

Многомодельные компьютерные методы анализа процессов проектирования и разработки сложных технических систем *

И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов

*Институт системного анализа Российской академии наук,
Россия, 117312 Москва, пр. 60-летия Октября, 9*

В статье изучаются задачи автоматизированной разработки сложных технических проектов. Вводится понятие многомодельного метода решения указанных задач и получены достаточные условия эффективного применения данного метода решения задач анализа и синтеза новых технических систем.

Введение

Анализ научно-технической литературы по вопросам проектирования и разработки сложных технических систем [1–22] показывает, что проектно-конструкторские решения по выбору лучших (максимальных) проектов систем принимаются, как правило, в условиях неопределенности, связанных с «грубым» описанием системы на ранних этапах разработки, с необходимостью согласования принимаемых на всех уровнях иерархии решений, с использованием упрощенных моделей проектируемой системы и методов оценки ее характеристик, с неполнотой информации, полученной в вычислительных, полунатурных и натурных экспериментах, и др. Следовательно, весь ход разработки проектов сложных систем связан с многокритериальным оцениванием большого множества вариантов в условиях существенной неопределенности информации. В работах [18–29] показано, что для сохранения оптимальности окончательного выбора необходима параллельная разработка на всех этапах создания сложной технической сис-

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (проект № 2.09) и РФФИ (проект № 07–01–00572).

темы нескольких альтернативных вариантов, выбираемых в качестве максимальных.

Однако кратное увеличение затрат при параллельной разработке часто препятствует применению такого подхода, несмотря на его преимущества. Появление современных средств компьютерного моделирования и развитие программных средств открывает возможность для эффективного использования параллельной разработки, не приводящей к существенному увеличению затрат на анализ и оценку большого числа вариантов. В настоящей работе проблема параллельной разработки рассматривается с позиций многомодельного компьютерного анализа, основанного на аппарате конкурирующих стохастических инновационных процессов [14, 17, 23–29] и методов последовательного анализа и отбраковки вариантов [3, 9, 10, 15, 19–22]. Предложенные методы способствуют снижению неопределенности в выборе максимальных вариантов проектов сложных компьютерно-интегрированных систем в результате организации виртуального процесса параллельной разработки, ослабляющего требования к реальному процессу проектирования и создания таких систем.

1. Критерии эффективности многомодельного компьютерного режима моделирования процесса разработки сложных технических систем

Для нахождения критерия эффективного применения многомодельного автоматизированного режима анализа процессов проектных разработок воспользуемся следующей математической моделью выбора максимальных вариантов проектируемой технической системы [9,15,20,21]. Пусть имеется s ($s < +\infty$) альтернативных вариантов проектов создаваемой системы. Каждый вариант задается вектором технических параметров $x \in R^n$, где R^n — вещественное евклидово пространство размерности n . Вектор x принимает значения из множества $X \subset R^n$. Сравнение альтернатив по эффективности определяет на X бинарное отношение сравнительной эффективности U . Под задачей моделирования процесса проектной разработки будем понимать задачу отыскания ядра максимальных элементов $\text{Max}(X, U)$ модели (X, U) . Отношение U на X задается обычно через решение сложных оптимизационных задач. По этой причине реализация постановки задачи выбора максимальных вариантов создаваемой технической системы по полному отношению сравнительной эффективности U , как правило, невозможна. Процесс выбора приходится декомпозировать

на уровни и этапы, реализуя их последовательно, а решение задачи моделирования процесса проектной разработки находят путем последовательного анализа и отбраковки вариантов [9, 15, 20]:

$$X_{i-1} \rightarrow X_i \equiv X_{i-1} \setminus A_i, \quad (1)$$

где $i=1, \dots, l$ — этапы или уровни декомпозиции; l — заключительный этап процедуры декомпозиции (1); $X_0 = X$ — исходное множество вариантов проектируемой системы; A_i — отбракованные варианты, которые в дальнейшем не рассматриваются.

Отбраковка вариантов проводится на основе частичных отношений сравнительной эффективности U_i ($i=1, \dots, l$), аппроксимирующих изнутри исходное бинарное отношение сравнительной эффективности U .

В работах [15, 20–22, 25] для специальных классов бинарных отношений U_i найдены условия, гарантирующие для процедуры принятия проектных решений (1) выполнение включения $\text{Max}(X, U) \subseteq X_l$ или даже равенства $\text{Max}(X, U) = X_l$. Заметим, однако, что на практике выполнить все условия процедуры (1), обеспечивающей выбор максимальных вариантов проектируемой технической системы, как правило, не удастся. Это связано с возможной неточностью задания отношений U_i , вызванной неопределенностью предпочтений проектировщика, а также с ошибками компьютерных вычислений с помощью оптимизационных моделей процедуры выбора (1). Учитывая случайную природу этих ошибок, задача (1) приобретает вероятностный характер. Предположим далее, что среди s вариантов имеется r максимальных и множество максимальных вариантов r проектировщикам системы неизвестно. Допустим дополнительно, что у проектировщика имеется система компьютерного моделирования процессов проектной разработки A . Пусть j — максимальное число вариантов, которые могут параллельно разрабатываться без привлечения системы A ; j' ($j' \geq j$) — максимальное число вариантов, которые могут параллельно разрабатываться с использованием системы A . Применяя автоматизированный предпроектный выбор, получаем: s' — общее число максимальных вариантов после модельной обработки (очевидно, что $s' < s$, $r' < r$). Имеет место следующее утверждение [27].

Теорема 1. Если доли максимальных вариантов $r'(s')^{-1}$ и rs^{-1} связаны соотношением $r'(s')^{-1} > rs^{-1}$, то для любого $j' \geq j$ справедливо неравенство:

$$P(j', r', s') > P(j, r, s),$$

где $P(j, r, s)$ — вероятность того, что среди выбранных проектировщиками j вариантов найдется хотя бы один максимальный вариант.

Заметим, что теорема 1 показывает, что эффективное компьютерное моделирование должно браковать значительно больше плохих (не максимальных) вариантов, нежели хороших (максимальных). Отметим также, что при $r' = s'$ компьютерные модели оставляют для дальнейшей разработки только максимальные варианты проектов сложной технической системы.

Предположим теперь, что система A состоит из m различных компьютерных программ $p_1, \dots, p_m$. Допустим также, что вероятность успешного применения любой из программ $p_1, \dots, p_m$ равна q ($0 < q < 1$). Обозначим: P_m — вероятность успешного выбора максимального варианта проектируемой системы с помощью режима многомодельного выбора; P_1 — вероятность успешного выбора максимального варианта проектируемой системы с помощью режима одномодельного выбора. Нетрудно видеть, что величины P_1, P_m задаются следующими формулами:

$$P_1 = q; \quad P_m = 1 - (1 - q)^m.$$

Для величин P_1, P_m справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.

1. Вероятности $P_1(q), P_m(q)$ при любых $q, 0 < q < 1, m, 2 \leq m < +\infty$ удовлетворяют неравенству

$$P_1(q) < P_m(q).$$

2. При $q \rightarrow 0$ вероятности $P_1(q), P_m(q)$ удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{q \rightarrow 0} P_m(q)(P_1(q))^{-1} = m.$$

Доказательство.

1. Для величин $P_1(q), P_m(q)$ справедлива следующая цепочка соотношений ($m \geq 2$):

$$P_1(q) \equiv q = 1 - (1 - q) < 1 - (1 - q)^m \equiv P_m(q). \quad (2)$$

Используя (2), окончательно получаем, что

$$P_1(q) < P_m(q), \quad 0 < q < 1, \quad 2 \leq m < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

2. Для вероятности $P_m(q)$ при любом фиксированном значении m имеют место следующие соотношения:

$$P_m(q) \equiv 1 - (1 - q)^m = mq + f_m(q), \quad (3)$$

где $f_m(q)$ — полином степени m , для которого

$$|f_m(q)| \leq c_m q^2,$$

где c_m — положительная постоянная.

Учитывая (3), находим, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} P_m(q) P_1^{-1}(q) = \lim_{q \rightarrow 0} (mq + f_m(q)) q^{-1} = m,$$

что и требовалось показать.

Теорема 2 полностью доказана.

Прямым следствием утверждения пункта 2 теоремы 2 является следующее предложение.

Утверждение 1. При малых значениях величины q вероятность $P_m(q)$ удовлетворяет следующему приближенному соотношению.

$$P_m(q) \approx mq. \quad (4)$$

Отметим, что утверждение пункта 1 теоремы 2 показывает, что многомодельный режим выбора максимального варианта проектируемой технической системы является более эффективным по сравнению с традиционным одномодельным режимом решения задачи выбора. Утверждение пункта 2 теоремы 2 и утверждение 1 описывают поведение величины $P_m(q)$ при малых значениях параметра q .

Заметим также, что многомодельный режим выбора максимальных вариантов проектируемой технической системы может быть более эффективным по сравнению с одномодельным режимом даже в случае, когда вероятности $q_1, \dots, q_m$ успешного выбора максимального варианта с помощью программ $p_1, \dots, p_m$ системы A меньше вероятности q . Приведем соответствующий пример.

Теорема 3. Допустим, что $m = 2; q_1 = q_2 = \eta q, \frac{1}{2} < \eta < 1$. Для любого вещественного η из интервала $(\frac{1}{2}, 1)$ неравенство

$$P_2(q, \eta) > P_1(q),$$

где $P_2(q, \eta) \equiv 1 - (1 - \eta q)^2$ — вероятность успеха многомодельного режима выбора максимального варианта проектируемой технической системы с помощью программ p_1, p_2 комплекса A ; $P_1(q) \equiv q$ — вероятность успеха одномодельного режима выбора, всегда имеет решения, принадлежащие интервалу $(0, 1)$. Эти решения задаются неравенствами:

$$0 < q < (2\eta - 1)\eta^{-2}.$$

Доказательство.

Для вероятности $P_2(q, \eta)$ имеет место следующая цепочка соотношений:

$$P_2(q, \eta) \equiv 1 - (1 - \eta q)^2 = 2\eta q - \eta^2 q^2.$$

Рассмотрим квадратное неравенство:

$$2\eta q - \eta^2 q^2 > q. \quad (5)$$

При $q \in (0, 1)$ неравенство (5) эквивалентно следующему неравенству:

$$\eta^2 q < 2\eta - 1. \quad (6)$$

Учитывая (6), получаем, что

$$P_2(q, \eta) > P_1(q) \Leftrightarrow q < (2\eta - 1)\eta^{-2}, \quad \frac{1}{2} < \eta < 1. \quad (7)$$

Покажем, что при $\frac{1}{2} < \eta < 1$ выполняется неравенство

$$(2\eta - 1)\eta^{-2} < 1. \quad (8)$$

Имеем:

$$(2\eta - 1)\eta^{-2} < 1 \Leftrightarrow 2\eta - 1 < \eta^2 \Leftrightarrow (\eta - 1)^2 > 0. \quad (9)$$

Последнее неравенство цепочки соотношений (9) справедливо для любого вещественного числа η . Тем самым справедливость неравенства (8) установлена.

Принимая во внимание (6)–(9), окончательно получаем, что

$$P_2(q, \eta) > P_1(q) \Leftrightarrow q \in (0, (2\eta - 1)\eta^{-2}), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Теорема полностью доказана.

При $m = 2, 3$ для величин $P_m(q)$, $P_1(q)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 4.

1. Пусть $m = 2$. Тогда для любого вещественного числа α , $1 < \alpha < 2$, найдется такое $q(\alpha)$, что при всех q , $0 < q < q(\alpha)$, справедливо неравенство

$$P_2(q)P_1^{-1}(q) > \alpha.$$

Величина $q(\alpha)$ вычисляется по следующей формуле:

$$q(\alpha) = 2 - \alpha.$$

2. Пусть $m = 3$. Тогда для всякого вещественного числа β , $1 < \beta < 3$, существует такое значение $q(\beta)$, что при всех q , $0 < q < q(\beta)$, выполнено неравенство

$$P_3(q)P_1^{-1}(q) > \beta.$$

$$\text{Величина } q(\beta) = \frac{3}{2} - \sqrt{\beta - \frac{3}{4}}.$$

Доказательство.

1. Имеем:

$$P_2(q) = 1 - (1 - q)^2; \quad P_1(q) = q \quad (0 < q < 1).$$

Рассмотрим неравенство

$$1 - (1 - q)^2 > \alpha q. \tag{10}$$

Решение неравенства (10) задается соотношениями

$$0 < q < 2 - \alpha. \quad (11)$$

Принимая во внимание (10), (11), получаем, что

$$P_2(q) > \alpha P_1(q) \Leftrightarrow 0 < q < 2 - \alpha,$$

что и требовалось установить.

2. Величина $P_3(q)$ дается формулой

$$P_3(q) = 1 - (1 - q)^3 \quad (0 < q < 1). \quad (12)$$

Рассмотрим неравенство

$$1 - (1 - q)^3 > \beta q \quad (0 < q < 1). \quad (13)$$

Решение неравенства (13) задается соотношениями

$$0 < q < \frac{3}{2} - \sqrt{\beta - \frac{3}{4}}. \quad (14)$$

В самом деле, неравенство (13) можно преобразовать к следующему виду:

$$q^3 - 3q^2 + 3q - \beta q > 0 \quad (15)$$

Так как нас интересуют решения из интервала $(0, 1)$, то, принимая во внимание (15), находим, что неравенство (13) эквивалентно при $q \in (0, 1)$ неравенству

$$q^2 - 3q + (3 - \beta) > 0. \quad (16)$$

Решая квадратное неравенство (16) при дополнительном условии $q \in (0, 1)$, получаем, что

$$q^2 - 3q + 3 - \beta > 0 \Leftrightarrow 0 < q < \frac{3}{2} - \sqrt{\beta - \frac{3}{4}}.$$

Справедливость соотношений (14) установлена.

Из (12), (17) окончательно заключаем, что

$$P_3(q) > \beta P_1(q) \Leftrightarrow 0 < q < \frac{3}{2} - \sqrt{\beta - \frac{3}{4}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4 полностью доказана.

Отметим, что утверждения пунктов 1, 2 теоремы 4 показывают, во сколько раз при $m = 2, 3$ применение многомодельного компьютерного режима решения задачи выбора максимального варианта проектируемой технической системы повышает вероятность успешного решения этой задачи по сравнению с традиционным одномодельным режимом.

Рассмотрим теперь случай произвольного натурального m . Напомним, что в этой ситуации мы имеем:

$$P_m(q) = 1 - (1 - q)^m.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.

1. Для любого вещественного числа φ , большего m : $\varphi > m$, имеет место неравенство

$$P_m(q) < \varphi P_1(q) \quad (0 < q < 1).$$

2. Для любого числа ψ , $1 < \psi < m$, найдется такое значение $q(\psi, m) \in (0, 1)$, что

$$P_m(q(\psi, m)) = \psi P_1(q(\psi, m)). \quad (18)$$

Доказательство.

1. Положим

$$g_m(q) \equiv P_m(q) - \varphi P_1(q) = 1 - (1 - q)^m - \varphi q. \quad (19)$$

Используя (19), находим, что

$$g'_m(q) \equiv \frac{dg_m(q)}{dq} = m(1 - q)^{m-1} - \varphi < 0. \quad (20)$$

Так как ввиду (20) $g'_m(q) < 0$ при $0 < q < 1$, то, применяя достаточное условие монотонности дифференцируемой функции (см., например, [30, с. 270–273]), заключаем, что при всех $q \in (0, 1)$

$$g_m(q) < 0. \quad (21)$$

Используя (19), (21), окончательно будем иметь

$$P_m(q) < \varphi P_1(q) \quad (0 < q < 1),$$

что и требовалось доказать.

2. Обозначим

$$h_m(q) \equiv P_m(q) - \psi P_1(q) = 1 - (1 - q)^m - \psi q \quad (1 < \psi < m).$$

Принимая во внимание результат теоремы 3, получаем, что:

а) при малых значениях величины q :

$$h_m(q) \approx (m - \psi)q > 0;$$

б) при $q = 1$:

$$h_m(q) = -\psi < 0.$$

Используя условия а), б) и применяя теорему Больцано—Коши об обращении непрерывной функции в нуль (см., например, [30, с. 168–170]), получаем, что существует такое значение $q(\psi, m) \in (0, 1)$, что

$$h_m(q(\psi, m)) \equiv P_m(q(\psi, m)) - P_1(q(\psi, m)) = 0.$$

Теорема 5 полностью доказана

Следствие 1 теоремы 5. Для любого натурального числа $m \geq 2$ и любого вещественного числа $q, 0 < q < m^{-1}$ справедливо следующее неравенство:

$$P_m(q) < mP_1(q).$$

Отметим, что ввиду результатов теорем 2, 5 и утверждения 1 (см. соотношения (4), (18)) натуральное число m является точной верхней гранью величины отношения вероятностей $P_m(q)$ и $P_1(q)$ при любых $m \geq 2$ и $q, 0 < q < 1$.

Предположим теперь, что фирма-разработчик имеет систему много-модельного моделирования процессов проектных разработок S , состоящую из n различных компьютерных программ $\{p_1, \dots, p_n\}$, каждая из которых имеет следующий блочно-модульный вид:

$$p_i = (p_{i1}, \dots, p_{ir}),$$

где p_{il} — i -я компьютерная модель l -го этапа процедуры выбора максимальных вариантов проектируемой технической системы $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, r$.

Допустим также, что:

- а) вероятность успешного применения любой из подпрограмм $p_{11}, \dots, p_{nr}$ равна q ($0 < q < 1$);
- б) система S допускает параллельную проработку любых k ($k \leq n$) программ из множества $\{p_1, \dots, p_n\}$ или любых k подпрограмм из множества $\{p_{1l}, \dots, p_{nl}\}$, $l = 1, \dots, r$.

Для повышения вероятности успешной работы автоматизированной многомодельной системы S воспользуемся следующим известным из теории надежности вычислительных систем правилом [31–33]: вероятность успешной работы сложной вычислительной системы при параллельном резервировании каждого из ее блоков выше вероятности успешной работы системы с общим параллельным резервированием. Установим справедливость этого правила для процесса компьютерного моделирования проектных разработок в важном случае, когда число этапов процедуры проектирования равно двум: $r = 2$.

Теорема 6. Для любого вещественного числа $q, 0 < q < 1$ и всякого натурального числа k ($2 \leq k \leq n$) выполнено неравенство

$$u_1(q, k) > u_2(q, k),$$

где $u_1(q, k)$ — вероятность успешного моделирования с помощью k -кратного параллельного резервирования каждого из двух этапов процедуры автоматизированного проектирования; $u_2(q, k)$ — вероятность успешного моделирования с помощью k -кратного параллельного резервирования всей процедуры автоматизированного проектирования.

Доказательство.

Имеем:

$$u(q, k) = (1 - q)^k [(1 - q)^k + (1 + q^k) - 2]. \quad (22)$$

Докажем, что

$$(1 - q)^k + (1 + q)^k - 2 > 0.$$

Используя формулу бинома Ньютона, находим, что

$$(1 - q)^k + (1 + q)^k - 2 = k(k - 1)q^2 + \dots > 0, \quad (23)$$

что и требовалось установить.

Принимая во внимание (22), (23) окончательно получаем, что

$$u(q, k) \equiv u_1(q, k) - u_2(q, k) = (1 - q)^k [(1 - q)^k + (1 + q)^k - 2] > 0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что неравенство

$$u_1(q, k) > u_2(q, k)$$

показывает, что первый из способов компьютерного моделирования процесса выбора максимального варианта проектируемой сложной технической системы всегда оказывается более надежным по сравнению со вторым способом. Заметим также, что прямым следствием теоремы 6 является следующее предложение.

Утверждение 2. Величина $u(q, k) \equiv u_1(q, k) - u_2(q, k)$ при малых значениях q удовлетворяет приближенному соотношению

$$u(q, k) \approx O(q^2).$$

Доказательство.

В самом деле, ввиду (22), (23) будем иметь:

$$u(q, k) = (1 - q)^k [(1 - q)^k + (1 + q)^k - 2] = (1 - q)^k [k(k - 1)q^2 + O(q^3)],$$

откуда окончательно находим, что при малых положительных значениях параметра q

$$u(q, k) \approx O(q^2),$$

что и требовать установить.

Утверждение 2 полностью доказано.

2. Оценка величины дохода от параллельной компьютерной разработки вариантов технических проектов

В данном разделе мы определим доход фирмы — разработчика проекта сложной технической системы от параллельного компьютерного моделирования и внедрения нескольких равноприбыльных вариантов проекта. Напомним (см., например, [17, 23, 27]), что при параллельной разработке m равноприбыльных вариантов с одинаковой вероятностью успешности внедрения нижняя оценка дохода V_m фирмы удовлетворяет соотношениям

$$V_m = V(m, e, p) \geq W(1 - (1 - p(e))^m) - me,$$

где W — прибыль фирмы от обладания и внедрения варианта технического проекта; e — затраты фирмы на реализацию проектной разработки; $p(e)$ — вероятность успешной реализации варианта проекта при затратах e ; $1 - (1 - p(e))^m$ — вероятность того, что хотя бы один из вариантов проекта окажется успешным; me — общие затраты фирмы на реализацию вариантов проекта.

Верхняя оценка величины V_m удовлетворяет следующему неравенству [27]:

$$V_m \leq W \max_{1 \leq k \leq m} C_m^k k p^k (1 - p)^{m-k} - me,$$

где C_m^k — число сочетаний из m вариантов по k . Пусть s — число параллельных вариантов, допустимых при традиционной разработке без компьютерного моделирования (отметим, что число s , как правило, невелико — $1 \leq s \leq 5$). Предположим дополнительно, что число s удовлетворяет соотношению

$$(s-1)(W_p - e)W^{-1} > \max_{2 \leq k \leq s} C_s^k p^2 (1 - p^{s-1})(1 - p)^{-1}, \quad (24)$$

где C_s^k — число сочетаний из s вариантов по k (в дальнейшем мы считаем, что $s \geq 2$).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. При соблюдении условия (24) имеет место соотношение:

$$V_s = V(s, p, e) > V(1, p, e) = V_1,$$

где V_1 — доход от традиционной разработки фирмой одного варианта проекта сложной технической системы.

Доказательство.

Принимая во внимание неравенство (24), находим, что

$$\begin{aligned} V(s, p, e) - V(1, p, e) &\geq W(1 - (1 - p)^s) - se - (Wp - e) = \\ &= (s-1)(Wp - e) - W((1 - p)^s - 1 + se). \end{aligned}$$

Обозначим

$$T_s \equiv (1-p)^s - (1-ps). \quad (25)$$

Оценим величину T_s :

$$T_s \leq C_s^2 p^2 + \dots + p^s \leq \max_{2 \leq k \leq s} C_s^k p^2 (1 + \dots + p^{s-2}) = \max_{2 \leq k \leq s} C_s^k p^2 (1 - p^{s-1})(1-p)^{-1}. \quad (26)$$

В силу (24)–(26) окончательно имеем

$$V_s = V(s, p, e) > V(1, p, e) = V_1,$$

что и требовалось установить.

Теорема 7 полностью доказана.

Теорема 7 показывает, что при соблюдении условия (24) можно получить доход от параллельной традиционной разработки s ($s \leq 5$) вариантов, больший чем от традиционной разработки одного варианта проекта сложной технической системы. Отметим, что полученный нами результат подтверждает известные выводы португальского экономиста Барроса из [34] о доходах от параллельной разработки нескольких вариантов проектов технической системы не только в случае наличия барьеров для доступа фирмы на конкурентный рынок, но и для случая свободного доступа при малых значениях вероятности успеха внедрения проектов. Заметим, что с увеличением затрат e или, что то же самое, с уменьшением прибыльности вариантов, выполнение указанного условия (24) даже при небольшом числе вариантов $s \leq 5$ затрудняется. В этом случае существенную помощь может оказать предварительное эффективное компьютерное моделирование процессов разработки и внедрения вариантов проектов сложных технических систем, позволяющее исследовать значительно большее число вариантов.

В дальнейшем мы будем предполагать, что фирма-разработчик технического проекта располагает системой компьютерного моделирования процессов создания и внедрения проектов S_0 . Допустим также, что система S_0 удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. Система S_0 допускает параллельную разработку m ($m \gg s$) вариантов при ограничениях:

$$1 - (1-p)^m \geq C_s(p); \quad E_m < se,$$

где

$$C_s(p) \equiv \max_{1 \leq k \leq s} C_s^k k p^k (1-p)^{s-k} < 1; \quad (27)$$

E_m — величина затрат на параллельную проработку m вариантов проекта с помощью компьютерной системы S_0 .

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.

1. Допустим, что величины s, p связаны соотношением (27). Предположим, что система S_0 удовлетворяет условию 1, тогда

$$V(S_0, m) > V_s,$$

где $V(S_0, m)$ — чистый доход фирмы от параллельной разработки с помощью системы S_0 m вариантов.

2. Пусть величина $s = 1$, тогда для выполнения неравенства

$$V(S_0, m) > V_1$$

достаточно, чтобы затраты E_m удовлетворяли соотношению

$$E_m \leq e. \quad (28)$$

3. Допустим, что величины p, m, E_m, e удовлетворяют соотношениям:

$$а) \quad 1 - (1 - p)^m \geq ap, \text{ где } a = \text{const}, 1 < a < m;$$

$$б) \quad R_m \leq ce < e_{\max}, c = \text{const}, 0 < c \leq a, \quad e_{\max} \text{ — максимально допустимые затраты на разработку.}$$

Тогда для величин $V(S_0, m)$, V_1 справедливо неравенство

$$V(S_0, m) \geq aV_1.$$

Доказательство.

Утверждение пункта 1 теоремы 8 установлено в работе [27]. Докажем вначале утверждение пункта 2. Учитывая (28), находим, что

$$\begin{aligned} V(S_0, m) - V_1 &\geq W(1 - (1 - p)^m) - E_m - Wp + e = \\ &= W((1 - (1 - p)^m) - p) + e - E_m > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Установим теперь справедливость утверждения пункта 3. Используя условия а), б), будем иметь:

$$V(S_0, m) - aV_1 = W((1 - (1 - p)^m) - ap) + ae - E_m \geq ae - E_m \geq (a - c)e \geq 0,$$

что и требовалось показать.

Теорема 8 полностью доказана.

Отметим, что утверждения пунктов 1–3 теоремы 8 дают достаточные условия эффективного применения системы компьютерного моделирования процессов разработки и внедрения вариантов проектов сложной технической системы. Заметим также, что ввиду результатов теорем 2, 6 при $a > m$ справедливость соотношения $V(S_0, m) \geq aV_1$ для величин доходов $V(S_0, m)$, V_1 может нарушаться при всяком p , $0 < p < 1$.

Рассмотрим теперь подробно случай $s = 2$. В данной ситуации выполнение для компьютерной системы S_0 условия (27) равносильно справедливости следующей системы неравенств:

$$C_2(p) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} p(1-p) < \frac{1}{2}; \\ p^2 < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (29)$$

Рассмотрим вначале полином $R_2(p) \equiv p(1-p)$. Для $R_2(p)$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$R_2(p) \equiv p(1-p) \leq \frac{p^2 + (1-p)^2}{2} = \frac{1}{2} - p(1-p). \quad (30)$$

Из (30) находим, что

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4} \text{ для любого } p \in [0, 1]. \quad (31)$$

(Заметим, что равенство (31) достигается тогда и только тогда, когда величина p равна $\frac{1}{2}$: $p = \frac{1}{2}$).

Принимая во внимание (31), получаем, что при $s = 2$ система неравенств (29) эквивалентна неравенству $p^2 < \frac{1}{2}$:

$$C_2(p) < 1 \Leftrightarrow p^2 < \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Учитывая (32), окончательно заключаем, что при $s = 2$

$$C_2(p) < 1 \Leftrightarrow p \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Рассмотрим вначале ситуацию, когда $p = p' = \frac{1}{2}$, где p — вероятность успеха внедрения одного варианта при традиционном процессе разработки и внедрения двух вариантов проекта; p' — вероятность успеха внедрения одного варианта проекта с помощью компьютерной системы S_0 . Найдем нижнюю границу величины m , необходимой для успешности многомодельного процесса разработки с помощью S_0 числа вариантов проектируемой технической системы. Имеем:

$$\begin{aligned} 2p(1-p) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}; \\ 2p^2 &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая (33), находим, что

$$C_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Принимая во внимание (34), получаем, что при $p = p' = \frac{1}{2}$

$$V(S_0, m, p') > V_2 p \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 2. \quad (35)$$

Предположим далее, что $p = \frac{1}{2}$, $p' = \frac{1}{4}$ (в этом случае мы считаем, что $p' \neq p$, $p' < p$). Оценим в этой ситуации величину m . Имеем:

$$C_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ (см. соотношение (34)).}$$

В рассматриваемом нами случае $p = 2p' = \frac{1}{2}$:

$$V(S_0, m, p') > V_2(p) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^m > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^m < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 3. \quad (36)$$

(Действительно, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, откуда получаем, что

$\left(\frac{3}{4}\right)^m < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 3$, что и требовалось показать).

Рассмотрим теперь случай, когда $p = \frac{1}{4}$, $p' = \frac{1}{8}$. В этой ситуации мы имеем:

$$2p(1-p) = \frac{3}{8}; \quad 2p^2 = \frac{1}{8}. \quad (37)$$

Из (37) находим, что

$$C_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}. \quad (38)$$

Используя (38), получаем, что

$$V(S_0, m) > V_2 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^m > \frac{3}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^m < \frac{5}{8} \Leftrightarrow m \geq 4. \quad (39)$$

В самом деле, $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{512} > \frac{5}{8}$; $\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096} < \frac{5}{8}$, откуда находим, что $\left(\frac{7}{8}\right)^m < \frac{5}{8} \Leftrightarrow m \geq 4$, что и требовалось показать.

Предположим, наконец, что $p = \frac{1}{2}$, $p' = \frac{1}{8}$. Оценим в этом случае величину m . Принимая во внимание (35), имеем

$$C_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Используя (40), находим, что при $p = \frac{1}{2}$, $p' = \frac{1}{8}$:

$$V(S_0, m, p') > V_2 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^m > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 6. \quad (41)$$

(Действительно, $\left(\frac{7}{8}\right)^5 = \frac{16807}{32768} > \frac{1}{2}$, $\left(\frac{7}{8}\right)^6 = \frac{117649}{261144} < \frac{1}{2}$, откуда получаем, что $\left(\frac{7}{8}\right)^m < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 6$, что и требовалось показать).

Принимая во внимание (35), (36), (39), (41), заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Предположим, что в условиях теоремы 7 величина $s = 2$, тогда:*

$$1. \text{ При } p = p' = \frac{1}{2}$$

$$V(S_0, m, p') > V_2(p) \Leftrightarrow m \geq 2.$$

$$2. \text{ При } p = \frac{1}{2}; p' = \frac{1}{4}$$

$$V(S_0, m, p') > V_2(p) \Leftrightarrow m \geq 3.$$

$$3. \text{ При } p = \frac{1}{4}; p' = \frac{1}{8}$$

$$V(S_0, m, p') > V_2(p) \Leftrightarrow m \geq 4.$$

$$4. \text{ При } p = \frac{1}{2}; p' = \frac{1}{8}$$

$$V(S_0, m, p') > V_2(p) \Leftrightarrow m \geq 6.$$

Отметим, что утверждения пунктов 1–4 теоремы 9 дают нижнюю оценку числа вариантов, необходимых для успешности многомодельного компьютерного режима процесса разработки и внедрения с помощью системы S_0 проекта сложной технической системы при различных значениях вероятностей p, p' .

Заметим, однако, что при $s \geq 3$ оценка величины вероятности p , удовлетворяющей условию 1, может оказаться затруднительной, так как в

этой ситуации для ее вычисления необходимо решить систему из s неравенств степени s относительно переменной p .

В данном случае величину $C_s(p)$ в условии 1 можно заменить большей величиной $R_s(p) \equiv s(1 - (1 - p)^s)$ и с ее помощью получить требуемую оценку величины p . Действительно для $R_s(p)$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 10. Для полинома $R_s(p)$ справедливы предложения:

1. При любых $s \geq 2$, $0 < p < 1$

$$C_s(p) < R_s(p).$$

2. Решение неравенства $R_s(p) < 1$ задается соотношениями

$$0 < p < 1 - (1 - s^{-1})^{s-1}.$$

Доказательство.

1. Напомним (см., например, [27, 35–37]), что $R_s(p)s^{-1} \equiv 1 - (1 - p)^s$ является вероятностью события (в биномиальной схеме распределения вероятностей успеха процесса разработки вариантов проекта), при котором хотя бы один из s внедряемых вариантов будет реализован успешно. Величина $C_s^k p^k (1 - p)^{s-k}$ является вероятностью того, что ровно k из s разрабатываемых вариантов проекта сложной технической системы окажутся успешными. Поэтому, для любого натурального числа $k \leq s$ мы имеем:

$$C_s^k p^k (1 - p)^{s-k} < 1 - (1 - p)^s. \quad (42)$$

Учитывая (42), находим, что

$$k C_s^k p^k (1 - p)^{s-k} < s(1 - (1 - p)^s) \equiv R_s(p) \quad (1 \leq k \leq s). \quad (43)$$

Используя соотношения (43), окончательно получаем, что

$$C_p(s) \equiv \max_{1 \leq k \leq s} k C_s^k p^k (1 - p)^{s-k} < R_s(p) \quad (1 \leq k \leq s),$$

что и требовалось доказать.

2. Для полинома $R_s(p)$ имеем следующую цепочку соотношений:

$$R_s(p) < 1 \Leftrightarrow 1 - (1-p)^s < s^{-1} \Leftrightarrow (1-p)^s > 1 - s^{-1} \Leftrightarrow p < 1 - (1 - s^{-1})^{s^{-1}}. \quad (44)$$

Принимая во внимание, что величина p удовлетворяет неравенству $0 < p < 1$, из (44) окончательно находим, что

$$R_s(p) < 1 \Leftrightarrow 0 < p < 1 - (1 - s^{-1})^{s^{-1}},$$

что и требовалось установить.

Теорема 10 полностью доказана.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены вопросы предпроектного моделирования задач разработки и внедрения проектов сложных технических систем с помощью многомодельных компьютерных комплексов последовательного анализа и отбраковки альтернативных вариантов. Установлены достаточные условия эффективного применения многомодельного автоматизированного режима решения указанных задач.

Литература

1. Дворянkin А. М., Половинкин А. И., Соболев А. Н. Методы синтеза технических решений. М.: Наука, 1977.
2. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. М.: Высшая школа, 1980.
3. Михалевич В. С. Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982.
4. Терзян А. А. Автоматизированное проектирование электрических машин. М.: Энергоатомиздат, 1983.
5. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1982.
6. Леймит П. Макетное проектирование. М.: Мир, 1984.
7. Джонс Дж. Методы проектирования. М.: Мир, 1986.
8. Краснощеков П. С. Математика и проектирование // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1979. № 4. С. 32–37.
9. Краснощеков П. С., Петров А. А., Федоров В. В. Информатика и проектирование. М.: Знание, 1986.
10. Краснощеков П. С. Математические модели в исследовании операций. М.: Знание, 1984.

11. Лебедев А. Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989.
12. Бабушкин А. И. Моделирование и оптимизация сборки летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1990.
13. Подчуфаров Ю. Б. Физико-математическое моделирование систем управления и комплексов. М.: Физматлит, 2002.
14. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. М.: Высшая школа, 2007.
15. Вязгин В. А., Федоров В. В. Математические методы автоматизированного проектирования. М.: Высшая школа, 1989.
16. Капустин Н. М., Дьяконова Н. П., Кузнецов П. М. Автоматизация машиностроения. М.: Высшая школа, 2003.
17. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять проектами. М.: СИНТЕГ, 1997.
18. Смирнов А. В., Юсупов Р. М. Технология параллельного проектирования: основные принципы и проблемы внедрения // Автоматизация проектирования. 1997. № 2. С. 50–55.
19. Трахтенгерц Э. А. Последовательно-параллельное автоматизированное проектирование сложных технических объектов // Автоматика и телемеханика. 1993. № 2. С. 172–189.
20. Краснощёков П. С., Савин Г. И., Федоров В. В., Флеров Ю. А. Автоматизация проектирования сложных объектов машиностроения // Автоматизация проектирования. 1996. № 1. С. 3–12.
21. Краснощёков П. С., Федоров В. В., Флеров Ю. А. Элементы математической теории принятия проектных решений // Автоматизация проектирования. 1997. № 1. С. 15–23.
22. Краснощёков П. С., Федоров В. В., Флеров Ю. А. Информационные технологии и автоматизация проектирования сложных технических объектов // Информационные технологии и вычислительные системы. 1995. № 1. С. 5–11.
23. Терехов А. И. Математическое моделирование конкуренции в НИОКР (обзор) // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 1. С. 67–79.
24. Макаров И. М., Ахрем А. А., Рахманкулов В. З. Компьютерное моделирование процессов переноса новых производственных технологий // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2001. Вып. 1. С. 421–424.
25. Ахрем А. А., Рахманкулов В. З. Виртуальное проектирование и принятие решений // Автоматизация проектирования. 1997. № 4. С. 20–30.
26. Макаров И. М., Ахрем А. А., Рахманкулов В. З. Динамика процессов принятия комплексных проектных решений // Системные исследования. Методологические проблемы. М.: URSS, 2000. Вып. 28. С. 181–191.
27. Ахрем А. А. Вероятностные модели инновационных процессов // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2003. Вып. 3. С. 245–252.
28. Ковалев В. В. Методы оценки инвестиционных проектов. М.: Финансы и статистика, 1998.
29. Чернов В. А. Анализ коммерческого риска. М.: Финансы и статистика, 1998.
30. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 1.

31. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
32. *Гладкий В. С.* Вероятностные вычислительные модели. М.: Наука, 1973.
33. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984.
34. *Barros P. P.* Multi-Project R. and D. Competition with Free-Entry // *Econ.Innov. New Tech.* 1993. Vol. 2. P. 309–317.
35. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
36. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
37. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Анализ данных на компьютере. М.: Инфра-М, 2003.