

Об опыте использования символьных вычислений для исследования системы Лоренца*

А. Н. Пчелинцев

Тамбовский государственный технический университет

В статье проверяется гипотеза существования всюду плотного множества седловых циклов в системе Лоренца для классических значений ее параметров, используя символьные вычисления.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (1)$$

где σ , r и b — некоторые положительные числа, параметры системы (см. [1]).

В работе [2] доказано, что при классических значениях этих констант (т. е. при $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$, указанных в работе [1, с. 103]) в системе (1) существует притягивающее множество A — аттрактор Лоренца, к которому стремятся все траектории системы (1) при $t \rightarrow \infty$. Дивергенция векторного поля, задаваемого правой частью системы (1), постоянна и отрицательна (см. [1, с. 101]). Поэтому множество A имеет нулевую меру. Более того, считалось (см. [3, с. 470]), что множеству A принадлежит счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом и всюду плотное множество устойчивых по Пуассону траекторий. В системе (1) есть седло $O(0, 0, 0)$, принадлежащее A вместе со своими двумя сепаратрисами, возвращающимися в него. Помимо этого предполагалось (см., например, [4, с. 147, 148]),

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07–07–00170).

что в A имеет место экспоненциальное разбегание траекторий. Однако это (насколько нам известно) строго не доказано, и многие исследования основывались на численных экспериментах.

Цель данной работы — проверить гипотезу существования всюду плотного множества седловых циклов в системе Лоренца для классических значений ее параметров, используя символьные вычисления. При этом попытаемся уменьшить ошибку вычислений за счет используемого метода отыскания решений системы Лоренца.

1. Описание метода и алгоритма отыскания решений

Будем отыскивать решения системы (1) в виде рядов

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (t - t_0)^i, \\y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (t - t_0)^i, \\z(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (t - t_0)^i,\end{aligned}\tag{2}$$

причем коэффициенты α_0 , β_0 и γ_0 определяются по начальным условиям, т. е.

$$\alpha_0 = x_0, \quad \beta_0 = y_0, \quad \gamma_0 = z_0,$$

где x_0 , y_0 и z_0 — задаются, а число t_0 можно выбрать произвольно в силу автономности системы (1).

Применяя процедуру символьного дифференцирования, описанную в работах [6, 7], для расчета коэффициентов степенных рядов, можно отыскать решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной точностью в распределенной вычислительной среде. Однако ввиду того что система (1) имеет полиномиальную правую часть, попытаемся получить формулы для расчета коэффициентов рядов (1), чтобы сократить объем символьных вычислений. Для этого сначала продифференцируем (2):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \alpha_{i+1} (t - t_0)^i, \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \beta_{i+1} (t - t_0)^i, \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \gamma_{i+1} (t - t_0)^i.\end{aligned}$$

Далее найдем произведения степенных рядов в форме Коши:

$$xz = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j} (t - t_0)^i,$$

$$xy = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} (t - t_0)^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из системы (1) получаем рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов рядов (2):

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma (\beta_i - \alpha_i)}{i + 1},$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r\alpha_i - \beta_i - \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j}}{i + 1}, \quad (3)$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} - b\gamma_i}{i + 1}.$$

Несмотря на то, что система (1) диссипативна и ее правая часть всюду аналитична, радиус Δ сходимости рядов (2) ограничен. Численный эксперимент показал, что $\Delta = 0,01$ для $r \in [14, 350]$, $\sigma = 10$ и $b = 8/3$. Поэтому описанным методом мы можем получить только часть траектории.

Чтобы построить дугу L траектории системы Лоренца на отрезке времени $[0, T]$, где T — задается, рассмотрим множество точек τ_k , причем

$$\tau_k = k\Delta, \quad k = \overline{0, q}, \quad q = \text{round} \frac{T}{\Delta},$$

где

$$\text{round } a = \begin{cases} a, & \text{если } a \text{ — целое,} \\ [a] + 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

делящих отрезок $[0, T]$ на отрезки $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ ($m = \overline{1, q}$) сходимости рядов (2). Для первого отрезка времени (при $m = 1$) мы задаем начальное условие x_0 , y_0 и z_0 для момента времени $t_0 = \tau_0$. По формулам (3) вычисляем α_i , β_i и γ_i до такого значения i , при котором имеет место оценка для заданной точности ε_c вычислений:

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2} \Delta^i < \varepsilon_c.$$

Обозначим полученные полиномы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для $m = 1$ через $x_1(t)$, $y_1(t)$ и $z_1(t)$ соответственно. Далее переходим к аналогичному расчету коэффициентов полиномов $x_2(t)$, $y_2(t)$ и $z_2(t)$, принимая

$$x_0 = x_1(\tau_1), \quad y_0 = y_1(\tau_1), \quad z_0 = z_1(\tau_1).$$

В общем случае для m -го отрезка времени имеем условия

$$t_0 = \tau_{m-1}, \quad x_0 = x_{m-1}(\tau_{m-1}), \quad y_0 = y_{m-1}(\tau_{m-1}), \quad z_0 = z_{m-1}(\tau_{m-1}),$$

определяющие функции $x_m(t)$, $y_m(t)$ и $z_m(t)$.

Обозначим через $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ функции, описывающие дугу L и составленные из функций $x_m(t)$, $y_m(t)$ и $z_m(t)$ соответственно.

Графическое представление дуги L будем осуществлять в проекции на плоскость xOy . Для этого удобно использовать пакет символьных вычислений Maxima [8], развернутый в операционной системе Linux.

После того, как произведен расчет коэффициентов полиномов $x_m(t)$ и $y_m(t)$, формируются символьные выражения для этих функций, которые потом записываются в соответствующие массивы строк m -ой строкой. После завершения процедуры формирования символьных выражений для всех частей, из которых последовательно будет составлена результирующая дуга L , формируются символьные выражения для функций $X(t)$ и $Y(t)$, используя оператор `if` пакета Maxima. Все эти действия осуществляются в программе, разработанной на языке C++. Затем программа записывает в текстовый файл полученные выражения для $X(t)$ и $Y(t)$ и вызов функции `plot2d` пакета Maxima для построения кривой, заданной в параметрическом виде. Далее в программе вызывается команда `maxima` с использованием перенаправления ввода данных (как интерфейс взаимодействия с пакетом) для передачи данных пакету из полученного текстового файла.

Заметим, что идея такой реализации символьных вычислений использовалась в работе [7] для осуществления символьного дифференцирования и расчета значений производных.

2. Результаты численных экспериментов

Было проведено исследование поведения многих решений системы (1) для классических значений ее параметров. Вычисления показали, что гипотеза существования всюду плотного множества циклов в системе Лоренца вызывает сомнения. Например, иногда получалось, что для близких значений координат их производные значительно отличались (пример см. на рис. 2).

Из анализа дуги траектории K , проекция которой показана на рис. 1, следует, что она раскручивается по спиралям вокруг двух положений равновесия, описывая в проекции фигуру, похожую на восьмерку. По этой причине будем называть замыкание траектории K *восьмеркой*.

Для рис. 2 значения функций $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ и их производных в момент времени $t = T = 0,73$ равны

$$X(0,73) = 3,917633, \quad Y(0,73) = 6,074461, \quad Z(0,73) = 15,796391, \\ \frac{dX(0,73)}{dt} = 21,568282, \quad \frac{dY(0,73)}{dt} = 41,734795, \quad \frac{dZ(0,73)}{dt} = -18,326204,$$

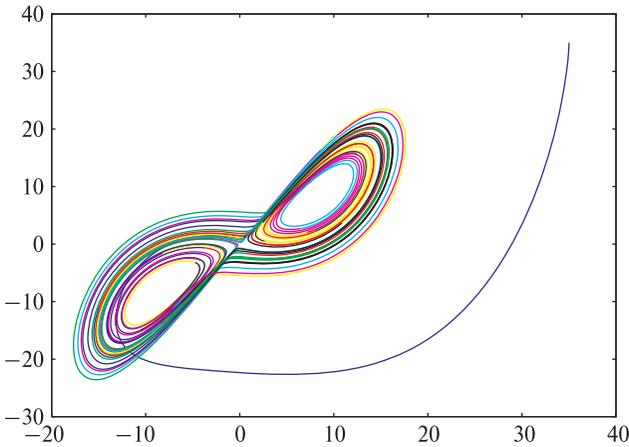


Рис. 1. Проекция на плоскость xOy дуги траектории, построенной на отрезке времени $[0, 40]$ для $x_0 = y_0 = 35$, $z_0 = 30$

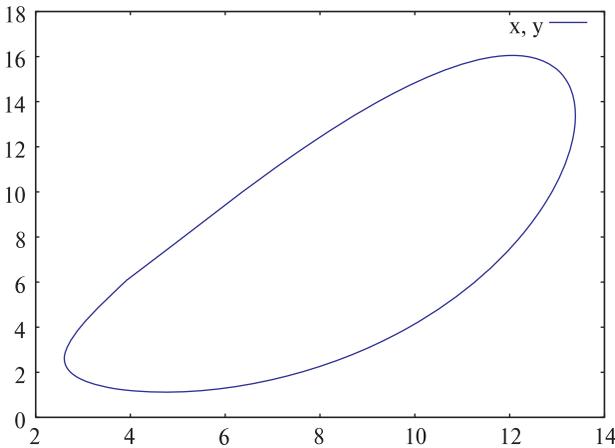


Рис. 2. Проекция на плоскость xOy дуги траектории, построенной на отрезке времени $[0, 0.73]$ для $x_0 = 3,90924409$, $y_0 = 6,06822116$, $z_0 = 18,01475111$

причем в начальный момент времени

$$\frac{dX(0)}{dt} = 21,58977070, \quad \frac{dY(0)}{dt} = 32,96655405, \quad \frac{dZ(0)}{dt} = -24,31717859.$$

Для рис. 1 и 2 $\varepsilon_c = 10^{-15}$ и $\Delta = 0,01$.

Также было проведено исследование того, как изменяется со временем расстояние между двумя близкими начальными точками, выбранных

вблизи аттрактора Лоренца. При этом радиус сходимости рядов (2) можно взять равным $\Delta = 0,1$. Для двух начальных точек

$$x_{01} = -3,9476336649, \quad y_{01} = -4,6667855052, \quad z_{01} = 20,1218864778,$$

$$x_{02} = -3,94763366, \quad y_{02} = -4,66678550, \quad z_{02} = 20,12188647,$$

расстояние между которыми равно $\delta(0) = 10^{-8}$, и точности $\varepsilon_c = 10^{-15}$ был построен график зависимости расстояния $\delta(t)$ между траекториями от времени (см. рис. 3) с использованием пакета символьных вычислений Mathematica в распределенной компьютерной среде.

Например, $\delta(6) = 2 \cdot 10^{-6}$. Для сравнения приведем график функции $\delta(t)$, взятый из работы [4, с. 147] (см. рис. 4).

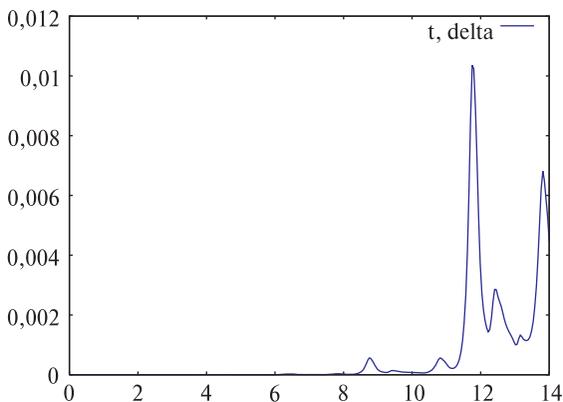


Рис. 3. Эволюция расстояния между двумя траекториями на отрезке времени [0, 14]

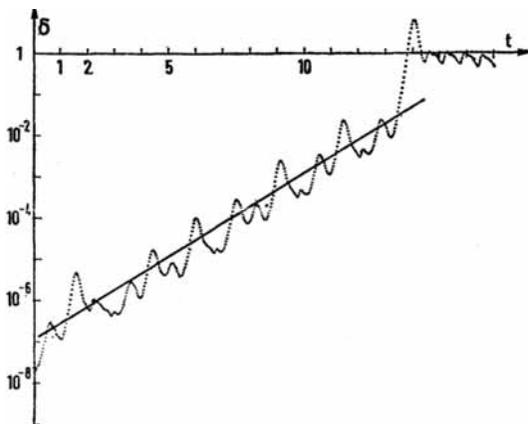


Рис. 4. Эволюция расстояния между двумя траекториями [4, с. 147]

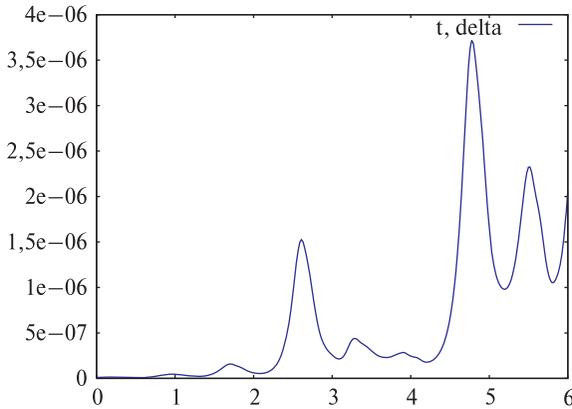


Рис. 5. Эволюция расстояния между двумя траекториями на отрезке времени $[0, 6]$

Поведение функции $\delta(t)$, аналогичное приведенному на рис. 3, наблюдается на и отрезке времени $[0, 6]$ (см. рис. 5). Численный эксперимент показал, что для $t > 14$ траектории то сближаются, то расходятся, подобно тому, как показано на рис. 3 и 5. Таким образом, приведенные графики ставят под сомнение утверждение об экспоненциальном разбегании траекторий.

3. Обобщенно-периодические решения

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = F(\Psi), \quad (4)$$

где $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — векторная функция действительного переменного t , $F = (f_1, \dots, f_n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\partial f_i / \partial \psi_j$ ($i, j = \overline{1, n}$) в некотором открытом подмножестве евклидова векторного пространства \mathbb{R}^n .

Во избежание возможных разночтений приведем следующее определение.

Определение. Пусть решение $\varphi(t)$ системы (4) определено и ограничено для всех $t \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что решение $\varphi(t)$ является *обобщенно-периодическим*, если для каждой пары ε, ω положительных чисел можно указать такое натуральное число N , что при $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + N\omega)| < \varepsilon.$$

Простейшими примерами таких решений могут служить периодическое решение и положение равновесия. Также частным случаем обобщенно-периодического решения является почти периодическое решение (см. [5, с. 162]).

Имеет место (см. [5, с. 156]) следующая теорема.

Теорема. *Каждая траектория, содержащаяся в компактном минимальном множестве, является траекторией, описываемой обобщенно-периодическим решением, и обратно.*

Из теоремы можно вывести следующее.

1. Так как аттрактор Лоренца компактен, то он содержит минимальное компактное множество, размерность которого по теореме Хильми (см. [5, с. 135]) не превышает двух.
2. По теореме Тумаркина (см., например, [5, с. 134]) минимальное множество нигде не плотно на аттракторе.
3. По приведенной теореме каждое минимальное множество аттрактора Лоренца состоит из траекторий, описываемых обобщенно-периодическими решениями системы (1), и нигде не плотно на аттракторе. Как показано в [5, с. 146, 147], все остальные траектории должны асимптотически приближаться к ним, что, скорее всего, влечет отсутствие в аттракторе всюду плотного множества устойчивых по Пуассону траекторий.
4. Как показал численный эксперимент, на восьмерке не наблюдается циклов. Поэтому каждое минимальное множество на аттракторе, видимо, представляет собой либо положение равновесия, либо замыкающие траектории, описываемой обобщенно-периодическим решением, отличным от периодического.

Литература

1. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116.
2. *Tucker W.* A rigorous ODE Solver and Smale's 14th problem // Foundations of Computational Mathematics, 2002. Vol. 2. P. 53–117.
3. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
4. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
5. *Афанасьев А. П., Дзюба С. М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007. 240 с.
6. *Емельянов С. В., Афанасьев А. П.* Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях М.: РОХОС, 2004. 176 с.

7. Пчелинцев А. Н., Мишина Л. А., Теряев Н. И. Об отыскании решений системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине, методом рядов Тейлора // Труды ТГТУ. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. Вып. 21. С. 150–154.
8. Maxima, a Computer Algebra System: <http://maxima.sourceforge.net>.