial^{\alpha} \varphi_i \partial^{\nu-\alpha} f_i , \quad \alpha \ge 1 .$$

Преобразуя последнюю сумму (с помощью равенства $\sum \partial^{\alpha} \varphi_i = 0$), можно также представить $\bar{D}^{\nu}$ как сумму каких–то слагаемых вида

$$\partial^{\alpha} \varphi_i \partial^{\nu-\alpha} f_{ij} , \quad \alpha \ge 1 ,$$

где $f_{ij} = f_i - f_j$.

Заметим, что функции D^{ν} определены всюду в K . Функции $\bar{D}^{\nu}$, определенные вне A_0, мы также будем считать определенными всюду в K , полагая $\bar{D}^{\nu} = 0$ на A_0 . (Мы кроме того положим $D^0 = f$ и $\bar{D}^0 = 0$ на K .)

4.8.

При $\nu = 0,...,r$ функция D^{ν} в любой точке из A_0 непрерывна, а при $\nu = 0,...,r-1$ имеет частные производные ∂D^{ν} , причем

$$\partial D^{\nu-1} = D^{\nu} , \quad \nu = 1,...,r$$

(это видно из свойства дифференцирования выпуклых комбинаций 6.3).

Если бы нам удалось показать, что и функция $\bar{D}^{\nu}$ точно также непрерывна и имеет частные производные $\partial \bar{D}^{\nu}$ в точках из A_0, причем

$$\partial \bar{D}^{\nu-1} = 0 , \quad \nu = 1,...,r ,$$

то доказать C^r – гладкость функции f было бы уже нетрудно.

В самом деле, в этом случае, индукцией по ν мы сразу получаем, что всюду в K существуют частные производные $\partial^{\nu} f$, причем

$$\partial^{\nu} f = D^{\nu} + \bar{D}^{\nu} , \quad \nu = 0,...,r ,$$

и значит непрерывны (ибо $D^{\nu}, \bar{D}^{\nu}$ непрерывны).

Недостающий факт непрерывности $\overline{D}^{\nu}$ и существования нулевых производных $\partial\overline{D}^{\nu}$ устанавливается в 4.11. Перед этим, в 4.9, 4.10, получаются две вспомогательные оценки (оценки производных функций φ_i и f_{ij}). В последнем пункте 4.12 этого доказательства показано, что функция f имеет нужную струю на множестве A.

4.9.

Обозначим через $\rho_{\max}$ поточечный максимум функций ρ_1, ρ_2, ρ_3. Мы утверждаем, что определенные в $K \setminus A_0$ функции

$$\rho_{\max}^{\nu}\partial^{\nu}\varphi_i\,, \quad \nu = 1,\dots,r$$

ограничены. Кроме того,

$$\partial^{\nu}\varphi_i = 0 \ \text{ на } \ (A_j \cap A_k) \setminus A_0\,, \quad \nu = 1,\dots,r\,.$$

Идея обоснования этих фактов следующая. Из исходных ограничений на $\partial^{\nu}\theta_i$ (см. 4.6) и неравенств

$$\rho_i \le \rho_{\max}\,, \quad \sum \rho_i^{r+1} \ge \rho_{\max}^{r+1}$$

вытекает ограниченность (на $K \setminus A_0$) функций

$$\rho_{\max}^{\nu}\frac{\partial^{\nu}\theta_i}{\theta}\,, \quad \rho_{\max}^{\nu}\frac{\partial^{\nu}\theta}{\theta}\,, \quad \nu = 0,\dots,r\,.$$

Производную $\partial^{\nu}\varphi_i$, по правилу дифференцирования дробей 6.6 можно представить в виде суммы слагаемых вида

$$\pm\frac{\partial^{\nu_0}\theta_j}{\theta}\frac{\partial^{\nu_1}\theta}{\theta}\frac{\partial^{\nu_2}\theta}{\theta}\cdots, \quad \sum_p \nu_p = \nu\,,$$

а каждое такое произведение, умноженное на $\rho_{\max}^{\nu} = \rho_{\max}^{\nu_0}\rho_{\max}^{\nu_1}\cdots$, дает как раз произведение функций указанного выше типа, т.е. ограничено. Наконец, $\partial^{\nu_0}\theta_j = 0$ на A_j (ибо функция θ_j – плоская на A_j) и значит $\partial^{\nu}\varphi_i = 0$ на A_j.

4.10.

Рассмотрим поведение функций $f_{ij} = f_i - f_j$. Мы утверждаем, что вблизи любой точки $a \in A_0$ производные этих функций удовлетворяют оценке

$$\left|\partial^{\nu} f_{ij}\right| \leq \rho_{\max}^{r-\nu} \sigma\left(\rho_{\max}\right), \quad \nu = 0, \ldots, r-1,$$

где $\sigma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная монотонная функция, равная 0 в 0.

Наметим обоснование этого факта. Обозначим через ρ_{ij} расстояние до пересечения $A_i \cap A_j$. Функция $\partial^{\nu} f_{ij}$ – $(r-\nu)$–плоская на $A_i \cap A_j$, и по лемме об оценке плоской функции 6.2,

$$\left|\partial^{\nu} f_{ij}\right| \leq \rho_{ij}^{r-\nu} \sigma(\rho_{ij}).$$

В каждой точке функция $\rho_{\max}$ мажорирует по крайней мере какие–то две из трех функций $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{13}$ (дело в том, что ввиду цикличности $\rho_i = \min(\rho_{ij}, \rho_{ik})$). Отсюда, с учетом равенства $f_{ij} = f_{ik} + f_{kj}$, уже нетрудно получить требуемую оценку.

4.11.

Обоснуем непрерывность и нулевые производные функций $\bar{D}^{\nu}$ в точках из A_0. Согласно 4.7, функция $\bar{D}^{\nu}$ есть сумма слагаемых вида $\partial^{\alpha}\varphi_i \partial^{\nu-\alpha} f_{ij}$. Используя оценки 4.9, 4.10 для производных $\partial^{\alpha}\varphi_i$ и $\partial^{\nu-\alpha} f_{ij}$, получаем вблизи произвольной точки $a \in A_0$ оценку для всей функции $\bar{D}^{\nu}$,

$$\left|\bar{D}^{\nu}\right| \leq \rho_{\max}^{r-\nu} \sigma(\rho_{\max}), \quad \nu = 1, \ldots, r.$$

И поскольку расстояние до точки a, $\rho_a \geq \rho_{\max}$, то

$$\left|\bar{D}^{\nu}\right| \leq \rho_a^{r-\nu} \sigma(\rho_a).$$

Отсюда уже понятно, что функция $\bar{D}^{\nu}$ имеет нулевой предел в точке a (и значит непрерывна в a), а при $\nu = 0, \ldots, r-1$ имеет нулевые производные $\partial \bar{D}^{\nu}$ в точке a, что и требовалось.

4.12.

Остается проверить, что функция f имеет на множестве A струю, определенную парными касаниями f_i, f_j. Напомним, что множество A состоит из множества A_0 и трех множеств $(A_i \cap A_j) \setminus A_0$, и что производная $\partial^\nu f$ есть сумма

$$\partial^\nu f = D^\nu + \overline{D}^\nu .$$

На множестве A_0 величина $\overline{D}^\nu$ равна 0, а значение D^ν в каждой точке из A_0 есть выпуклая комбинация трех одинаковых значений $\partial^\nu f_i$, тем самым и $\partial^\nu f$ имеет это значение (что и нужно).

На множестве $(A_i \cap A_j) \setminus A_0$ аргументация несколько сложнее. Здесь

$$\varphi_i = \varphi_j = 1/2, \quad \varphi_k = 0,$$

так что значение D^ν как раз равно общему значению производных от f_i, f_j. Нужно только показать, что $\overline{D}^\nu = 0$. Но на этом множестве, согласно 4.9, производные от φ_k нулевые, поэтому производные от φ_i, φ_j противоположны по знаку, а поскольку производные от f_i, f_j здесь совпадают, то в итоге каждая сумма

$$\sum \partial^\alpha \varphi_i \partial^{\nu-\alpha} f_i$$

равна 0. Тем самым и $\overline{D}^\nu$ равно 0, что и требовалось.

Этим завершается обзор доказательства теоремы о цикле.

5. Условия регулярности

Здесь формулируются некоторые простые условия расположения конечного набора замкнутых множеств, гарантирующие существование схемы.

5.1. Перекрытость и разреженность

Для произвольных конечных наборов множеств введем два дуальных понятия.

Перекрытость набора множеств $A_1, ..., A_k$ означает, что любые две точки, лежащие в общем объединении $A_1 \cup ... \cup A_k$, лежат в каком–то A_i.

Разреженность набора множеств $T_1, ..., T_k$ означает, что любые две точки, лежащие вне общего пересечения $T_1 \cap ... \cap T_k$, лежат вне какого–то T_i.

Например, для любого набора множеств $B_1, ..., B_k$ семейство всех объединений $B_i \cup B_j$ очевидно перекрыто, а семейство всех пересечений $B_i \cap B_j$ разрежено. (Понятно также, что свойства перекрытости и разреженности меняются местами при переходе к дополнениям.)

5.2. Связь с цикличностью

Для троек множеств (ни одно из которых не лежит целиком в другом) введенные два понятия тесно связаны с цикличностью и коцикличностью (см. 4.1). Именно, перекрытость тройки A_1, A_2, A_3 равносильна ее цикличности, а разреженность тройки T_1, T_2, T_3 равносильна ее коцикличности.

(Проверить эти факты совсем просто. Покажем, например, что разреженная тройка T_1, T_2, T_3 коциклична. Пусть, напротив, точка $a \in T_i \cap T_j$ не лежит в T_k. Возьмем точку $b \in T_k \setminus T_i$. Тогда пара a, b лежит вне пересечения $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ и в то же время задевает все три множества, что противоречит исходной разреженности.)

5.3. Наборы множеств и наборы идеалов

Пусть $A_1, ..., A_k \subset V$ – набор замкнутых подмножеств в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\mathcal{J}_{A_1}, ..., \mathcal{J}_{A_k}$ – соответствующий набор идеалов в алгебре $\mathcal{A} = C_V^s$.

> **Утверждение**. *Набор множеств $A_1, ..., A_k$ перекрыт, если и только если набор идеалов $\mathcal{J}_{A_1}, ..., \mathcal{J}_{A_k}$ разрежен. (В частности циклам множеств отвечают коциклы идеалов, что уже отмечалось ранее.)*

Доказательство. Пусть набор $A_1, ..., A_k$ перекрыт. Возьмем любые $f, g \in \mathcal{A}$, не лежащие в $\bigcap \mathcal{J}_{A_i} = \mathcal{J}_{\cup A_i}$ (равенство следует из 2.5). Тогда функция f не является плоской в какой–то точке $a \in A = \cup A_i$, а функция g не является плоской в какой–то точке $b \in A$. Но в силу перекрытости, точки a, b лежат в каком–то A_ν, и значит f, g лежат вне $\mathcal{J}_{A_\nu}$. Разреженность доказана.

Пусть набор $\mathcal{J}_{A_1},...,\mathcal{J}_{A_k}$ разрежен. И пусть набор $A_1,...,A_k$, вопреки утверждению, не перекрыт, т.е. какие–то 2 точки $a,b\in A$ не лежат (вместе) ни в каком A_i. Тогда множества A_ν, не содержащие a, и множества A_μ, не содержащие b, исчерпывают все A_i. Возьмем функцию

$$f\in\bigcap\mathcal{J}_{A_\nu}=\mathcal{J}_{\cup A_\nu},$$

и сделаем ее неплоской в точке a, оставляя плоской на $\cup A_\nu$. (Например, можно добавить к f гладкую «шапочку» малого диаметра с центром a.) Точно также возьмем функцию

$$g\in\bigcap\mathcal{J}_{A_\mu}=\mathcal{J}_{\cup A_\mu}$$

и сделаем ее неплоской в точке b. Тогда пара f,g лежит вне общего пересечения $\bigcap\mathcal{J}_{A_i}$ (равного $\mathcal{J}_{\cup A_i}$) и в то же время задевает любой идеал $\mathcal{J}_{A_i}$, что противоречит разреженности. ►

5.4.

Теорема. *В произвольном классе C^s, всякий перекрытый набор замкнутых подмножеств $A_1,...,A_k$ открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$ регулярен в V и обладает схемой*

$$\varphi_1,...,\varphi_k:V\to[0,1],\qquad\sum\varphi_i=1.$$

Другими словами, всякий разреженный набор идеалов $\mathcal{J}_{A_1},...,\mathcal{J}_{A_k}$ алгебры $\mathcal{A}=C^s_V$ корегулярен и обладает схемой.

5.5. Локализация

Учитывая, что регулярность и наличие схемы – свойства локальные (см. 3.7), понятно, что условие перекрытости в теореме можно на самом деле заменить на более слабое условие локальной перекрытости, когда у каждой точки a из объединения $A_1\cup...\cup A_k$ есть окрестность V_a, в которой набор $A_1,...,A_k$ перекрыт.

Например, для любого семейства замкнутых подмножеств $B_1,\ldots,B_k\subset V$ открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$ семейство всех объединений $B_i\cup B_j$ с непустым пересечением $B_i\cap B_j$ локально перекрыто. (Нужная окрестность V_a – это, например, дополнение в V к тем множествам B_i, в которых не лежит a.) Таким образом, такое семейство регулярно и обладает схемой.

В терминах идеалов это утверждение звучит так.

Для любого семейства идеалов $\mathcal{J}_{B_1},\ldots,\mathcal{J}_{B_k}$ алгебры $\mathcal{A}=C_V^s$ семейство всех пересечений $\mathcal{J}_{B_i}\cap\mathcal{J}_{B_j}$ с условием $\mathcal{J}_{B_i}+\mathcal{J}_{B_j}\neq\mathcal{A}$ корегулярно и обладает схемой.

Здесь условие $\mathcal{J}_{B_i}+\mathcal{J}_{B_j}\neq\mathcal{A}$ означает, что из всех попарных пересечениий мы отбрасываем взаимно простые пары идеалов (что отвечает отбрасыванию дизъюнктных пар множеств B_i,B_j). Без такого условия (т.е. если брать **все** пары) утверждение разумеется тоже верно, но это уже более грубый факт, не использующий возможность локализации.

Пример. Рассмотрим четыре сферы (окружности) $C_1,C_2,C_3,C_4\subset\mathbb{R}^2$ с радиусами 2,1,1,1 и центрами (0,0), (1,0), (3,0), (5,0). Сферы C_1,C_2,C_3 имеют общую точку касания (2,0). Сферы C_3,C_4 имеют точку касания (4,0). Других общих точек нет. Поэтому четверка объединений

$$C_1\cup C_2,\quad C_1\cup C_3,\quad C_2\cup C_3,\quad C_3\cup C_4$$

локально перекрыта и значит регулярна.

5.6. Идея доказательства теоремы

Идея состоит в том, чтобы свести ситуацию к случаю трех множеств. Для трех множеств теорема верна, потому что она превращается в теорему о цикле 4.3 (перекрытая тройка множеств есть цикл). Общий случай сводится к этому с помощью так называемых циклических семейств множеств.

Двухиндексное семейство множеств A_{ij}, $i,j=1,\ldots,m$ (где индексы i,j перестановочны и различны), назовем цикличным, если каждая тройка A_{ij}, A_{jk}, A_{ik} есть цикл. (Например, для любых множеств $B_1,\ldots,B_k$ их попарные объединения $A_{ij}=B_i\cup B_j$ образуют цикличное семейство).

В произвольном классе C^s, всякое цикличное семейство замкнутых подмножеств A_{ij} ($i,j=1,\ldots,m$) открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$, регулярно в V и обладает схемой

$$\varphi_{ij} : V \to [0,1], \quad \sum \varphi_{ij} = 1 \quad (i > j).$$

(При $m = 3$ это утверждение есть теорема о цикле, а далее довольно просто проводится индукция по $m = 3, 4, 5, ...$).

Во всякое перекрытое семейство $A_1, ..., A_k$ можно вписать цикличное семейство A_{ij} ($i, j = 1, ..., m$) с тем же объединением. (Нужно рассмотреть множества точек, содержащихся ровно в одном, двух, и.т.д. заданных множествах A_i. Попарные объединения таких множеств и дадут искомые A_{ij}).

В двух последних утверждениях уже содержится доказательство теоремы. В самом деле, вписанные множества A_{ij} можно считать замкнутыми (взяв, если надо, замыкания; цикличность от этого не нарушится). Далее, каждому A_{ij} надо поставить в соответствие какое–то $A_\nu \supset A_{ij}$. После этого, в качестве искомого φ_ν можно взять сумму всех φ_{ij}, которым в указанном смысле соответствует данное φ_ν.

5.7. Попарная регулярность

Утверждение. *В произвольном классе C^s любое попарно регулярное семейство замкнутых подмножеств $A_1, ..., A_k \subset V$ открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ регулярно. Более того, если каждая пара A_i, A_j обладает C^s – схемой*

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij} : V \to [0,1], \quad \alpha_{ij} + \beta_{ij} = 1,$$

то и все семейство $A_1, ..., A_k$ обладает C^s – схемой

$$\varphi_1, ..., \varphi_k : V \to [0,1], \quad \sum \varphi_i = 1.$$

Доказательство. Пусть F_A – отображение, определенное на множестве $A = A_1 \cup ... \cup A_k$ и продолжимое с каждого A_i до s – струи на V. Тогда, ввиду попарной регулярности, F_A продолжимо и с каждого множества $A_{ij} = A_i \cup A_j$, а значит (ввиду перекрытости семейства множеств A_{ij}) и со всего множества A. Таким образом, семейство $A_1, ..., A_k$ регулярно. Далее, используя схемы для пар A_i, A_j и схему для множеств A_{ij} (она существует ввиду перекрытости), получаем связь между продолжениями

$$f=\sum\varphi_{ij}f_{ij}=\sum\varphi_{ij}(\alpha_{ij}f_i+\beta_{ij}f_j).$$

А отсюда, группируя коэффициенты при $f_1,\dots,f_k$, получаем схему $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ для $A_1,\dots,A_k$. Ее сумма

$$\sum\varphi_i=\sum\varphi_{ij}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})=\sum\varphi_{ij}=1,$$

как и требуется.►

5.8.

Обратное к утверждению 5.7 неверно; из регулярности семейства вообще говоря не следует попарная регулярность.

Пример. Укажем регулярную тройку, в которой есть нерегулярная пара. Рассмотрим множества $A_1,A_2,A_3\subset\mathbb{R}^2$, где A_1 – левая полуось абсцисс (включая начало), A_2 – правая полуось абсцисс (включая начало), A_3 – правая половина параболы $y=x^2$ (включая начало). Возьмем попарные объединения этих множеств

$$A_{12}=A_1\cup A_2,\quad A_{13}=A_1\cup A_3,\quad A_{23}=A_2\cup A_3.$$

Тройка A_{12},A_{13},A_{23} очевидно регулярна (это цикл). В то же время, пара A_{12}, A_{13} – C^1 – нерегулярна (в любой окрестности начала). В самом деле, возьмем C^1–функции

$$f_{12},f_{13}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$f_{12}(x,y)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},\qquad f_{13}(x,y)\equiv 0,$$

1–касающиеся на пересечении $A_{12}\cap A_{13}$. Ни в какой окрестности U начала координат не существует C^1 – функции $f:U\to\mathbb{R}$, 1–касающейся функции f_{12} на A_{12} и функции f_{13} на A_{13}. Дело в том, что такая функция f должна быть 1–плоской на A_{13} и равной x^2 на $A_{12}\setminus A_{13}$. Невозможность существования такой функции следует из леммы 6.2 об оценке плоской функции (см. аналогичный пример 3.9).

6. Приложение. Плоские функции и дифференцирования

Здесь формулируются две леммы о свойствах плоских фцнкций, а также объясняются некоторые вспомогательные конструкции, связанные с дифференцированием. (Мы по–прежнему пользуемся сокращенными обозначениями для частных производных $\partial^m f \equiv \partial_{i_1 \dots i_m} f$, $\partial f \equiv \partial_i f$.)

6.1.

Лемма (о плоской функции заданного роста). *Для любого замкнутого подмножества* $A \subset K$ *открытого куба* $K \subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $r \geq 1$ *найдутся числа* $C.C' > 0$ *(зависящие только от* n *и* r*) и* C^r*–функция* $\theta : K \to \mathbb{R}$, r*–плоская на* A *и* >0 *вне* A*, такие что поточечно в* K *выполнено*

$$\theta \geq C\rho^{r+1}, \quad \left|\partial^\nu \theta\right| \leq C'\rho^{r+1-\nu}, \quad \nu = 0, \dots, r,$$

где ρ *– расстояние до* A.

Это непростой факт. Идея обоснования следующая. Искомая функция θ строится в виде суммы ряда $\sum \Theta_i$ из гладких «шапок» $\Theta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Носители $\operatorname{supp} \Theta_i$ этих шапок покрывают дополнение $K \setminus A$ (не задевая A). Это покрытие берется локально конечным (что позволяет суммировать ряд) и конечнократным. Параметры шапок (диаметр, высота, «крутизна») выбираются в зависимости от расстояния от носителя до A таким образом, чтобы в итоге обеспечить требуемый характер роста функции θ.

6.2.

Лемма *(об оценке плоской функции). Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *– любое множество,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *– окрестность точки* $a \in A$, $f : U \to \mathbb{R}$ *–* C^r*–функция,* r*–плоская на* $A \cap U$*. Тогда в некотором шаре* Ω *с центром* a *функция* f *удовлетворяет оценке (поточечно в* Ω*)*

$$\left|f\right| \leq \rho^r \sigma(\rho),$$

где ρ *– расстояние до* A*, а* $\sigma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *– непрерывная монотонная функция, равная* 0 *в* 0.

В основе доказательства леммы – известная оценка 1–го тейлоровского остатка гладкой функции на выпуклом компакте через модуль непрерывности σ ее производной. (Норма остатка не превосходит $|\Delta|\sigma(|\Delta|)$, где Δ – приращение аргумента.) Мы применяем сначала эту оценку, беря в качестве функции предпоследнюю производную $\partial^{r-1}f$. А затем, итерируя (понижая порядок) и применяя на каждом шаге теорему о среднем, приходим в итоге к оценке самой функции f.

6.3. Дифференцирование выпуклых комбинаций

Пусть функции

$$f, f_1, ..., f_k : U \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1, ..., \varphi_k : U \to \mathbb{R}$$

в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что

$$f = \sum \varphi_i f_i, \quad \varphi_i \geq 0, \quad \sum \varphi_i = 1.$$

Тогда, если в точке $a \in U$ функции $f_1, ..., f_k$ непрерывны и равны b, то в точке a и функция f непрерывна и равна b. Если, сверх того, какая–то производная $\partial f_i(a)$ для всех функций $f_1, ..., f_k$ существует и равна d, то и производная $\partial f(a)$ существует и равна d.

(Все следует из ключевого замечания: предел функции со значениями в выпуклой оболочке значений f_i равен общему пределу f_i.)

6.4. Дифференцирование произведений

Пусть $f, g : U \to \mathbb{R}$ – C^m–функции в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда производная

$$\partial^m (fg) = f \partial^m g + ... ,$$

где далее все слагаемые имеют вид $\partial^\alpha f \partial^{m-\alpha} g$, $\alpha \geq 1$.

(Это немедленно проверяется индукцией по m.)

6.5. Гладкие выпуклые комбинации

Пусть C^m–функции

$$f, f_1, ..., f_k : U \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1, ..., \varphi_k : U \to \mathbb{R},$$

в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что

$$f = \sum \varphi_i f_i, \quad \varphi_i \geq 0, \quad \sum \varphi_i = 1.$$

Тогда (в силу 6.4) производная

$$\partial^m f = \sum \varphi_i \partial^m f_i + \cdots ,$$

где далее все слагаемые имеют вид

$$\sum \partial^\alpha \varphi_i \partial^{m-\alpha} f_i, \quad \alpha \geq 1.$$

Как следствие, в каждой точке $a \in U$, в которой все функции $f_1, ..., f_k$ m–касаются, функция f также их m–касается (поскольку $\sum \partial^\alpha \varphi_i = 0$).

6.6. Дифференцирование дробей

Утверждение. *Пусть* $f, g : U \to \mathbb{R} - C^m$ *– функции в открытом множестве* $U \subset \mathbb{R}^n$ *(причем всюду* $g \neq 0$*). Тогда производная* $\partial^m \left(\frac{f}{g}\right)$ *равна сумме, все слагаемые в которой имеют вид*

$$\pm \frac{\partial^{\nu_0} f}{g} \frac{\partial^{\nu_1} g}{g} \frac{\partial^{\nu_2} g}{g} \cdots, \quad \sum \nu_i = m, \quad \nu_i \geq 0.$$

Доказательство. Индукция по m. При $m = 1$ это очевидно:

$$\partial\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\partial f}{g} - \frac{f}{g} \frac{\partial g}{g}.$$

Пусть $m>1$, и для $m-1$ утверждение верно. Тогда производная

$$\partial^m\left(\frac{f}{g}\right)=\partial\left(\partial^{m-1}\frac{f}{g}\right)$$

представима слагаемыми

$$\pm\partial\left(\frac{\partial^{\nu_0}f}{g}\frac{\partial^{\nu_1}g}{g}\cdots\right),\quad \sum\nu_i=m-1.$$

Но производная произведения

$$\partial\left(F_1F_2\cdots F_l\right)=\partial F_1F_2\cdots F_l+F_1\partial F_2\cdots F_l+\cdots+F_1F_2\cdots\partial F_l,$$

а производные сомножителей имеют вид

$$\partial\left(\frac{\partial^{\nu_0}f}{g}\right)=\frac{\partial^{\nu_0+1}f}{g}-\frac{\partial^{\nu_0}f}{g}\frac{\partial g}{g},$$

$$\partial\left(\frac{\partial^{\nu_i}g}{g}\right)=\frac{\partial^{\nu_i+1}g}{g}-\frac{\partial^{\nu_i}g}{g}\frac{\partial g}{g}$$

Отсюда уже видно, что в итоге получится сумма слагаемых нужного типа.▶

6.7. Разбиения единицы

Пусть $\left(V_e\right)_{e\in E}$ – покрытие открытого множества $V\subset\mathbb{R}^n$ его открытыми подмножествами $V_e\subset V$. Известно, что тогда существует (для любого m) C^m–разбиение единицы $\left(\alpha_e\right)_{e\in E}$, почленно подчиненное этому покрытию. (Это означает, что функции $\alpha_e:V\to[0,1]$ принадлежат классу C^m, семейство их носителей $\left(\operatorname{supp}\alpha_e\right)_{e\in E}$ локально конечно в V, причем $\operatorname{supp}\alpha_e\subset V_e$ и $\sum\alpha_e=1$.) Разбиение единицы $\left(\alpha_e\right)_{e\in E}$ позволяет «склеить» из локальных функций, определенных в множествах V_e, глобальную функцию, определенную на всем V. Важное свойство такой глобальной функции состоит в том, что она участвует во всех общих касаниях локальных функций:

Утверждение. *Для любых* C^m *– функций*

$$f^e : V_e \to \mathbb{R}, \quad e \in E,$$

функция

$$f = \sum_e \alpha_e f^e : V \to \mathbb{R}$$

принадлежит классу C^m*, причем в каждой точке* $a \in V$*, в которой все определенные в этой точке функции* f^e m *– касаются, функция* f *также их* m *– касается.*

Доказательство. Из локальной конечности семейства $\left(\operatorname{supp} \alpha_e\right)_{e \in E}$ понятно, что точку a задевает лишь конечное число носителей, скажем с номерами $e = 1,...,k$, причем некоторая окрестность U точки a не задевает никаких других носителей, а уменьшив U, можно также считать, что $U \subset V_1 \cap ... \cap V_k$. Но тогда в окрестности U выполнено

$$f = \alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha_k f^k,$$

откуда очевидно, что функция f принадлежит классу C^m, а факт касания следует из 6.5.►

Литература

1. ***Рабовер В.И.*** Продолжение струй и приводимость семейств гладких функций. Фундаментальная и прикладная математика. 2001. Т.7. №2.
2. ***Whitney H.*** Analitic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V.36. P.63–89.
3. ***Lojasiewicz S.*** Sur le probleme de la division. Studia Math. 1959. V.8. P.87–136. Malgrange B. Ideals of differentiable functions. Oxford University Press. 1966.
4. ***Шварц Л.*** Анализ. М. 1972.
5. ***Ленг С.*** Алгебра. М. 1968.