

Проективно-инвариантное распознавание плоских контуров на примере центрально-симметричных кривых

П. П. Николаев, Д. П. Николаев

*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Россия, 117312 Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1*

В статье рассматривается задача проективно инвариантного распознавания плоских кривых. Описываются различные схемы ее решения и оценивается их вычислительная сложность. Предлагается новый быстрый алгоритм определения центра симметрии у прообраза проективно преобразованной кривой. На его основе строится метод распознавания перспективно предъявленных центрально симметричных кривых.

Введение

На сегодняшний день в области технического зрения больше нерешенных задач, чем практических достижений. К примеру, задача бинокулярного синтеза решается в практических приложениях, но для построения карты соответствия большинство алгоритмов используют особые точки (ОТ) изображения [1]. Таким образом, на изображении, бедном числом ОТ (точками изломов, ветвлений, границ, контрастными точками), карта соответствия будет неточной и/или не полной. Задача же распознавания трехмерных объектов по одному изображению решена, по сути, только для человеческих лиц. Наиболее перспективным направлением развития технического зрения сейчас, по-видимому, является разработка алгоритмов установления соответствия (распознавания) границ объектов, в том числе — гладких. Наличие таких алгоритмов ослабило бы зависимость систем технического зрения от наличия ОТ. Интересные результаты в этой области получены, в частности, Коэндеринком [1, ч. 5]. Однако задача установления соответствия для проективных проекций от трехмерных объектов чрезвычайно сложна, так как не существует прямой информационной связи между различ-

ными проекциями одного объекта. Мы предлагаем сосредоточиться на более простой, но концептуально важной задаче: задаче распознавания контуров плоских объектов, предъявленных перспективно.

1. Варианты задачи распознавания плоских контуров

Ранее нами были решены несколько задач распознавания контуров, различающихся количеством и типизацией ОТ на контуре [2–7]. Рассмотрим здесь основные варианты постановок и их различия по сложности задачи.

Во всех случаях мы будем говорить о распознавании (а точнее, об установлении соответствия или корреспонденции) замкнутых кривых. Условие замкнутости следует из предположения, что рассматриваемая кривая — это граница некоторого объекта. Задача установления соответствия заключается в построении геометрического преобразования, переводящего предъявленный образец в один из эталонов. При этом становится возможным указать на образце точку, соответствующую любой точке эталона. Задача корреспонденции, очевидно, сложнее задачи распознавания. Например, достаточно просто распознать эллиптическую кривую по ее центральной проекции, однако произвести корреспонденцию в данном случае невозможно, поскольку все кривые второго порядка проективно эквивалентны.

Для дальнейшего изложения нам потребуется определение ОТ. Под ОТ будем понимать точку плоскости, в которой лежит кривая, и для которой мы можем указать соответствие на почти любой проекции. Примерами ОТ являются «пигментные» точки (т. е. точки, инвариантные свойства которых не следуют из геометрии объекта): излома, двойного касания, перегиба. Все указанные типы ОТ проективно инвариантны [2], хотя их устойчивость по отношению к шуму может существенно различаться. Точки двойного касания, по-видимому, наиболее устойчивы, так как являются выражением не дифференциальных, а макроscopicких свойств кривой.

Предыдущие работы были посвящены, в основном, гладким выпуклым контурам. На первый взгляд может показаться, что это сделано для упрощения задачи. Между тем, в действительности задача установления соответствия для невыпуклой кривой элементарна по сравнению с задачей корреспонденции гладкой выпуклой кривой без особенностей. В частности, контур с одной вогнутостью обладает четырьмя ОТ — двумя точками двойного касания и двумя точками перегибов. Эти точки, очевидно, не коллинеарны. Четыре неколлинеарные точки образуют проективный базис [4, 5, 8], что позволяет непосредственно отобразить образец на плоскость эталонной фигуры. Этот алгоритм был предложен в 1995 году [5].

Рассмотрим теперь менее очевидный случай избыточного числа (больше четырех) ОТ. Введем понятие класса неразличимости (далее — просто класса) ОТ. К одному классу отнесем ОТ одного типа, соответствие которых невозможно установить по отдельности. Примером, когда точки одного типа попадают в разные классы, могут служить пигментные точки, лежащие внутри, снаружи контура и на контуре соответственно. Назовем рангом точки число элементов класса, к которому она принадлежит. Очевидно, что в качестве базисных следует выбрать четыре точки с наименьшим рангом. Как будет показано в разделе 3, сложность сопоставления двух фигур в едином проективном базисе составляет $O(n)$, где n — число точек фигуры. С учетом комбинаторного перебора окончательно получим сложность $O(n \cdot r^4)$, где r — ранг базисных точек.

Ситуация улучшается, если базисные точки расположены на контуре. Назовем поворотным рангом циклической последовательности число q различных циклических сдвигов, воспроизводящих исходную последовательность. Очевидно, что сложность корреспонденции для базиса, лежащего на контуре, не больше $O(n \cdot q)$, где q — поворотный ранг ОТ на контуре. В частности, сопоставление фигур со многими вогнутостями линейно замедляется с ростом числа вогнутостей.

В заключение рассмотрим интересную разновидность ОТ: инвариантные ОТ. Это могут быть, в частности, центр поворотной симметрии контура или точки пересечения оси симметрии с контуром фигуры [4, 7]. При проективных преобразованиях свойство симметрии утрачивается почти всегда, однако, как было показано ранее [5], отыскание образа точки симметрии возможно, хотя и вычислительно трудоемко. Тем не менее, ниже мы покажем, что опора на центр симметрии оказывается оправданной в случае отсутствия других ОТ.

2. Простейшие алгоритмы корреспонденции

Простейшим алгоритмом корреспонденции является полный перебор проективных базисов. Зафиксируем на эталонной кривой четыре точки, далекие от коллинеарности, и будем перебирать всевозможные четырехточечники, лежащие на образце, в качестве проекций зафиксированных точек. Как будет показано ниже, сложность сравнения двух контуров в одном проективном базисе линейна от числа точек дискретизации контура, таким образом, полный перебор потребует $O(n^5)$ операций вместе со сравнениями. При этом добавление ОТ на контуре будет снижать степень полинома на единицу вплоть до линейной сложности.

Рассмотрим теперь другой способ перебора преобразований. Дискретизируем параметры проективного преобразования на регулярной сетке. Сложность соответствующего алгоритма корреспонденции составит $O(m^8 \cdot n)$, где m — число отсчетов по каждому параметру преобразования. Однако эту асимптотику можно существенно улучшить, используя инварианты аффинного преобразования.

Рассмотрим следующее разложение проективного преобразования: $P = AP'$, где P — проективное преобразование, A — аффинное, а P' назовем чисто проективным преобразованием:

$$P' : (x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{a \cdot x + b \cdot y + 1}, \frac{y}{a \cdot x + b \cdot y + 1} \right). \quad (1)$$

В разделе 3 будет показано, что аффинное совмещение двух контуров с одной ОТ внутри контура можно реализовать за $O(n)$ операций. В качестве особой точки может выступать центр масс фигуры, очерченной контуром, поскольку его положение аффинно инвариантно. Вычисление положения центра масс требует $O(n)$ операций, и, учитывая перебор всех чисто проективных преобразований, окончательно получим оценку сложности $O(m^2 \cdot n)$.

Для грубого сравнения вычислительной сложности переборных подходов с другими алгоритмами можно считать $m \sim n$ (эта зависимость особенно очевидна для преобразования сдвигов). Ниже мы покажем, что использование проективных инвариантов позволяет конструировать более экономные алгоритмы.

3. Инвариантные отображения

Напомним, что k -мерное инвариантное отображение замкнутой кривой может быть задано циклической последовательностью $\langle \vec{E} \rangle$, $\dim \vec{E}_i = k$, $i = 1..n$, такой что существует соответствие между точками кривой и элементами отображения, причем проективное преобразование кривой не приводит к изменению отображения. Ранее [5–7] уже была показана возможность построения таких отображений для плоских гладких контуров. Оценим теперь вычислительную сложность задачи корреспонденции для инвариантных отображений.

В отсутствие шума отображения проективно инвариантных кривых будут представлять различные дискретизации одного и того же контура

в k -мерном пространстве. Для сопоставления различных дискретизаций одного сигнала идеально подходит метод динамической трансформации временной шкалы (dynamic time warping, DTW) [9], имеющий квадратичную сложность от длины входных последовательностей. Однако алгоритм DTW не применим напрямую в случае циклических сигналов. Для его корректной работы необходимо найти хотя бы одну пару корреспондирующих точек. Разумно выбрать на инвариантном отображении эталона точку таким образом, чтобы поиск корреспонденции занял наименьшее время. Рассмотрим подробнее способ выбора корреспондирующих точек.

В случае, когда поворотный ранг ОТ-контура равен единице, разобьем контур отображения на участки, разделяемые ОТ. Каждый из участков однозначно идентифицируется положением в последовательности ОТ и может сопоставляться алгоритмом DTW независимо. Сопоставление s ОТ отображений образца и эталона требует не более $O(k \cdot s^2)$ операций. В приближении равномерного разбиения контура малым числом ОТ получим общую сложность корреспонденции

$$O\left(\frac{k \cdot n^2}{s}\right)$$

операций. Аналогично для поворотного ранга q получим сложность

$$O\left(\frac{q \cdot k \cdot n^2}{s}\right).$$

Заметив, что $r \leq s$, окончательно получим оценку сверху числа операций в приближении равномерного разбиения контура набором ОТ — $O(k \cdot n^2)$.

В случае отсутствия ОТ зададимся некоторым радиусом Δ , характеризующим ожидаемую амплитуду координатного шума на отображении. Для каждой точки \vec{E}_i отображения найдем все точки отображения, лежащие в ее Δ -окрестности. Назовем индексом уникальности u_i число отрезков последовательности $\langle \vec{E} \rangle$, попадающих в окрестность точки i . В качестве эталонной выберем точку с индексом $j = \arg \min_i u_i$. (Заметим, что в случае одномерного отображения это будет точка одного из глобальных экстремумов.) В качестве кандидатов на отображении образца за $O(n \cdot u_j)$

операций отберем u_j наилучших отрезков отображения, лежащих в Δ -окрестности эталонной точки. Отрезок будем считать лучшим, если его ближайшая к эталонной точка лежит ближе. Применение алгоритма DTW к каждому из отобранных вариантов потребует в сумме $O(k \cdot u_j \cdot n^2)$ операций.

Для двумерных отображений ранее был предложен другой алгоритм корреспонденции [5]. Он заключается в представлении отображений в виде дискретных ломаных на матрице размером порядка $n \times n$. Оценим его сложность. Для эталонного отображения построим на матрице соответствующую ему ломаную и припишем каждой ее точке уникальный индекс. В худшем случае это потребует $O(n^2)$ операций. Построим затем на матрице преобразование расстояний (distance transform), поддерживая в каждой ячейке не только минимальное расстояние, но и индекс звена ломаной, являющегося ближайшим. Эту задачу можно решить за $O(n^2)$ операций, в том числе и для евклидовой метрики [10]. Указанные операции проводятся с эталонной кривой и, следовательно, не влияют на скорость распознавания.

Установление корреспонденции на полученной матрице может быть произведено за $O(n)$ операций, что гораздо лучше варианта с использованием алгоритма DTW. Однако рассмотренный метод не применим в случае одномерного отображения, а с увеличением размерности его требования к памяти обрабатываемой системы растут экспоненциально.

Заметим теперь, что успешная корреспонденция инвариантных отображений не гарантирует проективной эквивалентности исходных контуров. Это достаточно очевидно для одномерных описаний: к примеру, все битонические последовательности с одинаковыми экстремальными значениями эквивалентны с точки зрения алгоритма DTW. Для более высоких размерностей вопрос требует более детального анализа, но по крайней мере на сегодня не известно доказательств достаточности корреспонденции инвариантных отображений.

При этом задача может быть доведена до конца проверкой, является ли преобразование, задаваемое корреспонденцией, действительно проективным. К сожалению, не известно хорошего равномерного метода, обладающего достаточной вычислительной простотой. Метод наименьших квадратов в данном случае порождает нелинейную систему уравнений [11]. Тем не менее, существует простой метод: на эталонной кривой заранее выбирают четыре ОТ, гарантирующие устойчивый проективный базис (т. е., в частности, неколлинеарные по три). После установления соответствия для этих

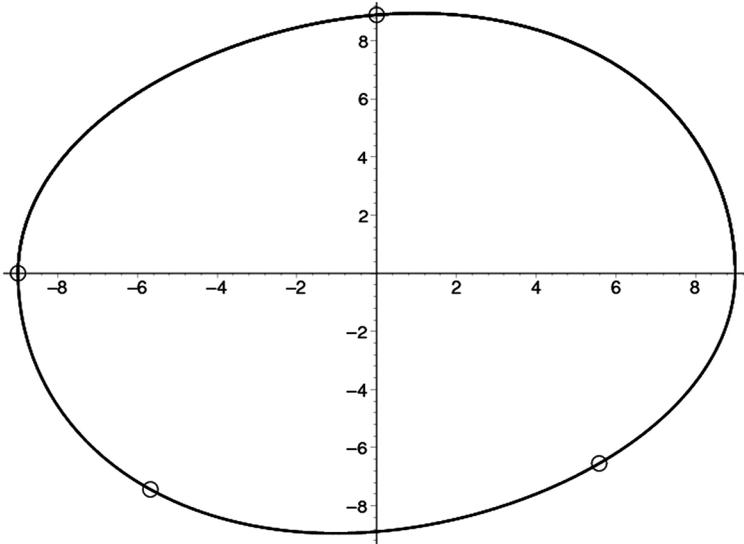


Рис. 1. Пример центрально симметричного контура

точек вычисляется проективное преобразование, отображающее точки образца на плоскость эталона. Если на плоскости эталонного контура заранее вычислено преобразование расстояний, то окончательная оценка качества соответствия займет $O(n)$ операций.

Таким образом, при использовании двумерных инвариантных отображений сложность задачи корреспонденции целиком определяется сложностью построения отображения и (теоретически) может быть доведена до линейной сложности.

4. Поиск центра симметрии

Рассмотрим теперь задачу распознавания контура с одной неинвариантной внутренней ОТ, а именно точкой центра симметрии. На рис. 1 изображен пример такого контура. Оценим сложность отыскания образа центра симметрии на проективно преобразованном контуре. При использовании перебора параметров преобразования нам потребуется $O(n \cdot m^2)$ операций, поскольку центр симметрии аффинно устойчив и имеет смысл перебирать только чисто проективные преобразования с проверкой результата преобразования на симметричность.

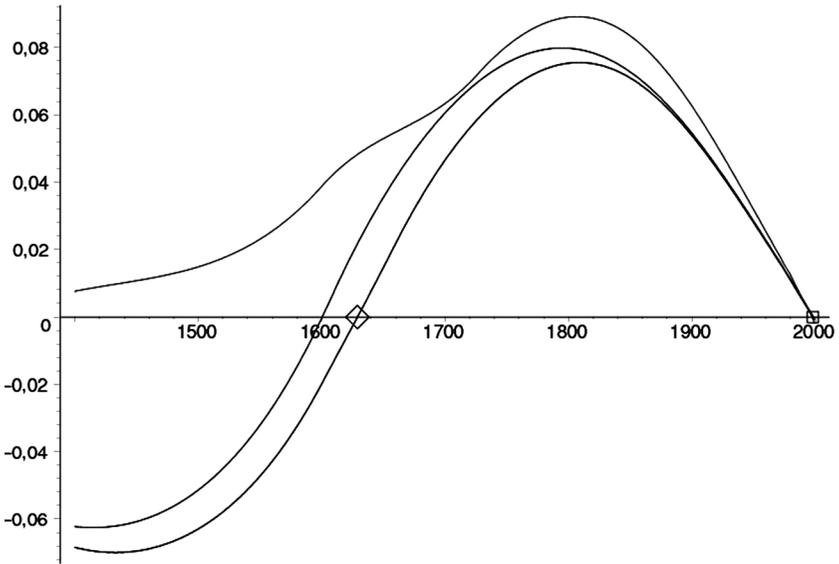


Рис. 2. Поведение вурф-функций

Перейдем к другому методу, имеющему квадратичную сложность. Воспользуемся следующим проективно устойчивым свойством центра симметрии: если в концах любой хорды, проходящей через проекцию центра симметрии, построить касательные к контуру, а из точки их пересечения провести прямую через проекцию центра, то эта прямая будет разделена точкой пересечения хорд, точками пересечения с контуром и проекцией центра симметрии таким образом, что вурф (двойное отношение четырех точек прямой) получившихся отрезков будет гармоническим. Гармоническим вурфом называется отношение $1:1:\infty$.

Зафиксируем любую точку контура (назовем ей *курсором*) и построим всевозможные хорды, проходящие через курсор. Построим для каждой хорды пару касательных и точку их пересечения. Через точку пересечения хорд проведем всевозможные секущие. Отметим три точки пересечения: с контуром и с хордой. Для каждой секущей вычислим отклонение вурфа от гармонического. Характерный вид изменения этого отклонения при вращении секущей показан на рис. 2. Зафиксируем те точки хорды, для которых отклонение вурфа от гармонического прошло через 0, и отметим их на плоскости контура.

Описанная процедура требует $O(n^2)$ операций и строит внутри контура кривую, проходящую через проекцию центра симметрии при условии, что центр существует. Повторив операцию несколько раз и вычислив пересече-

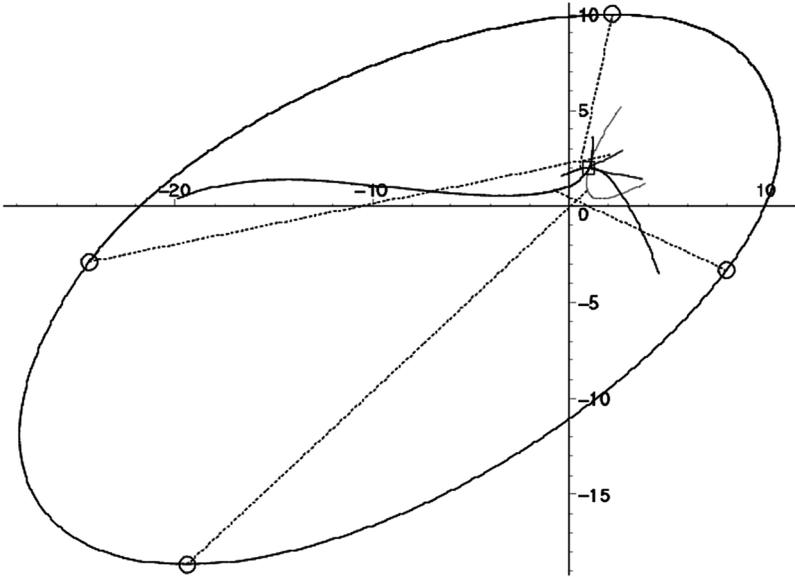


Рис. 3. Поиск центра симметрии

чения пар кривых, найдем проекцию центра. На рис. 3 изображена проективно преобразованная фигура с рис. 1. На обоих рисунках кружками отмечены позиции четырех курсоров. Пунктиром обозначена связь между курсором и соответствующей ему кривой. Квадратом отмечено истинное положение проекции центра симметрии. Как видно из рисунка, предложенный алгоритм успешно справился с задачей.

5. Распознавание контура с одной внутренней ОТ

После того как центр симметрии найден, проблема сводится к задаче установления соответствия для контура с одной внутренней ОТ. Использование перебора проективного базиса потребует в этом случае $O(n^4)$ операций. Покажем, как с помощью проективно инвариантного дополнительного построения решить эту задачу за $O(n)$ операций.

Рассмотрим всевозможные хорды, проходящие через ОТ. Перебор всех хорд вместе с поиском пересечений хорды и контура требует $O(n)$ операций при условии упорядоченного хранения точек контура. Для этого достаточно перевести координаты всех точек кривой в полярные с центром в ОТ, разделить контур на два участка протяженностью в π радиан и отсортировать участки слиянием. На каждой хорде известны три точки — ОТ и

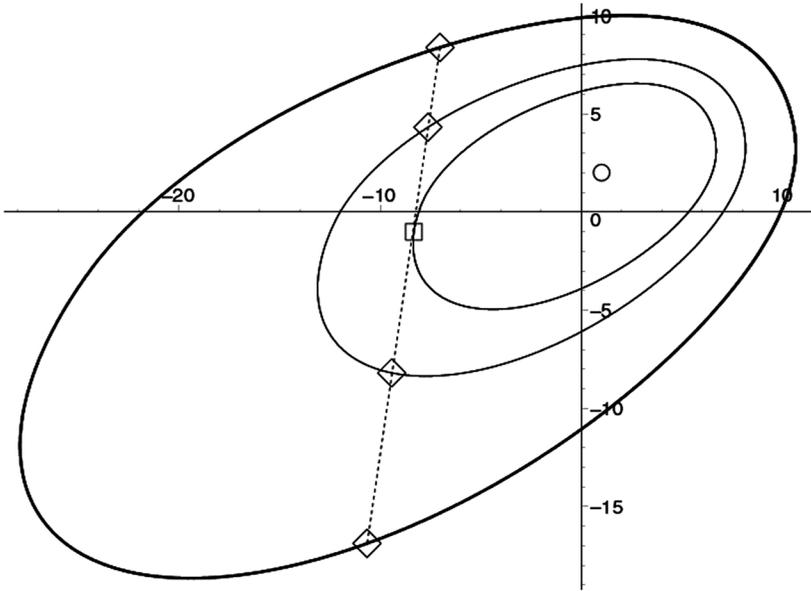


Рис. 4. Построение инвариантного отображения

две точки пересечения с контуром. Зафиксировав любое значение двойного отношения, мы можем проективно инвариантно достроить еще одну точку на той же хорде. При обходе кривой эти точки опишут дополнительный контур, проективно связанный с исходным. Повторив процедуру второй раз с другим значением двойного отношения, получим систему из трех контуров, изображенную на рис. 4.

Построим теперь всевозможные касательные к внутреннему контуру. Поиск их точек пересечения с двумя внешними контурами займет $O(n)$ операций (несмотря на то что поиск пересечений для первой хорды требует $O(\log n)$ операций). При этом для каждой хорды будут известны четыре точки пересечения (на рис. 4 они отмечены ромбами) и одна — касания (квадрат). По пяти точкам на одной прямой можно вычислить два независимых проективных инварианта. Таким образом, за $O(n)$ операций можно построить двумерное инвариантное представление контура с одной внутренней особенностью. На рис. 5 изображен результат отображения для контура, показанного на рис. 1. Кругом и квадратом отмечены отображения диаметрально противоположных точек. Они совпали по причине центральной симметричности исходного контура — получившееся отображение обходится дважды. Заметим, что совершенно аналогично можно ре-

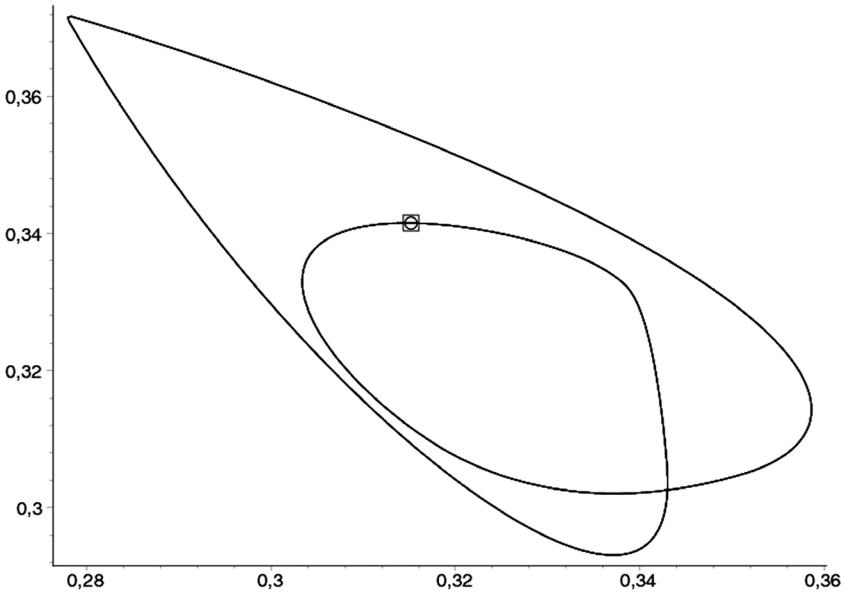


Рис. 5. Инвариантное отображение центрально симметричного контура

шить и задачу аффинного сопоставления контуров, вычислив для каждой хорды два любых аффинных инварианта.

Полученная вычислительная сложность меньше, чем для этапа поиска центра симметрии, и совпадает со сложностью установления соответствия по двумерному инвариантному отображению. Таким образом, задача проективного распознавания контуров с одной инвариантной внутренней ОТ имеет сложность $O(n)$, а контуров с центром симметрии — $O(n^2)$.

Заключение

Итак, использование аппарата инвариантных описаний в задаче проективно инвариантного распознавания плоских кривых вычислительно оправдано. Квадратичная сложность полученного алгоритма позволяет использовать его в реальных приложениях. В последующих работах мы надеемся сравнить устойчивость и точность предложенного метода с переборными алгоритмами в условиях низкого разрешения и наличия координатного шума.

Литература

1. *Форсайт Д. А., Понс Дж.* Компьютерное зрение. Современный подход. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. 928 с.
2. *Николаев П. П.* Алгоритмы корреспонденции в задачах распознавания и стереосинтеза. II. Инварианты криволинейных фигур // Сенсорные системы. 1990. Т. 4. № 4. С. 431–442.
3. *Николаев П. П.* Алгоритмы корреспонденции в задачах распознавания и стереосинтеза. III. Сетевой подход к процедурам узнавания и репрезентации // Сенсорные системы. 1991. Т. 5. № 1. С. 89–104.
4. *Николаев П. П.* Сети и механизмы зрительного восприятия // Интеллектуальные процессы и их моделирование. Информационные сети. М.: Наука, 1993. Вып. 4. С. 151–179.
5. *Николаев П. П.* Модели константного зрительного восприятия. I. Проективно-инвариантное представление гладких объектов // Сенсорные системы. 1995. Т. 9. № 2. С. 109–131.
6. *Николаев П. П.* Модели константного зрительного восприятия. II. Полевые алгоритмы репрезентации гладких объектов // Сенсорные системы. 1995. Т. 9. № 4. С. 110–132.
7. *Николаев П. П.* Проективные инварианты и симметрии в обратной задаче зрения // В сб.: Труды 50-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть IX. Инновации и высокие технологии. М.: МФТИ, 2007. С. 114–115.
8. *Faugeras O., Luong Q.-T., Papadopoulos T.* The Geometry of Multiple Images. MIT Press, 2001. 644 p.
9. *Myers C. S., Rabiner L. R.* A comparative study of several dynamic time-warping algorithms for connected word recognition // The Bell System Technical Journal. 1981. Vol. 60. № 7. P. 1389–1409.
10. *Fabbri R., Bruno O. M., Costa L. da F., Torelli J. C.* 2D Euclidean distance transform algorithms: A comparative survey // ACM Comput. Surv. 2008. Vol. 40. № 1. P. 1–44.
11. *Radke R. J., Ramadge P. J.* Efficiently estimating projective transformations // In proc. of ICIP 2000. 2000. Vol. 1. P. 232–235.