

IV. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Экстремальные свойства триангуляций Делоне

А. В. Акопян

Институт системного анализа РАН

В статье рассматриваются различные функционалы на триангуляциях, для которых триангуляции Делоне являются экстремальными. Будут обобщены некоторые результаты на случай сферы и плоскости Лобачевского, а также приведено простое объяснение экстремальности для параболического функционала.

Введение

В вычислительной геометрии, а также ее приложениях важную роль играют диаграммы Вороного. *Диаграммой Вороного* множества точек \mathcal{V} в некотором метрическом пространстве называется разбиение этого пространства на области так, что каждая область образует множество точек, более близких к одному элементу множества \mathcal{V} , чем к любому другому элементу этого множества. Диаграммы Вороного играют фундаментальную роль в различных областях математики и ее приложениях. Они используются в картографии, кристаллографии, программировании интеллектуальных систем и во множестве других областей. Кроме того, они часто встречаются в природе, например, пятна жирафа являются областями Вороного некоторого набора точек. Это вполне объяснимо, поскольку области Вороного можно воспринимать как области «разрастания» точек.

Для построения диаграммы Вороного используется двойственная ей конструкция — триангуляция Делоне. *Триангуляцией Делоне* множества точек \mathcal{V} в \mathbb{R}^d называется разбиение пространства на симплексы с вершинами в этих точках такое, что внутри описанной сферы любого симплекса не содержится точек из множества \mathcal{V} . Отметим, что бывают ситуации когда на данной сфере лежит еще несколько точек. В этом случае триангуляция Делоне определяется неоднозначно. Нетрудно доказать, что набор из $d + 1$ вершины принадлежит симплексу если соответствующие им области Вороного имеют общую вершину. Аналогичное определение можно дать в других «регулярных» метрических пространствах, например, в сферическом пространстве \mathbb{S}^d или пространстве Лобачевского \mathbb{H}^d . Хотя основное применение триангуляций Делоне связано с областями Вороного, тем не менее она часто используется в дискретной геометрии, дифференциальной геометрии, теории многогранников и во многих других разделах математики. Да и сам по себе вопрос существования триангуляции того или иного многогранника весьма актуален, и инструмент «триангуляции Делоне» способствует пониманию этой задачи.

Наряду с диаграммами Вороного можно рассматривать инверсную задачу — разбивать пространство на области наиболее далекие к данной точке. В случае пространства \mathbb{R}^d полученные области будут соответствовать точкам являющимися вершинами выпуклой оболочки \mathcal{V} . В этом случае инверсной триангуляцией Делоне стоит называть разбиение выпуклой оболочки \mathcal{V} на симплексы, так что описанная сфера этих симплексов содержит все множество \mathcal{V} .

Понятно, что построение триангуляций Делоне и областей Вороного задачи равносильные и одно легко получается из другого в силу вышеупомянутого свойства. С вычислительной точки зрения проще рассматривать задачу триангуляции в виду дискретности ее формулировки. Существует множество алгоритмов вычисления триангуляций Делоне за время порядка $O(\ln n)$ операции (см., например, [2, 3, 10]). Эти алгоритмы используют методы «разделяй и властвуй» или метод заметающей прямой.

Часть алгоритмов используют метод, основанный на так называемой экстремальности триангуляций Делоне. Хотя для них требуется порядка $O(n^2)$, тем не менее часто их использование является более эффективным. В общих чертах алгоритм таков: рассматривается произвольная триангуляция, после чего она «изменяется» в «лучшую» сторону и останавливается в тот момент, когда имеющаяся в данный момент триангуляция — это триангуляция Делоне.

Экстремальность триангуляций Делоне играет важную роль не только в связи с алгоритмами. Она полезна в исследовании различных свойств наборов точек и соответственно их областей Вороного, что немаловажно, например, в компьютерной графике. В этой статье мы рассмотрим функционалы, для которых триангуляция Делоне является экстремальной.

1. Элементарные свойства конфигураций

Хорошо известны следующие экстремальные свойства триангуляций Делоне в \mathbb{R}^2 , которые нетрудно вывести непосредственно из определения.

- Если все треугольники триангуляции остроугольные, то данная триангуляция является триангуляцией Делоне [11].
- Если каждому треугольнику сопоставить минимальный угол, то триангуляция Делоне лексикографически максимизирует набор таких углов [1].
- Триангуляция Делоне минимизирует максимальный радиус описанной окружности среди всех треугольников триангуляции [1, 8].
- Триангуляция Делоне минимизирует максимальный радиус покрывающего круга¹ треугольников триангуляции [7, 9].

Упомянутые выше свойства показывают, что треугольники триангуляции Делоне «стабильны» в том смысле, что они наиболее похожи на правильные и их размеры стремятся быть одинаковыми. Именно поэтому при аппроксимации различных поверхностей используются конструкции, связанные с триангуляциями Делоне.

2. Функционалы суммирования

Пусть \mathcal{V} обозначает некоторое конечное множество точек в пространстве \mathbb{R}^d . Нас будут интересовать функционалы вида

$$F(f, \mathcal{T}) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} f(\Delta),$$

где \mathcal{T} некоторая триангуляция выпуклой оболочки \mathcal{V} с вершинами в \mathcal{V} , а f — некоторая функция на множестве симплексов в \mathbb{R}^d . Оказывается, что для многих естественных функций f получающийся триангуляция Делоне будет экстремальной для функционала $F(f, \cdot)$.

Если рассматривать случай плоскости (а также двумерной сферы или плоскости Лобачевского), то важную роль играет следующая теорема.

Теорема (Локальный тест). *Если для любого четырехугольника функционал $F(f, \mathcal{T})$ минимизируется (максимизируется) на триангуляции Делоне, тогда он минимизируется (максимизируется) на триангуляции Делоне для любого набора точек.*

¹ То есть круга минимального радиуса, покрывающего данный треугольник. Для тупоугольных треугольников этот круг не совпадает с внутренностью описанной окружности треугольника.

Поясним эту теорему. Пусть у нас дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 1). Его можно разбить на два треугольника двумя способами: либо с помощью диагонали AC , либо с помощью диагонали BD . Если неравенство

$$f(\triangle ABC) + f(\triangle ACD) < f(\triangle ABD) + f(\triangle BCD)$$

выполняется тогда и только тогда, когда триангуляция с помощью диагонали AC является триангуляцией Делоне, то функционал $F(\cdot, f)$ обладает нужным нам свойством, а именно минимизируется на триангуляции Делоне.

В больших размерностях это требование необходимо, но не известно, достаточно оно или нет. Дело в том, что в трехмерном пространстве существуют триангуляции, для которых не существует «флипов», то есть аналогичных перестроек соседних симплексов, в то время как на плоскости с помощью таких «флипов» всегда можно «добраться» от любой триангуляции до любой другой. Причем, если триангуляция не является триангуляцией Делоне, то найдется треугольник T_1 и соседний с ним по стороне треугольник T_2 такой, что его вершина X (не являющаяся вершиной T_1) лежит строго внутри описанной окружности треугольника T_1 .

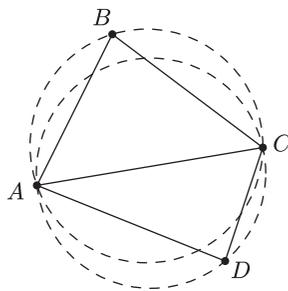


Рис. 1

Сумма радиусов вписанных окружностей

Пусть $f(\triangle) = r(\triangle)$ — то есть радиус вписанной окружности треугольника в \mathbb{R}^2 . Этот функционал предложил Lambert в [4]. С помощью локального теста несложно проверить, что этот функционал максимизируется на триангуляции Делоне. К сожалению, аналогичный функционал не максимизируется на триангуляции Делоне на сфере или плоскости Лобачевского, а также в пространства бóльших размерностей.

В контексте этого функционала важно заметить, что для любого выпуклого четырехугольника $ABCD$ равенство $r_a + r_c = r_b + r_d$ равносильно вписанности четырехугольника (r_a, r_b, r_c и r_d — это радиусы вписанных окружностей треугольников $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ и $\triangle ABC$ соответственно).

Стоит также отметить связанную с этим теорему.

Японская Теорема. Пусть в окружность с центром вписан n -угольник. Тогда для любой триангуляции этого многоугольника, сумма радиусов вписанных окружностей треугольников постоянна.

Более того, эта сумма равна сумме

$$\sum_{i=1}^n M_i - (n - 2)R,$$

где R , O и M_i — это радиус окружности, ее центр и середины сторон многоугольника.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Карно о том, что для любого треугольника ABC выполнено равенство:

$$R + r = OM_a + OM_b + OM_c, \quad (1)$$

где M_a , M_b и M_c — середины сторон BC , AC и AB соответственно.

Произведение длин сторон

Для любого треугольника ABC выполнено следующее равенство:

$$4S_{\triangle ABC} \cdot R = |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|, \quad (2)$$

где $S_{\triangle ABC}$ и R — это площадь и радиус описанной окружности треугольника.

Если $f(\triangle ABC) = |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|$, то полученный функционал будет принимать минимальное значение на триангуляции Делоне.

Действительно, для доказательства всего лишь достаточно показать, что выполнен локальный тест. Это равносильно тому, что для любого выпуклого четырехугольника $ABCD$ равенство

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |BC| \cdot |AC| + |AC| \cdot |CD| \cdot |AD| = \\ = |AB| \cdot |BD| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD| \cdot |BD| \end{aligned} \quad (3)$$

выполнено тогда и только тогда, когда четырехугольник вписанный.

Для выпуклого четырехугольника это очевидно следует из равенства (2). Пусть найдется невписанный четырехугольник $ABCD$, для которого выполнено данное соотношение. Зафиксируем четыре стороны этого четырехугольника и рассмотрим вписанный четырехугольник $A'B'C'D'$ с теми же длинами сторон.

Перепишем соотношение (3) как:

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |AD|}. \quad (4)$$

Следовательно, диагонали четырехугольника $ABCD$ либо строго меньше, либо строго больше диагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$. Из теоремы косинусов следует, что меньше (или больше) и все соответствующие углы четырехугольника, что противоречит тому, что сумма углов четырехугольника равна 360° .

Интересно, что из плоского случая следует аналогичный функционал для полусферы и плоскости Лобачевского. Для сферы зададим:

$$f(\triangle ABC) = \sin \frac{|AB|_S}{2} \cdot \sin \frac{|BC|_S}{2} \cdot \sin \frac{|AC|_S}{2}, \quad (5)$$

где $|AB|_{\mathbb{S}}$ — это сферическое расстояние между точками. Для плоскости Лобачевского

$$f(\triangle ABC) = \operatorname{sh} \frac{|AB|_{\mathbb{H}}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{|BC|_{\mathbb{H}}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{|AC|_{\mathbb{H}}}{2}, \quad (6)$$

где $|AB|_{\mathbb{H}}$ — это расстояние между точками A и B по гиперболической метрике.

Доказательство, в общем, аналогично предыдущему. Воспользовавшись плоским случаем легко показать, что выполняются соотношения аналогичные (3) и (4). Из этого легко вывести неравенство на углы, после чего необходимо воспользоваться леммой о том что не существует двух выпуклых многоугольников с равными соответствующими сторонами, такими, что углы первого больше углов второго.

3. Параболические функционалы

Конструкция Вороного

Знаменитая конструкция, придуманная самим Вороным, состоит в следующем. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^{d+1} параболоид P :

$$x_{d+1} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2.$$

Каждой точке $V_i \in \mathcal{V}$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ на параболоиде P сопоставим точку с теми же первыми d координатами. Объединение точек — это множество \mathcal{V}_1 на параболоиде P , при проекции которого на гиперплоскость $x_{d+1} = 0$ переходит в множество \mathcal{V} . В каждой точке множества \mathcal{V}_1 построим касательную гиперплоскость к параболоиду и рассмотрим выпуклый политоп P_1 , содержащий параболоид P и ограниченный этими гиперплоскостями. Легко понять, что проекции гиперграней P_1 на плоскость $x_{d+1} = 0$, суть области Вороного множества \mathcal{V} .

Обозначим выпуклую оболочку точек \mathcal{V}_1 через P_2 . Если рассмотреть «нижнюю часть» P_2 , то проекции соответствующих граней будут как раз симплексами триангуляции Делоне. Это, например, можно объяснить так. Дело в том, что проекция любого сечения параболоида P гиперплоскостью на плоскость $x_{d+1} = 0$ это сфера. Действительно, пусть гиперплоскость имеет уравнение:

$$x_{d+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_d x_d + a.$$

Подставив это уравнение на x_{d+1} в уравнение параболоида получаем:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_d x_d + a = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2.$$

Это уравнение сферы, поскольку коэффициенты при $x_1^2, x_2^2, \dots, x_d^2$ равны, а члены вида $x_i x_j$ отсутствуют.

Функционалы объема

Теперь рассмотрим два функционала, связанные с объемами частей «зажатых» между P , P_1 и P_2 . Под словом «между» мы подразумеваем точки, такие что «сверху» и «снизу» (то есть по $d + 1$ координате) находятся точки рассматриваемых поверхностей.

Сначала опишем функционал, связанный с политопом P_2 . Рассмотрим все многогранники с вершинами на V_1 и на объем «между» этими многогранниками и параболоидом. Легко понять, что этот объем минимизируется, когда многогранник на V_1 совпадает с P_2 . Очевидно, что этот объем инвариантен при аффинных преобразованиях параболоида, иначе говоря не меняется при сдвигах множества \mathcal{V} . Поэтому его можно определить как функционал $F(f_2, \cdot)$, где f_2 — это объем зажатый между параболоидом и соответствующим симплексом.

Подробнее. Рассмотрим $d + 1$ точку V_1, V_2, \dots, V_{d+1} , а также $d + 1$ соответствующие им точки на параболоиде $V'_1, V'_2, \dots, V'_{d+1}$. Тогда через f_2 обозначим объем той части усеченной призмы $V_1V_2 \dots V_{d+1}V'_1V'_2 \dots V'_{d+1}$, которая находится между $V'_1V'_2 \dots V'_{d+1}$ и параболоидом P . Основываясь на соображениях аффинной геометрии не сложно понять, что этот объем не зависит от расположения точек V_1, V_2, \dots, V_{d+1} относительно параболоида и определяется исключительно самим симплексом $V_1V_2 \dots V_{d+1}$.

Экстремальность триангуляции Делоне для данного функционала почти очевидна. Рассмотрим точку $X \in \text{conv}(\mathcal{V})$ и некоторую триангуляцию $\text{conv}(\mathcal{V})$. Пусть X попала в некоторый симплекс T . Симплекс с вершинами на P , проекция которого совпадает с T , обозначим через T' . Рассмотрим прямую, проходящую через X и параллельную оси x_{d+1} . Обозначим через X_2 точку пересечения этой прямой и симплекса T' , а через X' точку пересечения этой прямой и параболоида. Не сложно понять, что длина отрезка X_1X' достигает своего минимума, когда T — это симплекс триангуляции Делоне. Действительно, точка X' фиксирована, а X_1 всегда находится внутри выпуклой оболочки \mathcal{V} . Поскольку прямая X_1X' пересекает $\text{conv}(\mathcal{V})$ в грани, соответствующей симплексу Делоне, содержащему X , длина отрезка X_1X' достигает своего минимума, когда симплекс T — это симплекс триангуляции Делоне. Интегрируя длину отрезка X_1X' по выпуклой оболочке множества \mathcal{V} мы получим требуемый объем, который будет достигать своего минимума при триангуляции Делоне, поскольку на ней поточечно достигает своего минимума интегрируемая функция.

Отметим, что длина отрезка X_1X' равняется взятой с обратным знаком степени точки X ² относительно описанной сферы симплекса T .

² Степенью точки X относительно окружности с центром в O и радиуса R называется величина равная $OX^2 - R^2$.

В связи с этим мы получили еще одно интересное экстремальное свойство триангуляции Делоне.

Лемма. Пусть точка X находится внутри выпуклой оболочки конечного множества точек \mathcal{V} . Тогда степень точки X относительно описанной сферы любого симплекса с вершинами в \mathcal{V} и содержащего точку X будет меньше чем степень точки X относительно описанной сферы симплекса триангуляции Делоне множества \mathcal{V} , содержащего точку X .

Можно завести похожий функционал, соответствующий внешнему политопу P_1 . А именно, для каждого симплекса T мы можем рассматривать следующий объем. Рассмотрим бесконечную призму с основанием T и направляющей осью параллельной x_{d+1} . «Сверху» ограничим его параболоидом P . Пусть T' — симплекс с вершинами на P , при проекции переходящий в T . В вершинах T' построим касательные гиперплоскости к параболоиду P . Они «обрежут» рассматриваемую нами призму снизу. Объем оставшегося куска призмы, зажатого между параболоидом и гиперплоскостями, обозначим через функцию $f_1(T)$. Легко понять, что функционал $F(f_1, \cdot)$ минимизируется на триангуляции Делоне.

Действительно, рассмотрим произвольную точку X , лежащую в выпуклой оболочке множества \mathcal{V} . Рассмотрим прямую l , проходящую через точку X и параллельную оси x_{d+1} . Пусть она пересекает параболоид P в точке X' . Пусть V_i — произвольная точка из множества \mathcal{V} , а V'_i ее образ на параболоиде P . Обозначим пересечение прямой l и гиперплоскости, касающейся параболоида P в точке V_i , через X_i . Легко понять, что расстояние $X_i X'$ равно квадрату расстояния XV_i . Поэтому длина этого отрезка достигает своего минимума, когда точка X принадлежит области Вороного точки V_i (в диаграмме Вороного множества \mathcal{V}). Следовательно, в силу двойственности диаграмм Вороного и триангуляции Делоне, для каждой точки из симплекса триангуляции Делоне длина отрезка l , зажатого в «урезанной призме», будет достигать своего наименьшего значения. Как и в предыдущем примере, интегрируя длину отрезка по множеству $\text{conv } \mathcal{V}$, мы получаем, что значение функционала $F(f_1, \mathcal{T})$ будет наименьшим, когда \mathcal{T} — это триангуляция Делоне.

Если мы рассматриваем инверсную задачу, то совершенно аналогичным рассуждением, можно показать, что данные функционалы достигают своего максимума на инверсной триангуляции Делоне.

Значение функционала f_2

Несложно выразить значение функции f_2 непосредственно через размеры симплекса. Rajan в [8] показал, что

$$f_2(T) = \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} \left(\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{i-1} |V_i V_j|^2 \right),$$

где $Vol(T)$ — объем симплекса T , а V_1, V_2, \dots, V_{d+1} — его вершины.

Если обозначить через R_T, O_T радиус описанной и центр описанной сферы симплекса T , а через M_T — его центр тяжести, то эту формулу можно немного преобразовать:

$$\begin{aligned}
 f_2(T) &= \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} \left(\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{i-1} |V_i V_j|^2 \right) = \\
 &= \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} \left(\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{i-1} (\overrightarrow{O_T V_i} - \overrightarrow{O_T V_j})^2 \right) = \\
 &= \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} \left(\sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{i-1} (2R_T^2 - 2\langle O_T V_i, O_T V_j \rangle) \right) = \\
 &= \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} \left(d(d+1)R_T^2 - \sum_{i,j=1}^{d+1} \langle O_T V_i, O_T V_j \rangle + \sum_{i=1}^{d+1} |O_T V_i|^2 \right) = \\
 &= \frac{Vol(T)}{(d+1)(d+2)} ((d+1)^2 R_T^2 - (d+1)^2 |O_T O_M|^2) = \\
 &= \frac{d+1}{d+2} Vol(T) (R_T^2 - |O_T O_M|^2).
 \end{aligned}$$

Точное значение функционала $f_1(T)$ найти, конечно, можно, однако оно не будет иметь хоть сколько-нибудь простой вид. Поэтому мы его здесь приводить не будем.

4. Степенные функционалы

О. Р. Мусин [6] заметил, что для $d =$ функционал порожденный функцией

$$f_2(T) - f_1(T) = \frac{1}{6} R^2 S$$

также обладает свойством экстремальности на триангуляции Делоне. Более того, он высказал следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть функция $f(T)$ имеет вид

$$f(T) = Vol(T) \cdot R_T^\alpha, \text{ где } \alpha \geq 1. \quad (7)$$

Тогда функционал $F(f, \cdot)$ достигает своего минимума на триангуляции Делоне.

Мусин О. Р. доказал эту гипотезу для случая плоскости, для больших размерностей она остается открытой.

Отметим еще один функционал обнаруженный и доказанный тем же автором в [5]. Если $d = 2$, то функционал, порожденный функцией

$$f(\triangle ABC) = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2}{S(\triangle ABC)}$$

достигает своего минимума на триангуляции Делоне. К сожалению, на данный момент неизвестны обобщения данного функционала на большие размерности.

5. Сферические функционалы

В разделе 2 уже упоминался функционал на сферических триангуляциях, для которого триангуляция Делоне является экстремальной. В этом разделе мы приведем еще несколько, часть из которых обнаружены автором и экспериментально проверены на компьютере с помощью локального теста. Отметим сразу, что мы будем рассматривать множества точек лежащих на полусфере, поскольку полусфера объект «односторонний», и не возникает проблем с определением внутренности окружности, как это бывает на сфере.

Для начала скажем, что так же как и для плоского случая, несложно показать, что функционал, порожденный функцией

$$f(\triangle ABC) = R_{\triangle ABC},$$

достигает своего минимума на триангуляции Делоне. Это следует из того, триангуляция Делоне лексикографически минимизирует набор радиусов описанных окружностей треугольников.

Для получение других функционалов, нам потребуется следующая интерпретация триангуляции Делоне, а именно как триангуляция, порожденная выпуклой оболочкой точек. Действительно, пусть \mathcal{V} семейство точек на полусфере с центром в O , которая в свою очередь лежит в трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим выпуклую оболочку этих точек. Можно считать, что поверхность этой выпуклой оболочки состоит из треугольников. Если какая-то грань выпуклой оболочки — это четырехугольник (пятиугольник и более), то можно рассматривать его произвольную триангуляцию. *Внешней стороной* поверхности выпуклой оболочки назовем точки, которые «не видны» из точки O , иначе говоря, множество точек X таких, что отрезок OX пересекает внутренность выпуклой оболочки. Если рассмотреть центральную проекцию из точки O внешней стороны на поверхность полусферы, то мы получим триангуляцию Делоне. Легко видеть, что внутри любой окружности, описанной около любого из треугольников, не будет точек из множества \mathcal{V} , поскольку соответствующая грань поверхности выпуклой оболочки не была бы таковой.

Этим объясняется то, что в формулах (5) и (6) рассматриваются величины $\sin AB/2$ и $\operatorname{sh} AB/2$. Это просто «евклидовы расстояния» между точками. Иначе говоря, пусть $\triangle ABC$ — это треугольник с вершинами на сфере. Построим плоскость, проходящую через эти три точки и рассмотрим треугольник, который при этом будет вырисовываться из $\triangle ABC$. Обозначим «евклидов треугольник» с вершинами в этих точках через $\triangle^{\mathbb{E}}ABC$. Его стороны будут равны $2 \sin AB/2$, $2 \sin BC/2$ и $2 \sin AC/2$.

Вообще каждой сферической триангуляции \mathcal{T} выпуклой оболочки \mathcal{V} на сфере соответствует поверхность \mathcal{T}' в \mathbb{R}^3 , состоящая из треугольников $\triangle^{\mathbb{E}}T_i$, где $T_i \in \mathcal{T}$.

Видно, что объем конуса с вершиной в точке O и «основанием» \mathcal{T} будет максимальным, когда этот многогранник будет просто выпуклой оболочкой множества точек $\mathcal{V} \cup O$. Отсюда следует, что функционал, порожденный следующим евклидовым объемом

$$f(\triangle ABC) = \operatorname{Vol}^{\mathbb{R}}(\triangle OABC) = \frac{1}{3} S^{\mathbb{E}} \triangle ABC \cdot \sqrt{(R^2 - R_{\triangle^{\mathbb{E}}ABC})}, \quad (8)$$

где $\triangle OABC$ — это евклидов тетраэдр с вершинами O , A , B и C , а R — радиус нашей сферы будет достигать своего максимума на триангуляции Делоне.

Аналогично, можно рассматривать функционал, порожденный объемом конуса с вершиной в точке O и с основанием на поверхности двойственной \mathcal{T}' относительно сферы, то есть поверхности порожденной касательными гиперплоскостями к сфере в точках множества \mathcal{V} . Точное выражение порождающей его функции f мы здесь приводить не будем, ввиду громоздкости соответствующего выражения.

Отметим — что экспериментально подтверждено, что параболический функционал на сфере достигает своего минимума на триангуляции Делоне. Параболическим функционалом на сфере мы называем значение функции f_2 от «евклидового треугольника» с теми же вершинами. Иначе говоря, параболический функционал от триангуляции порождается следующей функцией от сферического треугольника $\triangle ABC$:

$$f(\triangle ABC) = \left(\sin^2 \frac{|AB|_{\mathbb{S}}}{2} + \sin^2 \frac{|BC|_{\mathbb{S}}}{2} + \sin^2 \frac{|AC|_{\mathbb{S}}}{2} \right) S \triangle^{\mathbb{E}} ABC. \quad (9)$$

Интересно, обладает ли его аналог для пространств больших размерностей свойством экстремальности на триангуляции Делоне.

Площадь поверхности

В заключение приведем еще один очень естественный функционал на сфере, который в конечном итоге формулируется без привлечения данных выше определений. А именно, рассмотрим функционал $F(S^{\mathbb{E}}(\Delta T), \mathcal{T})$, он достигает своего минимума на триангуляции Делоне.

Пусть p — это ломаная в \mathbb{R}^3 с вершинами в вершинах выпуклой оболочки множества \mathcal{V} (иначе говоря, при проекции из точки O ломаная переходит в поверхность выпуклой оболочки множества \mathcal{V}). Этот факт можно сформулировать так: *среди всех кусочно-линейных поверхностей множество вершин которых совпадает с \mathcal{V} , а периметр совпадает с p , наименьшую площадь имеет поверхность, соответствующая выпуклой оболочке \mathcal{V} .*

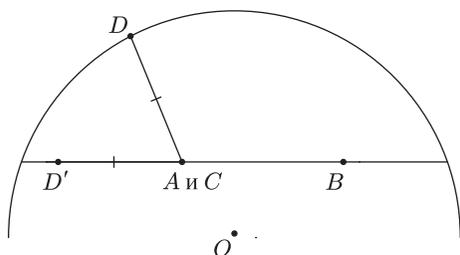


Рис. 2

Для доказательства достаточно показать, что выполнен локальный тест. Итак, пусть O — центр сферы, A, B, C и D — четыре точки лежащие в одной полусфере. Пусть D лежит внутри сегмента σ , порожденного стороной AC и описанной окружностью треугольника ABC . Это значит, что точки O и D лежат по разные стороны от плоскости ABC , и B и D лежат по разные стороны от плоскости OBC . Пусть D' такая точка внутри сегмента, что $|AD| = |AD'|$ и $|CD| = |CD'|$. Такая точка найдется. Действительно «повращаем» точку D вокруг отрезка AC . Она попадет внутрь сегмента, поскольку угол $\angle ADC > 180^\circ - \angle ABC$.

В силу равенства треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle ACD'$ имеем:

$$S(\triangle ABC) + S(\triangle ACD) = S(\square ABCD'). \tag{10}$$

С другой стороны сумма площадей треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ равна площади четырехугольника со сторонами равными AB, BC, CD и AD , и диагональю равной BD , которая в свою очередь меньше BD' . Поэтому осталось доказать, что площадь таких четырехугольников растет с ростом этой диагонали (пока четырехугольник не станет вписанным, потом она опять уменьшается).

Обозначим стороны четырехугольника за a, b, c и d , а диагональ — за x (рис. 2). Углы между парами сторон a и b, c и d обозначим за α и β

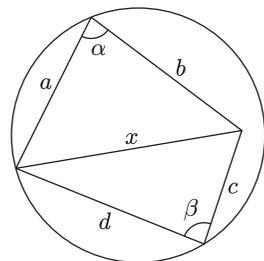


Рис. 3

соответственно. Пользуясь формулой Герона, запишем:

$$S(x) = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - b^4 - a^4 - x^4} + \frac{1}{4} \sqrt{2c^2d^2 + 2c^2x^2 + 2d^2x^2 - c^4 - d^4 - x^4}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$S'(x) = \frac{a^2x + b^2x - x^3}{2\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - b^4 - a^4 - x^4}} + \frac{c^2x + d^2x - x^3}{2\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2x^2 + 2d^2x^2 - c^4 - d^4 - x^4}}. \quad (12)$$

Заметим, что в знаменателях стоят площади соответствующих треугольников, которые мы заменим на $ab \sin \alpha/2$ и $cd \sin \beta/2$ соответственно. Величины же стоящие в числителях, воспользовавшись теоремой косинусов, можно заменить на $2ab \cos \alpha$ и $2cd \cos \beta$ соответственно. Перепишем наше выражение:

$$S'(x) = \frac{2abx \cos \alpha}{4abx \sin \alpha} + \frac{2cd \cos \beta}{4cd \sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{2 \sin \beta} = \frac{x}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \quad (13)$$

Учитывая, что и α и β меньше 180° , а x больше 0 получаем, что данное выражение обнуляется тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = 180^\circ$. То есть соответствующий четырехугольник вписанный. Когда же $\alpha + \beta > 180^\circ$, площадь четырехугольника растет с ростом x . Таким образом, локальный тест выполняется, а значит, площадь выпуклой оболочки действительно наименьшая из всех возможных.

Отметим, что если множество точек \mathcal{V} располагается на всей сфере, причем достаточно плотно (то есть нет, скажем, пустого диска радиуса $R/10$), то аналогичными рассуждениями можно показать, что выпуклая оболочка имеет наименьшую возможную площадь среди всех поверхностей с вершинами \mathcal{V} и гомеоморфных сфере.

Литература

1. *D'Azevedo E. F., Simpson R. B.* On optimal interpolation triangle incidences. SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1989. 10 (6). P. 1063–1075.
2. *Fortune S.* A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica, 1987. 2 (1). P. 53–174.
3. *Guibas L. and Stolfi J.* Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. Acm transactions on graphics, 1985. 4 (2). P. 74–123.
4. *Lambert T.* Systematic local flip rules are generalized Delaunay rules.

5. *Musin O. R.* Properties of the Delaunay triangulation. In Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry. P. 424–426. ACM New York, NY, USA, 1997.
6. *Musin O. R.* Optimal functional for the delaunay triangulations. In The Discrete Geometry Workshop, SOUTH PADRE ISLAND, April 2009.
7. *Powar P. L.* Minimal roughness property of the Delaunay triangulation: a shorter approach. *Comput. Aided Geom. Design*, 1992. 9 (6). P. 491–494.
8. *Rajan V. T.* Optimality of the Delaunay triangulation in \mathbf{R}^d . *Discrete Comput. Geom.*, 1994. 12 (2). P. 189–202.
9. *Rippa S.* Minimal roughness property of the Delaunay triangulation. *Comput. Aided Geom. Design*, 1990. 7 (6). P. 489–497.
10. *Shamos M. I. and Hoey D.* Closest-point problems. In *Foundations of Computer Science*, 1975., 16th Annual Symposium on, 1975. P. 151–162.
11. *Wells D.* *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry.* Penguin Books London. 1991.