# Критерии грубой декомпозируемости специальных классов динамических моделей сложных технических систем *

И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов

*Институт системного анализа Российской академии наук,*
Россия, 117312 Москва, пр. 60-летия Октября, 9

В статье рассматриваются вопросы редуцируемости, декомпозируемости, диагонализируемости специальных классов линейных динамических моделей сложных объектов и процессов. Установлены алгебраические критерии их грубой декомпозируемости и диагонализируемости. Получены также геометрические необходимые и достаточные условия грубой диагонализируемости вещественных квадратных матриц порядка $n \geq 2$.

## Введение

При изучении какой-либо математической модели сложных технических объектов или процессов обычно задаются некоторым набором свойств $K$ ее решений и ставят задачу найти условия на коэффициенты или параметры модели, которые гарантировали бы наличие требуемых свойств у всех или части ее решений. Поскольку, как правило, решения неизвестны и определение их через коэффициенты (параметры) модели в подавляющем большинстве случаев либо невозможно, либо сильно затруднено, приходится пользоваться различными косвенными приемами. Один из таких приемов заключается в следующем [1–8]. Пусть $x = P(t)y$, где $x$ — переменная модели; $P(t)$ — обратимая при каждом $t \in T$ матрица; $T$ — открытое связное множество некоторого топологического пространства; $S$ — такое преобразование, что любые функции $x(t)$, $y(t)$, связанные им, одновременно либо обладают, либо нет предписанными свойст-

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (проект № 2.44) и РФФИ (проект № 07–01–00572).

вами $K$. Если, дополнительно, рассматриваемое преобразование таково, что математическая модель, получившаяся из исходной посредством применения его, достаточно проста, так что свойства $K$ ее решений легко определяются по коэффициентам, то тем самым устанавливаются и свойства $K$ у первоначальной модели. Чаще всего, применяя этот прием, под «простой» понимается либо стационарная модель (модель со стационарными коэффициентами) и тогда говорят, что первоначальная модель приводима с помощью преобразования $x = P(t)y$, либо модель, допускающая разбиение на подмножители меньшей размерности, в этом случае говорят, что первоначальная модель является декомпозируемой. Если при этом допускается использование не одного преобразования, а некоторого семейства $F$ преобразований, сохраняющих набор свойств $K$, то говорят о приводимости или декомпозируемости относительно этого семейства.

Основная трудность применения описываемого метода — это выбор необходимого преобразования, приводящего исследуемую математическую модель к упрощенному виду. Так, например, эффективное построение такого преобразования для линейных дифференциальных систем означало бы интегрируемость в замкнутом виде, а это, как хорошо известно, возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому в сколько-нибудь общей ситуации приходится ограничиваться лишь фактом приводимости (декомпозируемости) без указания соответствующего преобразования. Это, естественно, сильно сужает возможность рассматриваемого метода, однако, тем не менее, позволяет получить достаточно полную информацию о структуре общего решения модели, что в совокупности с другими соображениями часто приводит к достижению нужного результата. В настоящей работе исследуются вопросы приводимости и декомпозируемости специальных классов линейных дифференциальных моделей; установлены критерии грубой диагонализируемости и декомпозируемости таких моделей. Приведены также критерии грубой декомпозируемости вещественных квадратных матриц размерности $n \geq 2$.

## 1. Необходимые сведения из качественной теории дифференциальных систем и линейной алгебры

Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейной алгебры.

**I.** Для заданного натурального числа $n \geq 2$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (x \in R^n, t \geq 0), \tag{1}$$

где $x$ — вектор $n$-мерного вещественного евклидова пространства $R^n$; $A(t)$ — линейное преобразование $R^n \to R^n$, определенное и непрерывно зависящее от $t$ при $t \geq 0$, причем $\| A(t) \| \leq a$, $\| A \|$ — норма оператора $A$.

***Определение 1*** [8–10]. Характеристическим показателем Ляпунова решения $x(t)$ системы (1) называется число

$$\lambda = \lambda(x) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \| x(t) \|,$$

где $\| x \|$ — норма ненулевого вектора $x$ евклидова пространства $R^n$.

Ляпунов установил [9], что существует базис $x_1(t),...,x_n(t)$ пространства решений линейной дифференциальной системы (1) такой, что для всякого базиса $y_1(t),....,y_n(t)$ того же пространства

$$\lambda(y_i) \geq \lambda(x_i) \ (i = 1,...,n), \text{ если } \lambda(y_1) \geq .... \geq \lambda(y_n). \tag{2}$$

Базис $x_1(t),...,x_n(t)$, удовлетворяющий соотношениям (2), называется нормальным базисом дифференциальной системы (1). А. М. Ляпунов доказал также, что показатели $\lambda(y_1),....,\lambda(x_n)$ решений из нормального базиса не зависят от выбора последнего [9].

***Определение 2*** [8–10]. Числа $\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A)$, где $\lambda_i(A) = \lambda(x_i)$ называется характеристическими показателями системы (1).

Отметим, что показатель Ляпунова $\lambda(x)$ оценивает экспоненциальный рост (убывание) решения $x(t)$ линейной однородной дифференциальной системы типа (1).

***Определение 3*** [8–10].

1) Линейная система вида (1)

$$\dot{x} = A(t)x$$

называется приводимой к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \tag{3}$$

если существует ляпуновское преобразование

$$x = M(t)y,$$

где $M(t)$ — непрерывно-дифференциальное при $t \geq 0$ преобразование; $\dot{M}(t) = \dfrac{dM}{dt}$, $M^{-1}(t)$ существуют и нормы $\| \dot{M}(t) \|, \| M(t) \|, \| M^{-1}(t) \|$ ограничены при $t \geq 0$, переводящее систему (1) в систему (3), т. е.

$$B(t) = M^{-1}(t)A(t)M(t) - M^{-1}(t)\dot{M}(t).$$

2) Система (3) называется приводимой, если оператор-функция $B(t)$ системы (3) является стационарной:

$$B(t) \equiv B \quad (t \geq 0).$$

Напомним (см., например, [8]) что понятие приводимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. отношение приводимости является отношением эквивалентности.

Имеют место следующие утверждения [8–11].

***Теорема 1.***

1) *Преобразование Ляпунова не меняет спектр характеристических показателей линейной дифференциальной системы типа (1).*
2) *Преобразование Ляпунова не меняет свойств устойчивости., асимптотической устойчивости, неустойчивости решений дифференциальной системы вида (1). (Другими словами, если система (1) устойчива (асимптотически устойчива, неустойчива), то при любом ляпуновском преобразовании $M(t)$ таким же свойством обладает и преобразованная система (3).*

***Теорема 2.***

1) *Системы с постоянными и периодическими коэффициентами являются приводимыми.*
2) *Зафиксируем в евклидовом пространстве $R^n$ некоторый ортонормированный базис $e_1, ...., e_n$. Тогда дифференциальная система*

$$\dot{x} = A_M(t)x, \tag{4}$$

где $x \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = col(x^{(1)}, ...., x^{(n)}), \quad A_M(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$

*$A_M(t)$ — матрица оператора $A(t)$ системы (1) в базисе $e_1,...,e_n$ (напомним, что система (4) называется векторно-матричной формой дифференциальной системы (1)) приводима тогда и только тогда, когда для некоторой ее фундаментальной матрицы решений $X(t)$, $X(0)=E$, где $E$ — единичная матрица, справедливо следующее представление:*

$$X(t)=L(t)\cdot e^{C\cdot t}, \tag{5}$$

*где $L(t)$ — матрица Ляпунова, $C$ — постоянная вещественная $(n\times n)$-матрица.*

**II.** В настоящем разделе мы будем рассматривать пространство $U$ вещественных квадратных матриц порядка $n\geq 2$.

***Определение 4*** [12–15]. Матрицы $A, B\in U$ называется подобными, если существует такая обратная (неособая) $(n\times n)$-матрица $D\in U$, что

$$B=D^{-1}AD.$$

Из линейной алгебры известно (см., например, [12–15]), что любая матрица $A\in U$ подобна следующей матрице $H$, называемой вещественной формой Жордана матрицы $A$:

$$H=N^{-1}\cdot A\cdot N=\operatorname{diag}(K_1,(\lambda_1),...,K_p(\lambda_p);I_1(\gamma_1),...,I_q(\gamma_q)), \tag{6}$$

где

$$K_S(\lambda_S)=\begin{pmatrix} F_S & E_2 & \dots & O_2, & O_2\\ O_2 & F_S & \dots & O_2 & O_2\\ . & . & \dots & . & .\\ O_2 & O_2 & \dots & F_S & E_2\\ O_2 & O_2 & \dots & O_2 & F_S\end{pmatrix},$$

$$F_S=\begin{pmatrix}\alpha_S & -\beta_S\\ \beta_S & \alpha_S\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\lambda_1=\alpha_1\pm i\beta_1,...,\lambda_p=\alpha_p\pm i\beta_p$ — комплексные собственные значения матрицы $A\in U$;

$$I_j(\gamma_j)=\begin{pmatrix} \gamma_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_j \end{pmatrix},$$

$\gamma_1,...,\gamma_q$ — вещественные собственные значения матрицы $A \in U$.

## 2. Критерии грубой декомпозируемости и диагонализируемости приводимых линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть задана линейная дифференциальная система с приводимыми коэффициентами

$$\dot{x} = A_r(t)x(x \in R^n, t \geq 0), \tag{7}$$

где $A_r(t)$ — непрерывная ограниченная $(n \times n)$-матрица;

$$x = col(x^{(1)},...,x^{(n)}).$$

***Определение 5.*** Система вида (7) называется грубо декомпозируемой, если существует такое $\varepsilon > 0$, то любая приводимая система

$$\dot{u} = B_r(t)u \ \ (u \in R^n, t \geq 0),$$
$$d(A_r(t), B_r(t)) \equiv \sup_{t \geq 0} \| A_r(t) - B_r(t) \| < \varepsilon,$$

декомпозируема (т. е. приводится с помощью ляпуновского преобразования к стационарной системе с блочно-диагональной матрицей коэффициентов).

Прямым следствием матричных представлений (5), (6) является следующее утверждение, дающее достаточные условия грубой декопозируемости приводимых дифференциальных систем вида (7).

***Теорема 3.*** *Пусть среди характеристических показателей системы* (7) *найдутся хотя бы два различных. Тогда приводимая система* (7) *является грубо диагонализируемой.*

Введем теперь следующее определение.

***Определение 6.*** Линейная приводимая система вида (7) называется грубо диагонализируемой, если найдется такое $\sigma > 0$, что любая приводимая система

$$\dot{z} = C_r(t)z \ (z \in R^n, t \geq 0),$$
$$d(A_r(t), C_r(t)) \equiv \sup_{t\geq 0} \| A_r(t) - C_r(t) \| < \sigma,$$

является диагонализируемой (т. е. приводимой с помощью некоторого преобразования Ляпунова к стационарной системе с диагональной матрицей коэффициентов).

Имеет место следующее утверждение [16, 17].

***Теорема 4.***

1) *Приводимая линейная система является грубо диагонализируемой тогда и только тогда, когда она имеет различные характеристические показатели Ляпунова.*
2) *Приводимая линейная система вида (7) грубо диагонализируема тогда и только тогда, когда она обладает следующим условием сильной геометрической регулярности решений: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что для всякого решения $v(t)$ приводимой системы*

$$\dot{v} = E_r(t)v \ \ (v \in R^n, t \geq 0)$$
$$d(A_r(t), E_r(t)) = \sup_{t\geq 0} \| A_r(t) - E_r(t) \| < \sigma,$$

*можно подобрать решение $x(t)$ системы (7), для которого*

$$\sup_{t\geq 0} \measuredangle(x(t), v(t)) < \varepsilon,$$

*где $\measuredangle(x, v)$ — угол между ненулевыми векторами $x, v$ евклидова пространства $R^n$.*

3) *Приводимая система типа (7) грубо диагонализируема тогда и только тогда, когда она обладает следующим условием слабой геометрической регулярности решений: у системы (7) найдется такой нормальный базис решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma > 0$, что у всякой приводимой системы*

$$\dot{p} = F_r(t) \cdot p \ \ (p \in R^n, t \geq 0),$$
$$d(A_r(t), F_r(t)) < \sigma$$

*имеются решения* $p_1(t),..., p_n(t)$, *для которых*

$$\sup_{t \geq 0} \measuredangle(x_i(t), p_i(t)) < \varepsilon, \ i-1,..,n.$$

Отметим, что утверждения 2, 3 теоремы 4 дают геометрические необходимые и достаточные условия грубой диагонализируемости линейных приводимых дифференциальных систем вида (7).

## 3. Геометрический критерий грубой диагонализируемости вещественных квадратичных матриц

В настоящем разделе мы будем предполагать, что задана вещественная квадратичная матрица $A$ порядка $n \geq 2$. Введем следующее определение

***Определение 7.*** Матрица $A$ называется грубо диагонализируемой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что всякая матрица $B$, для которой

$$\rho(A,B) = \sup_{|m|=1} |(A-B)m| < \varepsilon,$$

где $|m|$ — норма вектора $m$ евклидова пространства $R^n$ : $|m| = (m,m)^{\frac{1}{2}}$, является диагонализируемой, т. е. подобной некоторой диагональной вещественной матрице.

Прямым следствием теоремы 4 настоящей работы является следующее утверждение.

***Теорема 5.***

1) *Матрица* $A \in U$ *грубо диагонализируема тогда и только тогда, когда она имеет различные вещественные собственные значения.*
2) *Матрица* $A \in U$ *является грубо диагонализируемой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему условию сильной геометрической регулярности: для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\sigma > 0$, *что для всякого решения* $f(t)$ *стационарной линейной системы*

$$\dot{f} = Bf\,(f \in R^n, t \geq 0), \rho(A, B) < \sigma \tag{8}$$

*существует решение* $h(t)$ *системы*

$$\dot{h} = A \cdot h\ (h \in R^n, t \geq 0), \tag{9}$$

*для которого*

$$\sup_{t \geq 0} \measuredangle(h(t), f(t)) < \varepsilon.$$

3) *Матрица* $A \in U$ *грубо диагонализируема тогда и только тогда, когда она обладает следующим условием слабой геометрической регулярности: стационарная дифференциальная система*

$$\dot{l} = Al\ \ (l \in R^n, t \geq 0) \tag{10}$$

*имеет нормальный базис решений* $l_1(t),...,l_n(t)$ *такой, что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma > 0$ *такое, что у всякой системы*

$$\dot{m} = Bm\ \ (m \in R^n, t \geq 0),\ \ \rho(A, B) < \sigma \tag{11}$$

*существуют решения* $m_1(t),....,m_n(t),$ *для которых*

$$\sup_{t \geq 0} \measuredangle(l_i(t), m_i(t)) < \varepsilon,\ i = 1,...,n.$$

Отметим, что утверждения 2, 3 теоремы 5 дают необходимые и достаточные условия грубой диагонализируемости вещественной квадратной матрицы $A$ в терминах геометрического поведения решений стационарной дифференциальной системы вида (9) ((10)) с данной матрицей коэффициентов правой части и близких к ней систем типа (8) ((11)).

## Заключение

Таким образом, в работе изучаются задачи приводимости, декомпозируемости, диагонализируемости специальных классов линейных систем; даны алгебраические и геометрические необходимые и достаточные условия их грубой декомпозируемости и диагонализируемости. Установлены также критерии грубой диагонализируемости вещественных квадратных матриц размерности $n$ $(n \geq 2)$.

## Литература


1. *Мышкис А. Д.* Элементы теории математических моделей. М.: URSS, 2009.
2. *Блехман И. И.*, *Мышкис А. Д.*, *Пановко Я. Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. М.: ЛКИ/URSS, 2007.
3. *Елкин В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. М.: Наука, 1997.
4. *Подчуфаров Ю. Б.* Физико-математическое моделирование систем управления и комплексов. М.: Физматлит, 2002.
5. *Цурков В. И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
6. *Бахтурин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
7. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: URSS, 2004.
8. *Былов Б. Ф.*, *Виноград Р. Э.*, *Гробман Д. М.*, *Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
11. *Розенвассер Е. Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М.: Наука, 1977.
12. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 2005.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
14. *Кострикин А. И.*, *Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
15. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.; Ижевск: РХД, 2002.
16. *Макаров И. М.*, *Ахрем А. А.*, *Рахманкулов В. З.* Геометрические свойства специальных классов линейных динамических систем // Системные исследования. Методические проблемы. М.: КомКнига/URSS, 2005. Вып. 32. С. 216–230.
17. *Макаров И. М.*, *Ахрем А. А.*, *Рахманкулов В. З.* Редуцируемость специальных классов виртуальных моделей сложных технических систем // Системные исследования. Методические проблемы. М.: КомКнига/URSS, 2006. Вып. 33. С. 120–140.