Об увеличении объема некоторых геометрических фигур при их надувании

Н. Н. Такенов

Московский физико-технический институт

Известно, что для любого выпуклого многогранника существует кусочно-линейная изометрическая деформация, увеличивающая объем, т. е. надувание. Можно поставить вопрос о том, насколько увеличивается объем многогранника при такой деформации. В этой работе мы укажем простую оценку для объемов деформированных многогранников. Кроме того, будет показано, что наша оценка всегда лучше, чем оценка из изопериметрического неравенства.

Пусть $S = \partial P$ — поверхность выпуклого многогранника $P \in \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что S является *выпуклой поверхностью*. Далее, сгибанием поверхности S назовем непрерывное кусочно-линейное изометрическое преобразование $\{S_t \mid t \in [0, 1]\}$, такое, что $S_0 = S$ и S_t изометрично S для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда, как известно, верна следующая теорема

Теорема. *Для любой выпуклой поверхности S, существует такое ее сгибание S_t, что $V(S_1) > V(S)$, где $V(X)$ — объем, ограничиваемый поверхностью X.*

Эта теорема была доказана в 1996 Д. Бликером для случая многогранников с треугольными гранями [1], а в 2006 И. Паком для любых многогранников [4]. Следовательно, поверхность любого выпуклого многогранника можно деформировать так, что его объем увеличится. В этой статье мы хотим предложить некоторые оценки для возможного увеличения объема.

Очевидно, простейшая оценка сверху для объема деформированного многогранника следует из изопериметрического неравенства для $\mathbb{R}^3$:

$$V(S)^2 \leqslant \frac{A(S)^3}{36\pi}, \tag{1}$$

где $A(S)$ — площадь поверхности S. Например, в случае правильного тетраэдра, с одной стороны, известен способ сгибания, увеличивающий объем на 37,7 % [1], с другой стороны, из изопериметрического неравенства следует что объем может быть увеличен не более чем на 81,9 %. Рассмотрим теперь, как мы можем улучшить эту оценку.

Вот общий план рассматриваемого метода. Мы рассмотрим образ многогранника при сгибании, разрежем его поверхность по некоторым линиям, затянем линии разрезов определенными поверхностями, а затем оценим объем каждого получившегося тела по отдельности. Как мы впоследствии увидим, такой способ позволит более точно оценить объем согнутого многогранника.

Пусть дан выпуклый многогранник P с вершинами $X_1, \dots, X_k$ и поверхностью S. Рассмотрим кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, определенные следующим образом: Γ_i — совокупность точек на поверхности тетраэдра S, удаленных от вершины X_i, на расстояние r; Δ_i — совокупность точек на поверхности тетраэдра, удаленных от вершины X_i, на расстояние меньшее r; r фиксировано. Нетрудно видеть, что для любой вершины Γ_i будет представлять собой объединение дуг на гранях, примыкающих к этой вершине, а Δ_i — объединение круговых секторов. Но для наших целей нужно, чтобы для различных i и j соответствующие им кривые Δ_i и Δ_j не пересекались. Нетрудно видеть, что для этого необходимо и достаточно выполнения следующего неравенства:

$$r \leqslant r_{max} = \frac{1}{2} \min r_{ij}, \tag{2}$$

где r_{ij} — расстояние между вершинами X_i и X_j, измеренное по поверхности многогранника.

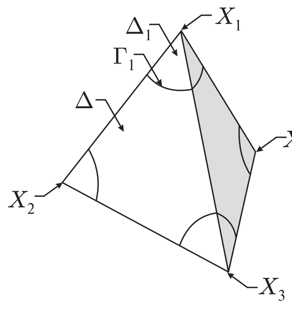

Рис. 1. Многогранник (тетраэдр), Γ_1, Δ_1 и Δ

Обозначим также $\Delta = S \setminus \left\{\cup_{i=1}^{k} \Delta_i\right\}$. Рассмотрим образ поверхности многогранника при сгибании S^* (рис. 1). Так как сгибание сохраняет метрику на поверхности многогранника, то для любого i кривая Γ_i перейдет в простую спрямляемую жорданову кривую Γ_i^*. Тогда, как известно, существует минимальная поверхность, гомеоморфная диску, Π_i^* с границей Γ_i^* и более того, для нее верен аналог изопериметрического неравенства ([3], теорема 4.2):

$$L(\Gamma_i^*)^2 \geqslant 4\pi A(\Pi_i^*), \tag{3}$$

где $L(\Gamma)$ — длина кривой Γ.

Определим P_i^* как тело с поверхностью $\partial P_i^* = S_i^* = \Delta_i^* \cup \Pi_i^*$. Аналогично определим P_0^* с поверхностью $\partial P_0^* = S_0^* = \Delta^* \cup_{i=1}^{k} \Pi_i^*$. Полученные таким образом поверхности, конечно, могут быть самопересекающимися, но они гомеоморфны сфере и поэтому мы можем приписать им ориентированные объемы, выбрав их так, чтобы выполнялось равенство:

$$V(S^*) = V(S_0^*) + \sum_{i=1}^{k} V(S_B^*). \tag{4}$$

Но, как показано Т. Радо [5], и для самопересекающихся поверхностей верно изопериметрическое неравенство (1). Так как сгибание изометрично, то оно сохраняет площадь поверхности, и следовательно:

$$\begin{aligned}
V(S^*) &\leqslant \sum_{i=1}^{k} V(S_i^*) + V(S_0^*) \leqslant \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} A(S_i^*)^{\frac{3}{2}} + A(S_0^*)^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(A(\Delta_i^*) + A(\Pi_i^*) \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(\Delta^*) + \sum_{i=1}^{k} A(\Pi_i^*) \right)^{\frac{3}{2}} \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(A(\Delta_i) + \frac{L(\Gamma_i^*)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(\Delta) + \sum_{i=1}^{k} \frac{L(\Gamma_i^*)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(A(\Delta_i) + \frac{L(\Gamma_i)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(\Delta) + \sum_{i=1}^{k} \frac{L(\Gamma_i)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь мы использовали неравенство (3). Выясним, чему равно $A(\Delta_i)$, $A(\Delta)$ и $L(\Gamma_i)$. Пусть сумма углов, сходящихся в вершине X_i, равна σ_i. Тогда Δ_i состоит из круговых секторов с радиусами r и суммой их углов, равной σ_i, значит $A(\Delta_i) = \frac{1}{2}\sigma_i r^2$. Аналогично $L(\Gamma_i) = \sigma_i r$. Тогда

$$A(\Delta) = A(S) - \sum_{i=1}^{k} A(\Delta_i) = A(S) - \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^{k} \sigma_i, \tag{6}$$

где $A(S)$ — площадь поверхности исходного многогранника. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
V(S^*) &\leqslant \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(A(\Delta_i) + \frac{L(\Gamma_i)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(\Delta) + \sum_{i=1}^{k} \frac{L(\Gamma_i)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sigma_i r^2}{2} + \frac{(\sigma_i r)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(S) - \frac{r^2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{(\sigma_i r)^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(r^3 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sigma_i(\sigma_i + 2\pi)}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(A(S) - r^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i(2\pi - \sigma_i)}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим эту функцию $V_P(r)$. Как нетрудно видеть, она имеет вид:

$$V_P(r) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} A(S)^{\frac{3}{2}} \left(c_1 r^3 + (1 - c_2 r^2)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{8}$$

Отметим два важных свойства этой функции:

1) $V_P(0) = A(S)^{3/2}/6\sqrt{\pi}$ — что совпадает с оценкой, полученной из изопериметрического неравенства;
2) $c_1, c_2 > 0$ (для c_2 это следует из того, что $0 < \sigma_i < 2\pi$ для любого i).

Тогда, при достаточно малом ε мы получим:

$$\begin{aligned} V_P(\varepsilon) &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} A(S)^{\frac{3}{2}} \left(c_1 \varepsilon^3 + (1 - c_2 \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} A(S)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2} c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right) < V_P(0). \end{aligned} \tag{9}$$

Как нетрудно видеть, неравенство $V(S^*) \leqslant V_P(r)$ верно для любого $0 \leqslant r \leqslant r_{\max}$. Найдя минимум $V(r)$ на этом промежутке, мы найдем оценку сверху для $V(S^*)$. Как следует из (9), оценка, полученная таким образом, всегда будет лучше оценки, полученной из изопериметрического неравенства.

Например, для тетраэдра (рис. 2):

$$V_{tetrahedron}(r) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} r^3 + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} (\sqrt{3} - \pi r^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{10}$$

Изучив функцию, мы получим, что на этом промежутке она имеет минимум при

$$r = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{31\pi}} \tag{11}$$

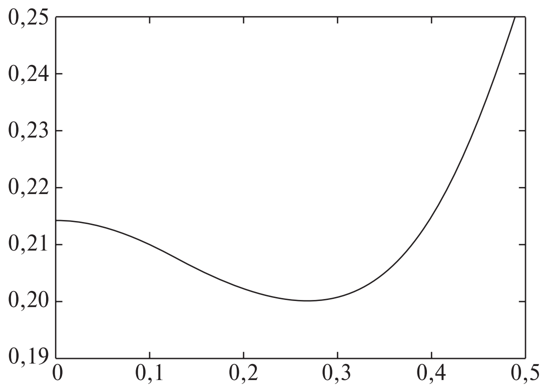

Рис. 2. График функции $V_{tetrahedron}(r)$

и получившаяся оценка сверху для объема согнутого тетраэдра

$$V_{tetrahedron}^{\max} = 0{,}2000395\ldots . \tag{12}$$

Сравнив это с объемом правильного тетраэдра

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} = 0{,}11785113\ldots, \tag{13}$$

получим, что при сгибании правильного тетраэдра нельзя увеличить объем более чем на 69,74 %.

Аналогичные рассуждения можно провести и для куба. Для него

$$V_{cube}(r) = \frac{7\sqrt{21}}{16}\pi r^3 + \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\left(6 - \frac{3}{2}\pi r^2\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{14}$$

Эта функция имеет минимум в точке $r = \sqrt{32/351\pi}$, который дает нам оценку сверху для объема деформированного куба:

$$V_{cube}^{\max} = 1{,}36613680\ldots . \tag{15}$$

Для сравнения — оценка, полученная из изопериметрического неравенства, равна 1,38197659... .

Такие же вычисления были произведены для двойного треугольника и двойного квадрата (вырожденные многогранники). Представим полученные результаты в итоговой таблице, где V_0 — исходный объем, V_i — наибольший получаемый объем для известных способов сгибания (данные взяты из [1], [2] и [4]), $V_{\max}$ — оценка наибольшего объема исходя из изопериметрического неравенства, $V_{\max}^*$ — оценка, полученная в этой работе.

	V_0	V_i	$V_{\max}^*$	$V_{\max}$
Тетраэдр	0,1179	0,1623	0,20003951...	0,2143
Куб	1	1,2567	1,36613680...	1,3820
Дв. треугольник	0	0,0430	0,06462765...	0,7578
Дв. квадрат	0	0,2055	0,24821032...	0,2660

Таким образом, наш метод, заключающийся в поиске минимума функции $V_P(r)$ на промежутке $(0, r_{\max})$, всегда дает результаты лучшие, чем изопериметрическое неравенство, хотя улучшение не всегда бывает существенным (например, как в случае с кубом).

Литература

1. *Bleecker D. D.*. Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra, J. Diff. Geom. 43. P. 505–526, 1996.
2. *Buchin Kevin*, *Pak Igor*, *Schulz Andre*. Inflating the Cube by Shrinking, Proc. 23rd European Workshop on Computational Geometry (EWCG), 2007. P. 46–49.
3. *Osserman Robert*. The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (6). 1978. P. 1182–1238.
4. *Pak I.* Inflating polyhedral surfaces. Preprint. 2006. 37 pp.
5. *Radó T.* The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area, Trans. Amer. Math. Soc. 41. 1947. P. 530–555.