

Об основных понятиях математической теории решетчатых множеств *

И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов

*Институт системного анализа Российской академии наук,
Россия, 117312 Москва, пр. 60-летия Октября, 9*

В статье рассмотрены основные понятия математической теории решеток. Исследованы различные алгебраические свойства этих понятий. Приведены примеры применения таких понятий при исследовании конкретных решетчатых множеств.

Введение

В настоящее время основное внимание в науке и технике уделяется моделированию, анализу и синтезу информационных систем. Определяющими в таких системах являются информационно-логические, принципиально дискретные процессы решения разнообразных задач. Для этих процессов не существенны место и время их решения. Они также мало зависят от преобразования энергии и вещества. Тем самым информационные системы не являются динамическими системами в традиционном смысле. Эти системы можно разбить на два основных класса. К первому классу относятся кибернетические системы, т. е. разнообразные автоматы. Автоматы обрабатывают входные сигналы (входное слово) и вырабатывают выходные сигналы (выходное слово). Те выходные слова, которые автомат не обрабатывает, называются нештатными ситуациями. Таким образом, кибернетические системы решают только штатные (известные им) задачи и не решают неизвестные. Второй класс образуют интеллектуальные системы. Такие системы нацелены на решение не только своих штатных задач, но и некоторых нештатных. Примерами интеллектуальных систем являют-

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (проект № 2.44) и РФФИ (проект № 07-01-00572).

ся автоматизированные системы с преобладанием технического фактора (пилотируемый космический корабль, самолет, автомобиль, подводная лодка, надводный корабль, поезд, гидроэлектростанция, система управления производством и т. п.), а также автоматические системы с интеллектуальными свойствами, в которых предполагается отсутствие человека (беспилотный космический аппарат, беспилотный самолет-разведчик, навигационная спутниковая группировка и т. п.).

Классической высшей математики, базирующейся на методах дифференциального и интегрального исчисления, недостаточно для моделирования кибернетических и интеллектуальных систем. Для описания таких систем появилась и бурно развивается новая область математики, которую называют информатикой (или дискретной математикой). Информатика ориентирована на описание и исследование информационных систем, функционирующих в языковой (информационной) среде. Напомним, что классическая высшая математика нацелена в первую очередь на моделирование, анализ и синтез физических систем, функционирующих в пространственно-временной (материальной) среде. Различие сред приводит к необходимости развивать различные принципы моделирования. Для пространственно-временной среды характерны принципы непрерывной математики, приводящие к дифференциальному и интегральному исчислению. Языковая среда имеет информационную (идеальную) природу. Одна и та же языковая среда может быть реализована звуковыми, световыми, атомарными, молекулярными, химическими, биологическими и другими символами. Тем самым языковая среда не имеет ни физическую, ни химическую, ни какую-либо другую материальную природу. Для нее характерны алгебраические, а также топологические методы построения и анализа [1–7]. Отметим, что особое внимание в теоретической информатике уделяется алгебраическим методам исследования данных (понятий). Это вызвано тем, что данные об изучаемом объекте выражаются, как правило, элементами решеток (булевых алгебр) множеств понятий, и, значит, они могут быть представлены формулами через образующие элементы таких решеток [1–3, 6].

В настоящей работе исследуются основные алгебраические свойства решеток множеств. Приводятся примеры применения этих свойств для анализа и построения конкретных решетчатых множеств понятий.

1. Решетки подмножеств

Предположим, что на некотором множестве элементов X задано бинарное соотношение порядка R . Напомним (см., например, [1–4]), что элемент z называется верхней границей элементов $x, y \in X$, если zRx и

zRy . Пусть Z — множество всех верхних границ для элементов x, y . Очевидно, $Z \subseteq X$ и на Z распространяется тот же порядок R , что и на X . Предположим, что существует единственный наименьший элемент v во множестве Z .

Определение 1. Элемент v называется супремумом $\sup\{x, y\}$:

$$v \equiv \sup\{x, y\}.$$

Для элемента v выполнено следующее соотношение:

$$wRx, wRy, w \in Z \Rightarrow wRv.$$

Аналогично определяется $\inf\{x, y\} = u$.

Решеткой называется упорядоченное множество X такое, что для любой пары его элементов x, y существуют $\sup\{x, y\}$ и $\inf\{x, y\}$.

В дальнейшем, следуя [1–4], будем обозначать:

$$v \equiv \sup\{x, y\} \equiv x \vee y; \quad \inf\{x, y\} \equiv x \wedge y.$$

Итак, в любой решетке X всегда существуют две бинарные алгебраические операции $\vee, \wedge$, которые называются дизъюнкцией и конъюнкцией.

Справедливо следующее утверждение [1–4].

Теорема 1. Операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ являются бинарными, ассоциативными, коммутативными и алгебраическими операциями.

Определение 2. Решетка X называется дистрибутивной, если для всяких элементов x, y, z множества X справедливы соотношения

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Определение 3. Решетка X называется решеткой с дополнением, если существуют такие элементы $0, 1, \bar{x} \in X$, что для любого элемента x решетки X выполняются соотношения

$$0 \leq x \leq 1; \quad x \wedge \bar{x} = 0; \quad x \vee \bar{x} = 1.$$

Для дистрибутивных решеток с дополнением X имеют место следующие утверждения [4–6].

Теорема 2. Если X — дистрибутивная решетка с дополнением, то дополнение к каждому элементу $x \in X$ единственно.

Теорема 3. Дистрибутивная решетка с дополнением является булевой алгеброй с тремя операциями $\vee, \wedge, -$.

Напомним (см., например, [4, 7–9]), что дистрибутивная решетка с дополнением называется булевой.

В дальнейшем мы будем рассматривать булевы решетки подмножеств некоторого опорного множества элементов X .

Определение 4. Семейство A подмножеств опорного множества X называется решеткой подмножеств для X , если справедливы следующие соотношения:

- 1) $X \in L, \emptyset \in L$, где $\emptyset$ — пустое подмножество;
- 2) из $a_1, a_2 \in A$ следует $a_1 \cap a_2 \in L$;
- 3) из $a_1, a_2 \in A$ следует $a_1 \cup a_2 \in L$;
- 4) из $a_1, a_2 \in A$ следует $a_1 \setminus a_2 \in L$,

где $\cup, \cap, \setminus$ — соответственно знаки пересечения, объединения, разности множеств $a_1, a_2 \in A$.

Отметим, что решетка подмножеств — это булева решетка подмножеств с нулем (пустым множеством) $\emptyset$, единицей X и с операцией дополнения $\bar{a} = X \setminus a \in L$ для любого $a \in A$. При этом справедливо следующее равенство:

$$a_1 \setminus a_2 = a_1 \cap \bar{a}_2.$$

Отношением порядка в решетке подмножеств A является отношение включения $a_1 \subseteq a_2$; $a_1, a_2 \in A$. При этом выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sup\{a_1, a_2\} &= a_1 \cup a_2 = a_1 \vee a_2; \\ \inf\{a_1, a_2\} &= a_1 \cap a_2 = a_1 \wedge a_2.\end{aligned}$$

Определение 5. Элементы $a_1, a_2 \in A$ называются дизъюнктивными, если их пересечение является пустым множеством:

$$a_1 \cap a_2 = \emptyset.$$

Заметим, что для одного опорного множества X можно ввести различные решетки подмножеств. Среди решеток укажем минимальную A' ,

состоящую из двух подмножеств $\emptyset, X$, и максимальную A'' , состоящую из всех возможных подмножеств опорного множества X :

$$A'' = 2^X.$$

Определение 6 [2, 3, 7]. Пусть A — решетка подмножеств X . элемент $a \in A$ называется атомом решетки, если $a \neq \emptyset$ и не существует элемента $b \neq a$, $b \neq \emptyset$, для которого выполнены включения

$$\emptyset \subset b \subset a.$$

Отметим, что атомы являются самыми конкретными понятиями данной решетки A . Алгоритм проверки на атомарность — отсутствие более конкретных непустых элементов решетки понятий.

Приведем теперь пример использования понятия атомарного подмножества решетки множеств. Предположим, что множество X является множеством всех научных сотрудников института РАН. Для любого множества рассмотрим три решетки подмножеств:

- A_1 — решетка пола (мужчины или женщины);
- A_2 — решетка научных званий;
- A_3 — решетка научных должностей.

Множества A_1, A_2, A_3 имеют следующую структуру:

$$A_1 = \begin{cases} a_{01} — \emptyset; \\ a_{11} — женщины — научные сотрудники; \\ a_{21} — мужчины — научные сотрудники; \\ a_{31} — все научные сотрудники института. \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} a_{02} — \emptyset; \\ a_{12} — доктора наук; \\ a_{22} — кандидаты наук; \\ a_{32} — без научных званий; \\ a_{42} — имеющие начные степени; \\ a_{52} — не кандидаты наук; \\ a_{62} — не доктора наук; \\ a_{72} — все научные сотрудники. \end{cases}$$

$$A_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_{03} — \emptyset; \\ a_{13} — \text{главные научные сотрудники}; \\ a_{23} — \text{ведущие научные сотрудники}; \\ a_{33} — \text{старшие научные сотрудники}; \\ a_{43} — \text{научные сотрудники}; \\ a_{53} — \text{младшие научные сотрудники}; \\ a_{63} — \text{главные или ведущие научные сотрудники}; \\ a_{73} — \text{главные или старшие научные сотрудники}; \\ a_{83} — \text{главные или научные сотрудники}; \\ a_{93} — \text{главные или младшие научные сотрудники}; \\ a_{103} — \text{ведущие или старшие научные сотрудники}; \\ a_{113} — \text{ведущие или научные сотрудники}; \\ a_{123} — \text{ведущие или младшие научные сотрудники}; \\ a_{133} — \text{старшие или научные сотрудники}; \\ a_{143} — \text{старшие или младшие научные сотрудники}; \\ a_{153} — \text{научные или младшие научные сотрудники}; \\ a_{163} — \text{не младшие научные сотрудники}; \\ a_{173} — \text{не научные сотрудники}; \\ a_{183} — \text{не старшие научные сотрудники}; \\ a_{193} — \text{не ведущие научные сотрудники}; \\ a_{203} — \text{не главные ведущие сотрудники}; \\ a_{213} — \text{все научные сотрудники института.} \end{array} \right.$$

Нетрудно видеть, что атомами этих решеток являются следующие элементы (подмножества):

- в A_1 — элементы a_{11}, a_{21} ;
- в A_2 — элементы a_{12}, a_{22}, a_{32} ;
- в A_3 — элементы $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}, a_{53}$.

2. Шкалы решетчатых множеств

В предыдущем разделе мы показали, что решетки подмножеств обладают структурой булевых алгебр. Поэтому в них можно определить сис-

темы образующих множеств и выражать подмножества решеток формулами через образующие.

Определение 7 [2, 3, 5]. Пусть задана решетка подмножеств A для опорного множества X . Тогда семейство элементов B решетки A называется шкалой решетки, если любой элемент решетки выражается через элементы шкалы B с помощью операций пересечения, объединения и разности множеств ($\cup, \cap, \setminus$).

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ — шкала A . Тогда в силу определения 1 для любого $a \in A$ выполнено соотношение

$$a = f(b_1, \dots, b_k),$$

где f — функция алгебры множеств, использующая операции объединения, пересечения, дополнения (разности).

Определение 8 [2, 3]. Шкала B решетки A называется базовой, если ни один из элементов B не выражается через другие элементы B с помощью операций объединения, пересечения и разности.

Определение 9 [2, 3]. Шкала называется атомарной, или разбиением опорного множества, или координатной сеткой, если все ее элементы — атомы.

Определение 10 [2, 3]. Базовая шкала в конечной решетке A называется минимальной (максимальной), если в решетке A нет шкалы с меньшим (большим) числом элементов.

Имеют место следующие утверждения [2, 3, 5].

Теорема 4. Для решетки A справедливы следующие предположения:

- Любая решетка имеет хотя бы одну шкалу, например, саму решетку.
- Решетка A подмножеств определяется однозначно любой своей шкалой.
- Пусть A — произвольная решетка для X и $A \neq A_0 \equiv \{\emptyset, X\}$.

Тогда ее атомарная шкала $B(am.) = \{f_1, \dots, f_n\}$ является максимальной шкалой (самой неэкономной). Ее мощность $CardB(am.)$ равна n :

$$CardB(am.) = n.$$

Теорема 5. Пусть A — конечная решетка для опорного множества элементов X ; $A \neq A_0$. Тогда существует минимальная шкала $B(\min) = \{b_1, \dots, b_k\}$ и число ее элементов k удовлетворяет соотношению

$$k = \text{Card}B(\min) = [\log_2 \text{Card}B(am.)] + 1,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Число элементов решетки A :

$$\text{Card}A = 2^{2^{k-1}}.$$

Следуя [23], рассмотрим пример нахождения минимальной шкалы $B(am.)$ опорного множества элементов X . Пусть X — времена событий, происходящих в определенные дни недели. Пусть, далее, $B(am.) = \{\text{пн, вт, ср, чт, пт, сб, вс}\}$. Тогда число элементов соответствующей решетки подмножеств A :

$$\text{Card}A = 2^7 = 512.$$

Найдем $B(\min)$ для решетки A . Число $k \equiv \text{Card}B(\min)$ равно:

$$k = [\log_2 7] + 1 = 3. \quad (1)$$

Минимальная шкала $B(\min)$ ввиду (1) имеет следующий вид:

$$B(\min) = \{b_1, b_2, b_3\}. \quad (2)$$

Построим минимальную шкалу (2) следующим образом.

Представим элементы атомарной шкалы $B(am.)$ в виде двоичных чисел:

$$\text{пн} \equiv 001; \text{вт} \equiv 010; \text{ср} \equiv 011; \text{чт} \equiv 100; \text{пт} \equiv 101; \text{сб} \equiv 110; \text{вс} \equiv 111.$$

Положим

$$b_1 \equiv \{\text{пн} \cup \text{ср} \cup \text{пт} \cup \text{вс}\}$$

(b_1 — объединение тех элементов, у которых в первом разряде стоит 1);

$$b_2 \equiv \{\text{вт} \cup \text{ср} \cup \text{пт} \cup \text{вс}\}$$

(b_2 — это объединение тех атомов, у которых во втором разряде находится 1);

$$b_3 \equiv \{\text{чт} \cup \text{пт} \cup \text{сб} \cup \text{вс}\}$$

(b_3 — объединение тех элементов, у которых в третьем разряде стоит 1).

Теперь все элементы выражаются через элементы минимальной шкалы следующим образом:

$$\text{пн} = 001 = \bar{b}_3 \cap \bar{b}_2 \cap b_1;$$

$$\text{вт} = 010 = \bar{b}_3 \cap b_2 \cap \bar{b}_1;$$

$$\text{ср} = 011 = \bar{b}_3 \cap b_2 \cap b_1.$$

и т. д.

В заключение отметим, что всякая решетка A подмножеств некоторого опорного множества элементов X обладает следующими важными свойствами:

- решетка A — частично упорядоченное множество с отношением включения множеств;
- решетка A — булева алгебра подмножеств с тремя операциями: две бинарные операции (объединение и пересечение множеств) и одна унарная операция (дополнение), для которых выполняются все аксиомы булевой алгебры.

Заключение

Таким образом, в статье рассмотрены основные понятия математической теории решеток: дистрибутивная решетка, булева решетка множеств, атомы решеток, шкалы решетчатых множеств и др. Изучены основные алгебраические свойства этих понятий. Представлены примеры применения данных понятий для исследования структуры конкретных решетчатых множеств.

Литература

1. Горбатов В. А., Горбатов А. В., Горбатова М. В. Дискретная математика. М.: Апрель, 2006.
2. Чечкин А. В. Математическая информатика. М.: Наука, 1991.
3. Чечкин А. В., Соболева Т. С. Дискретная математика. М.: Академия, 2006.
4. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1982.
5. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
6. Салий В. Н. Решетки с единственными дополнениями. М.: Наука, 1983.
7. Кук Д. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990.
8. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
9. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.