

# **Неформальные описательные модели транспортных коммуникаций, транспортных сетей и территорий в задаче о прокладке путей и коммуникаций\***

Д. Т. Лотарев

*Институт системного анализа РАН*

В работе дается описание основных объектов, которые входят в состав транспортных коммуникационных сетей, размещаемых на неоднородной по условиям строительства территории.

## **1. Коммуникация**

Транспортная коммуникация, которая также называется транспортной магистралью [1], — это физическая среда, в которой перемещается поток материальных, энергетических или информационных ресурсов. Она представляет собой линейный (протяженный) физический объект, который связывает пару точечных физических объектов — потребителя ресурсов с источником ресурсов, потребителя с потребителем или пару других объектов. Транспортная коммуникация — это дорога, линия электропередачи, трубопровод, телефонный или компьютерный кабель. Она может быть проложена (размещена) на открытой местности, в населенном пункте или внутри дома.

Прежде чем проложить коммуникацию, необходимо построить трассу. Трасса — это линия на карте местности или на плане населенного пункта, либо дома. Будучи отображенной на местность, трасса определяет размещение коммуникации, как физического объекта, на местности.

В условиях многоэтажного дома коммуникация прокладывается в предназначенных для этих целей шахтах и трасса здесь определяется почти однозначно. В населенных пунктах коммуникации прокладываются вдоль улиц, и здесь есть некоторая свобода выбора.

---

\* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (№ НШ–5511.2008.9).

В данной работе предполагается размещение коммуникации в полевых условиях, которые предоставляют большую свободу выбора трассы [2, 3]. Этот выбор связан с определенными трудностями, обусловленными большим многообразием условий прокладки коммуникации, которые определяются рядом параметров, свойственных самой коммуникации, и территории, на которой коммуникация размещается.

Размещение коммуникации на земной поверхности определяется на основании минимизации критерия оптимальности. В качестве критерия принимаются суммарные затраты на строительство коммуникации и на транспортировку по ней того потока, для транспортировки которого она строится. Критерий оптимальности зависит от параметров, характеризующих свойства коммуникации и территории, на которой она размещается.

Территория характеризуется удельными строительными затратами — это стоимость строительства отрезка коммуникации единичной длины в окрестности точки территории. Территория, на которой размещается коммуникация, может быть либо однородной относительно удельных строительных затрат, либо неоднородной. Территория считается однородной по условиям строительства, если удельные строительные затраты имеют одно и то же значение во всех точках территории. Если значение удельных строительных затрат меняется от точки к точке, то территория считается неоднородной.

Многие параметры территории могут быть выражены через удельные строительные затраты. Например, качество сельскохозяйственных угодий можно выразить через удельные строительные затраты, оценив стоимость отторгнутых при строительстве угодий или стоимость их рекультивации.

Коммуникация характеризуется удельными транспортными затратами. Для дороги они определяются пропускной способностью и качеством дорожного покрытия, для линии электропередачи и компьютерного кабеля — материалом и диаметром провода, а также технологией прокладки. Линия электропередачи может быть воздушной, когда неизолированные провода подвешиваются на опорах, либо кабельной, когда провода представляют собой многожильный изолированный бронированный кабель, который укладывается в земле. Электрический кабель может быть медным или алюминиевым, компьютерный — медным или оптоволоконным. Компьютерный кабель тоже, как правило, укладывается в земле.

Важными являются суммарные по всей длине коммуникации строительные и транспортные затраты. Значения этих затрат взаимно зависимы, связь между ними не является простой. Она зависит от топологии (конфигурации) магистрали. В случае однородной территории магистраль является прямой и затраты как строительные, так и транспортные пропорциональны длине коммуникации. На неоднородной территории прямолинейность коммуникации нарушается. Длина коммуникации может возрасти. Но это может случиться, если только затраты на строительство

при этом снизятся. Если дорожное покрытие не изменяется, то транспортные затраты возрастают.

Таким образом, суммарные строительные затраты зависят от топологии и длины коммуникации, которые в свою очередь зависят от характеристик территории, на которой лежат связываемые коммуникацией объекты. Суммарные транспортные затраты всегда пропорциональны длине коммуникации, а суммарные строительные затраты зависят от длины коммуникации не всегда линейным образом, так как они зависят также от параметров территории. Например, затраты на строительство длинной коммуникации в обход горы могут оказаться меньше затрат на строительство короткого прямолинейного тоннеля, пробитого сквозь гору. Транспортные же затраты при движении по прямолинейному пути в туннеле всегда меньше транспортных затрат по более длинному пути вокруг горы. При некоторой большой интенсивности потока строительство и использование туннеля может оказаться более выгодным.

Оптимальная конфигурация коммуникации определяется на основании минимизации критерия оптимальности. Транспортная коммуникация, связывающая на территории пару точек, может иметь вид прямолинейного или криволинейного отрезка. Вид отрезка зависит от значения таких параметров:

- соотношение между удельными строительными и удельными транспортными затратами;
- величина протекающего по коммуникации потока;
- соотношение между суммарными строительными и транспортными затратами для всей коммуникации;
- характер территории, на которой размещены соединяемые точки;
- критерий оптимальности размещения коммуникации.

Многие из этих параметров могут быть выражены в виде затрат на строительство коммуникации и на транспортировку потока, который будет течь по ней после сооружения и ввода в эксплуатацию.

Важными являются и удельные и суммарные затраты. Суммарные — это и строительные, и транспортные затраты для всей коммуникации, связывающей пару объектов. Такая сумма обычно принимается за критерий оптимальности.

В некоторых случаях одним из этих видов затрат можно пренебречь, и критерий оптимальности упрощается. Например, в случае морских или воздушных перевозок коммуникации строить не нужно. Здесь существуют только транспортные затраты, а затраты на строительство коммуникации равны нулю. Такие «коммуникации» существуют в виде отрезков прямых или геодезических линий, «проходящих» по воздуху или по водной поверхности. В случае речного транспорта коммуникация в общем случае не является прямолинейной, но затраты на ее строительство равны нулю.

В случае передачи электроэнергии затраты на транспортировку энергетического потока имеют вид потерь энергии на нагрев проводников, на излучение. Но этими «транспортными затратами» можно пренебречь в сравнении со строительными затратами. Поэтому конфигурация такой коммуникации определяется минимумом затрат на строительство. Здесь транспортные затраты считаются равными нулю.

Конфигурация коммуникации зависит не только от соотношения между строительными и транспортными затратами, но и от вида территории. Территория может быть равнинной, холмистой, болотистой или другой [4]. Но в задаче размещения транспортной магистрали все это разнообразие можно описать одной функцией — значением удельных строительных затрат.

Вся территория, на которой размещены объекты, может быть принята за плоскость, а ее неоднородность относительно удельных строительных затрат может быть записана в виде функции удельных строительных затрат, заданной на плоскости. Если эта функция «относительно хорошая», то конфигурацию, и стоимость отдельной коммуникации можно найти путем постановки и решения соответствующей вариационной задачи. Однако решить вариационную задачу можно только в исключительных случаях [5], например, когда территория однородна по условиям строительства. В этом случае функция удельных строительных затрат является константой, и вариационная задача легко решается. Результатом решения является прямолинейный отрезок.

В общем случае участок территории, на котором размещены связываемые коммуникацией точки, может быть существенно неоднородным по условиям строительства. Здесь могут быть овраги, реки, болота и т. д. Построить «хорошую» функцию удельных строительных затрат для такого участка, как правило, не удастся, и для него строится цифровая модель местности (ЦММ) [2, 3]. В общем случае она описывает все свойства территории в отдельных ее точках. К числу таких свойств относятся — климатические данные, качество в отношении сельскохозяйственного производства, кадастровые данные и т. д. Обычно ЦММ — это большая база данных [6], из которой при необходимости можно получить ту или иную информацию.

Цифровая модель местности, используемая в задаче размещения коммуникаций, отличается от цифровой модели местности общего вида. Коммуникация размещается на некотором участке территории. При решении задачи размещения этой коммуникации используется цифровая модель местности этого участка. Эта цифровая модель имеет вид конечного множества точек участка, в каждой из которых задано значение удельных строительных затрат. Значения удельных строительных затрат являются результатом пересчета свойств территории в стоимость, которые используются затем для поиска трассы коммуникации.

Возможны два способа поиска трассы. Первый способ состоит в том, чтобы по значениям удельных строительных затрат в дискретных точках

территории построить гладкую функцию удельных строительных затрат, а затем поставить и решить вариационную задачу. Решение этой задачи и определит трассу коммуникации. Обе эти задачи — и построение гладкой функции, и решение вариационной задачи — не являются простыми. Особенно вторая, вариационная задача, которая, как правило, не решается аналитически.

Второй способ состоит в построении цифровой модели местности. Для этого за цифровую модель местности принимается некоторый граф, Топология, длина и стоимость коммуникации ищутся по какому-либо алгоритму поиска минимального (в том или ином смысле) пути на этом графе, например, по алгоритму Форда—Фалкерсона [7] или по алгоритму Дейкстры [8]. На плоскости найденный путь имеет вид ломаной, которая с некоторой точностью аппроксимирует гладкую кривую.

## 2. Сети транспортных коммуникаций

Транспортная сеть связывает друг с другом некоторое множество объектов. Одни из этих объектов являются источниками ресурсов, другие — потребителями. Отдельные транспортные магистрали, соединяя всех потребителей ресурсов с источниками ресурсов, образуют транспортную сеть. Сеть размещается на территории на основании минимизации критерия оптимальности, который является сумма затрат на строительство коммуникаций и на транспортировку по ним потока от источников к потребителям в объеме, удовлетворяющем спросу потребителей. Кроме того, критерий оптимальности должен удовлетворять ряду ограничений, накладываемых на сеть, в том числе на вид самой сети.

Разнообразие видов сетей велико, и выбор того или иного варианта для строительства определяется числом потребителей и их спросами, числом источников, неоднородностью территории, на которой размещены источники и потребители ресурсов, видом территории, где размещается сеть, и т. д.

Можно выделить следующие виды сетей.

1. Сеть может быть либо древовидной, либо с циклами. Это зависит от числа видов ресурса и от числа источников. Если в сети течет ресурс одного вида, и существует только один источник этого ресурса, то сеть имеет вид дерева. Если при одном виде ресурса имеются несколько источников, то сеть представляет собой лес, и каждый источник является корнем какого-либо дерева этого леса. Если затраты на транспортировку потока велики по сравнению с затратами на строительство путей движения потока, то каждое дерево имеет вид звезды с прямолинейными лучами (например, воздушные пути). Центром такой звезды является источник. Если в сети текут потоки различных ресурсов и имеются объекты, каждый из

которых является источником одного ресурса и потребителем другого, то в оптимальной сети могут быть циклы (в данной работе сети с циклами не рассматриваются).

2. Сети могут размещаться на однородной или неоднородной территории. На однородной территории каждая коммуникация размещается вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего сток (т. е. потребителя ресурса) с источником или с другим стоком. На неоднородной территории коммуникация размещается вдоль отрезка некоторой кривой, определяющей минимум затрат на строительство коммуникации и на транспортировку потока, который по ней течет. Величина потока определяется спросами потребителей и конфигурацией сети

3. Сети могут быть с потоком или без потока. Сеть без потока, вообще говоря, не имеет смысла. Но если затраты на транспортировку потока малы по сравнению с затратами на строительство самой коммуникации и ими можно пренебречь, то сеть считается без потока.

4. Сети могут различаться по способу организации разветвлений. Возможны два способа организации разветвлений. При первом способе разветвления допускаются только в точках размещения источников и потребителей ресурсов. При втором способе — разветвления сети допускаются в любых точках территории, в которых допустимо размещение коммуникации. В случае, когда сеть размещается на однородном участке территории, и задачу можно рассматривать на плоскости, и транспортными затратами можно пренебречь, тогда первый способ организации разветвлений определяет задачу о минимальном связывающем дереве (Minimal spanning tree — MST), а второй способ — задачу о минимальном дереве Штейнера (Steiner minimal tree — SMT).

5. Задача о минимальном связывающем дереве без потока на однородной территории легко решается. Для этого существуют два алгоритма — алгоритм Прима и алгоритм Краскала [9]. Если территория неоднородна, но затраты на транспортировку потока по-прежнему малы, то для размещения такой сети нужно сначала для всех пар объектов построить связывающие их минимальные пути. Множество таких путей образует полный граф, для которого легко построить остовное дерево, применив алгоритм Прима или Краскала.

6. Если затратами на транспортировку потока пренебречь нельзя, то даже в случае однородной территории и при одном источнике задача размещения сети (синтеза сети) существенно усложняется. В [10] описана возможность применения для этой цели метода динамического программирования в комбинации с методом ветвей и границ.

7. Если разветвления допускаются во всех точках участка территории, а участок является однородным по условиям строительства, и транспорт-

ные затраты равны нулю, то задача размещения сети принимает вид задачи Штейнера на евклидовой плоскости. Результат решения задачи Штейнера на евклидовой плоскости — дерево Штейнера на этой плоскости. Основное отличие этого дерева от минимального связывающего — наличие дополнительных вершин, которые называются точками Штейнера. Дерево Штейнера короче минимального связывающего дерева (не более чем на 13,6 %). Но эта задача более сложная, чем задача о минимальном связывающем дереве на плоскости. Это NP-сложная задача. Задача о минимальном дереве Штейнера на плоскости представляет большой научный и практический интерес.

8. Если разветвления допускаются во всех точках плоскости, но потоком пренебречь нельзя, то задача вида задачи Штейнера на евклидовой плоскости сильно усложняется [11].

9. Если разветвления допускаются во всех точках участка, а участок не является однородным, то задача Штейнера также усложняется. Она становится задачей Штейнера на неоднородной территории. Подход к решению такой задачи приведен в [12]. Сначала для неоднородного участка строится цифровая модель местности, а затем ищется решение задачи Штейнера на этой модели как на графе.

10. Задача Штейнера на графе находит применение в алгоритмах маршрутизации сообщений в сети Интернет, где каждый компьютер является узлом графа, а каждая коммуникация, связывающая пару узлов, — ребром этого графа. Существует маршрутизация индивидуальная (или персональная) и групповая. При индивидуальной маршрутизации каждая датаграмма пересылается от источника к одному пункту назначения. При групповой маршрутизации одна датаграмма или ее копия пересылается от одного источника к целой группе пунктов назначения. При индивидуальной маршрутизации задача состоит в отыскании отдельного оптимального (в смысле некоторого критерия) пути, соединяющего один источник датаграммы с одним получателем. При групповой маршрутизации требуется построить дерево минимального веса, которое связывает множество тех маршрутизаторов, каждый из которых имеет непосредственно присоединенные хосты, входящие в группу. Если дерево связывает только те маршрутизаторы, которые имеют непосредственно присоединенные хосты, входящие в группу, то это минимальное связывающее дерево. Если же в него могут входить (и входят) маршрутизаторы, которые не имеют непосредственно присоединенных хостов, или их непосредственно присоединенные хосты не входят в группу, то это — минимальное дерево Штейнера на графе. Если дерево найдено, то групповые пакеты передаются по тем каналам, которые являются ребрами дерева.

11. Для сети, имеющей вид дерева Штейнера, важной является трехточечная задача Штейнера, в которой необходимо связать двух потребителей с одним источником. Задача интересна тем, что восходит еще к П. Ферма. Кроме того, задача о дереве Штейнера с одним источником и несколькими потребителями и на плоскости и на неоднородной территории допускает декомпозицию на ряд взаимосвязанных трехточечных задач [12].

### 3. Модели территории

Величина удельных строительных затрат зависит от многих параметров территории, например, от высоты рельефа, от прочности грунта, от ценности сельскохозяйственных угодий, которые отторгаются при строительстве коммуникации т. д. Можно выделить следующие модели территории [4]: однородная, кусочно-однородная, гладкая холмистая и пересеченная.

*Однородная территория* встречается редко. За однородную территорию можно принять территорию в степной зоне, где земная поверхность «ровная, как стол». В этом случае за модель территории можно принять евклидову плоскость. За модель сети на такой территории можно принять минимальное связывающее дерево или минимальное дерево Штейнера на евклидовой плоскости. Моделью отдельной коммуникации служит прямолинейный отрезок.

*Кусочно-однородная территория.* Зачастую территорию можно принять за «кусочно-однородную». Часто на территории можно выделить однородные участки с ярко выраженными границами. Такую территорию можно считать «кусочно-однородной». Дорожные строители в условиях нефтяных и газовых месторождений Западной Сибири выделяют такие участки, как суходол, болото, пойма реки и др. Для такой территории трасса коммуникации представляет собой ломаную, каждое ребро которой является прямолинейным и лежит на однородном участке.

*Гладкая холмистая территория.* Часто территорию можно считать «холмистой». Холмистой может быть территория с равнинным рельефом. Например, низменная болотистая местность является холмистой относительно удельных строительных затрат, так как удельные строительные затраты возрастают от края болота к его середине.

**Неоднородная территория** может быть гладкой или негладкой. Если, например, на кусочно-однородной территории границы однородных участков являются размытыми, не ярко выраженными, и удельные строительные затраты плавно возрастают от краев участков к серединам, то такая территория является гладкой холмистой территорией.

*Пересеченная территория* — это территория с оврагами, буераками, небольшими водоемами и т. д.

Не  
нужно  
ли вы-  
делить?



#### 4. Цифровая модель местности для участка неоднородной территории

Обычно точки участка территории находятся на различных географических высотах. В этом случае моделью участка может быть поверхность в трехмерном пространстве, на которой заданы точки, соответствующие соединяемым точкам на земной территории. Обозначим эту поверхность через  $\tilde{P}$ . Эта поверхность является образом земной поверхности, а каждая из точек — образом пункта земной поверхности, в котором размещен какой-либо объект. Проекция поверхности  $\tilde{P}$  на плоскость  $xOy$  представляет собой область  $Q$ , в которой заданы функция удельных строительных затрат  $f(x, y) \geq 0$  и множество точек, которые являются проекциями точек поверхности. Прямолинейный или криволинейный отрезок, соединяющий на плоскости  $xOy$  пару таких точек, является проекцией соответствующего отрезка на поверхности  $\tilde{P}$ .

Функция  $f(x, y)$  определяет в трехмерном пространстве другую поверхность — поверхность  $\tilde{P}$ . Значение этой функции в некоторой точке  $(x_1, y_1)$  плоскости  $xOy$  определяет не высоту поверхности  $\tilde{P}$ , а высоту поверхности  $\tilde{P}$ . И эта высота равна затратам на строительство отрезка коммуникации единичной длины (т. е. удельным строительным затратам) в окрестности той точки поверхности  $\tilde{P}$ , проекцией которой является точка  $(x_1, y_1)$ . Рельеф поверхности  $\tilde{P}$  может существенно отличаться от рельефа поверхности  $\tilde{P}$ . Например, болоту на поверхности  $\tilde{P}$  соответствует низменность, а на  $\tilde{P}$  — холм.

Если пару точек плоскости  $xOy$ ,  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , соединить отрезком  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  некоторой кривой  $y(x)$ , то значения функции  $f(x, y)$  в точках этой кривой  $f(x, y(x))$  определяют некоторую «стену», которая «упирается» в поверхность  $\tilde{P}$ . Площадь этой «стены» равна затратам на строительство коммуникации вдоль того отрезка трассы на земной территории, который отображается на  $\tilde{P}$  и затем проектируется на плоскость  $xOy$  в виде отрезка  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ .

Такая модель позволяет полностью абстрагироваться от земной поверхности и рассматривать задачу на плоскости  $xOy$ .

Всякий отрезок  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  характеризуется длиной и весом. Длина отрезка  $D_{12}$  равна суммарной длине элементарных отрезков, на которые его можно разбить:

$$D_{12} = \sum_{i=1}^M \sqrt{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1})^2}, \quad (1)$$

где  $\tilde{x}_i$  — точки деления оси  $x$ ,  $\tilde{y}_i$  — точки деления оси  $y$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_M &= x_2, \quad \tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1} = \Delta x_i > 0, \quad \tilde{y}_i = y(\tilde{x}_i), \\ \tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1} &= \Delta y_i, \quad \tilde{y}_0 = y_1, \quad \tilde{y}_M = y_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Приближенный вес  $F_{12}$  отрезка  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  равен суммарному весу тех же элементарных отрезков:

$$F_{12} = \sum_{i=1}^M f(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \sqrt{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1})^2}, \quad (3)$$

где  $\hat{x}_i \in [\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$ ,  $\hat{y}_i = f(\hat{x}_i, y(\hat{x}_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ .

Если функция  $y(x)$  гладкая, то выражение для длины (1)-(2) можно привести к виду

$$D_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (4)$$

а выражение для веса (3) можно привести к виду

$$F_{12} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5)$$

Вес  $F_{12}$  отрезка  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  равен затратам на строительство коммуникации вдоль того отрезка трассы на земной территории, который отображается на  $\tilde{P}$  и затем проектируется на плоскость  $xOy$  в виде отрезка  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ .

Таким образом, задача размещения коммуникации на неоднородной территории свелась к задаче на плоскости. Функция  $f(x, y)$  может быть постоянной, кусочно-постоянной или какой-либо гладкой функцией. В соответствии с этим отрезки минимального веса, соединяющие точки, могут быть прямолинейными, кусочно-линейными или криволинейными.

Если функция гладкая, то длину и конфигурацию отдельного ребра дерева можно найти из решения следующей вариационной задачи:

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (*)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad f(x, y) \geq 0. \quad (**)$$

К сожалению воспользоваться вариационными методами не удастся, так как решить такую задачу аналитическими методами, как правило, не удастся [5].

Холмистую территорию можно задать, например, суммой трехмерных гауссовых кривых

$$f(x, y) = f_0 + \sum_{i=1}^L f_i \exp\left(-\frac{(x-a_i)^2}{\sigma_{x_i}} - \frac{(y-b_i)^2}{\sigma_{y_i}}\right) \quad (6)$$

или суммой конусов (например, прямых круговых)

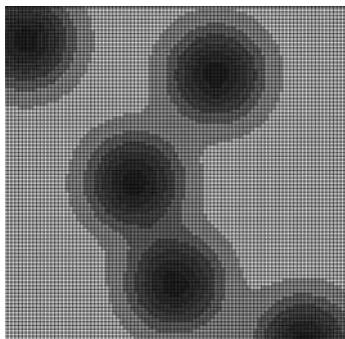
$$f(x, y) = f_0 + \sum_{i=1}^L \frac{f_i}{R_i} \left[ R_i - \left( (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 \right) \right]. \quad (7)$$

В этих выражениях:  $f_0$  — значение удельных строительных затрат на равнине;  $a_i, b_i$  — координаты проекции вершины  $i$ -го холма на плоскость  $xu$ ; параметры  $\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}$  определяют крутизну холма;  $R_i$  — радиус основания конусовидного холма; параметр  $f_i$  определяет высоту холма.

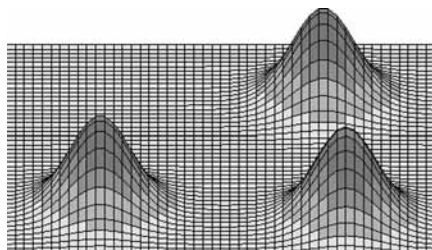
На рис. 1 участок холмистой территории изображен в виде линий уровня, а на рис. 2 — в виде трехмерных холмов.

Часто значения удельных строительных затрат задаются в дискретных точках. Такое представление можно назвать цифровой моделью местности (ЦММ). Вообще говоря, цифровая модель местности — это база данных [6], в которой хранится, по возможности, полный набор параметров в точках территории: высота рельефа, кадастровые данные, прочностные характеристики и т. д. В таком виде цифровая модель местности используется для получения информации, необходимой для выполнения тех или иных работ в данной точке территории. В задаче о размещении транспортных сетей под цифровой моделью местности понимается набор тех параметров территории, которые необходимы для решения задачи. Для этой задачи необходимо только значение удельных строительных затрат в окрестности каждой из выбранных точек территории.

Задачи размещения коммуникаций и транспортных сетей предъявляют определенные требования к цифровой модели местности. Коммуникация как строительный объект отличается пространственной протяженностью. При решении задачи о ее размещении следует исходить из того, что она может



**Рис. 1.** Изображение холмистой территории линиями уровня



**Рис. 2.** Изображение участка холмистой территории

проходить через любую точку заданного участка территории и в каждой точке может иметь любое направление. Затраты на строительство коммуникации определяются ее длиной и значениям удельных строительных затрат в тех точках территории, через которые она проходит. Все это определяет ряд требований к цифровой модели местности, используемой в задаче размещения коммуникаций.

Во-первых, число точек, в которых заданы значения удельных строительных затрат, должно быть достаточно большим, а расстояния между ними — достаточно малым. Во-вторых, цифровая модель местности должна определять как можно большее число направлений, в которых можно прокладывать коммуникацию из данной точки. И наконец, она должна содержать правило, определяющее значение удельных строительных затрат вне точек цифровой модели.

Цифровая модель местности в виде специального графа на плоскости позволяет удовлетворить этим требованиям. Участок земной территории отображается на некоторую область плоскости, а эта область отображается на граф. Предполагается, что точки, которые на земной поверхности связываются сетью, отображаются в некоторые узлы графа, а трассы коммуникаций ищутся в виде путей на этом графе. Таким образом, непрерывная задача размещения транспортной сети на гладкой неоднородной территории сводится к дискретной задаче на графе.

Быстродействие алгоритма и близость решения дискретной задачи размещения коммуникации к решению непрерывной зависит от характеристик графа, на котором ищется дискретное решение: от числа его узлов, расположения узлов на плоскости, локальной степени узлов, общего числа ребер и т. д. Поэтому вопрос конструирования графа при формулировке дискретной задачи как дискретной модели для непрерывной задачи оптимизации сети является одним из важнейших.

Граф строится следующим образом.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат  $xOy$  и сетка, образованная двумя семействами прямых:  $X = \{x_j\}, j = 1, 2, \dots, n_2$  параллельных оси  $Oy$ , и  $Y = \{y_i\}, i = 1, 2, \dots, n_1$ , параллельных оси  $Ox$  (по аналогии со строками и столбцами). Элементы сетки имеют следующие обозначения. Точки пересечения прямых  $x_j$  и  $y_i$  называются узлами сетки и обозначаются через  $v_{ij}$ . Величина  $h = h_x = h_y$ ,  $h_x = x_j - x_{j-1}, j = 2, 3, \dots, n_2$ ,  $h_y = y_i - y_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n_1$  называется шагом сетки, квадрат, образованный пересечением прямых  $x = x_j, x = x_{j-1}$   $y = y_i, y = y_{i-1}$  — ячейкой сетки, часть плоскости, покрытую сеткой, — областью  $S_0$ , прямые  $y = y_1, y = y_{n_1}$  — соответственно нижней и верхней, а прямые  $x = x_1, x = x_{n_2}$  — соответственно левой и правой границами области.

Точки плоскости и узлы сетки могут считаться разными объектами: узлы сетки могут менять свое положение на плоскости (например, при изменении шага сетки), а точки плоскости всегда остаются на своем месте.

Построим на сетке  $S_0$  граф  $H(V, E(Z))$ , у которого множество узлов  $V$  составляют узлы сетки из области  $S_0$ , а множество ребер  $E(Z)$  зависит от целочисленного параметра  $Z$ ,  $0 < Z \leq \max(n_1, n_2)$ , возрастая с ростом  $Z$ . Множество ребер  $E(Z)$  графа  $H(V, E(Z))$  задается правилом, определяющим смежность узлов.

Правило, определяющее смежность узлов, сформулировано с учетом возможных способов решения задачи. Предполагается, что основной операцией алгоритма решения является операция построения пути на графе, использующая алгоритм построения кратчайшего пути. Правило отражает компромисс между точностью решения задачи приближения кратчайшего пути к гладкой кривой и быстродействием алгоритма.

Чем больше локальная степень узлов графа (число узлов, смежных с каждым узлом), тем большее число направлений коммуникации в каждой точке можно реализовать с помощью графа, тем точнее можно решить задачу. В то же время увеличение числа таких узлов приводит к увеличению числа ребер графа и к снижению быстродействия алгоритмов построения кратчайших путей. Эти соображения привели к следующему правилу, задающему смежные узлы, а, следовательно, и локальные степени узлов, и множество узлов графа. Правило содержит два пункта.

1. Для узла  $v_{ij}$  смежные узлы могут лежать только внутри и на сторонах квадрата, центр которого находится в узле  $v_{ij}$ , а стороны лежат на горизонталях и вертикалях сетки, длина стороны равна  $2Zh$ . Поэтому число

узлов, смежных с любым данным узлом, не превосходит  $(2Z + 1)^2 - 1$ . Это ограничение приводит к уменьшению числа ребер графа и направлено на повышение быстродействия алгоритма решения.

2. На любом луче, исходящем из узла  $v_{ij}$ , не должно быть более одного узла, смежного с  $v_{ij}$ . Это ограничение исключает из графа ребра, которые не определяют новое направление. Если на луче нет узла, смежного  $v_{ij}$ , то этот луч не определяет никакого направления коммуникации.

Формально это правило можно записать следующим образом.

Пусть  $v_{ij} \in V$  — узел графа  $H(V, E(Z))$  и  $S_1(v_{ij}), S_2(v_{ij})$  — множества узлов, удовлетворяющих условиям соответственно

$$S_1(v_{ij}) = \{v_{i+k, j+l} : v_{i+k, j+l} \in V, |k| \leq 1, |l| \leq 1, |k| + |l| \neq 0\},$$

$$S_2(v_{ij}) = \{v_{i+k, j+l} : v_{i+k, j+l} \in V, 1 \leq |k| \leq Z, 1 \leq |l| \leq Z, k \text{ и } l \text{ — взаимно простые}\}.$$

Тогда узел  $v_{i+k, j+l} \in V$ , удовлетворяющий условию

$$v_{i+k, j+l} \in \begin{cases} S_1(v_{ij}), & \text{если } Z = 1, \\ S_1(v_{ij}) \cup S_2(v_{ij}), & \text{если } Z > 1, \end{cases} \tag{6}$$

является смежным с узлом  $v_{ij} \in V$ .

На рис. 3 показаны множества узлов графа  $H(V, E(Z))$ , смежных с  $v_{ij}$  для  $Z = 2$  (а) и  $Z = 3$  (б). Центральный узел  $v_{ij}$  показан в виде квадратика, а смежные с ним — в виде кружков.

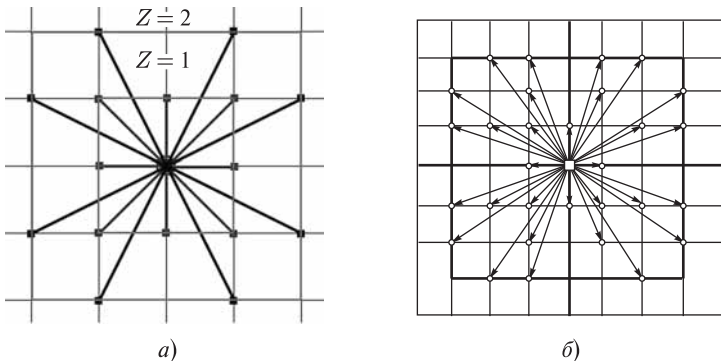


Рис. 3. Квадрат, внутри и на сторонах которого лежат узлы, смежные с узлом  $v_{ij}$  в центре квадрата с длиной стороны  $2Zh$

## Литература

1. *Лотарев Д. Т.* Размещение коммуникаций на неоднородной территории // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 44–52.
2. *Лотарев Д. Т.* Построение цифровой модели местности для территории с равнинным рельефом // Автоматика и телемеханика. 1998. № 8. С. 53–62.
3. *Лотарев Д. Т.* Цифровая модель местности для задачи размещения коммуникаций // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 41–49.
4. *Донгарян Ш. С., Каган Я. М., Горбатилов В. А., Ройзрах И. Б.* Оптимизация систем обустройства нефтяных месторождений. Свердловск: Средне-Уральское книжное издательство, 1976.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: URSS, 1998.
6. *Цветков В. Я.* Геоинформационные системы и технологии. М.: ФиС, 1998.
7. *Форд Л. Р. Фалкерсон Д. Р.* Поток в сетях. М.: Мир. 1966.
8. *Дейкстра Э.* Дисциплина программирования. М.: Мир. 1978.
9. *Емеличев И. А., Мельников В. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука. 1990.
10. *Лотарев Д. Т.* Синтез транспортной сети одного класса методом динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1989. № 2. С. 131–141.
11. *Лотарев Д. Т.* К вопросу построения транспортных сетей на разбуриваемой площади // РНТС «Нефтепромысловое строительство». ВНИИОЭНГ. 1974. № 5. С. 11–15.
12. *Лотарев Д. Т., Уздемир А. П.* Преобразование задачи Штейнера на евклидовой плоскости к задаче Штейнера на графе // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 80–92.