II. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И РАСПРЕДЕЛЕННАЯ СРЕДА

О периодических и близких к ним решениях дифференциальных уравнений*

А. П. Афанасьев[1], С. М. Дзюба[2]

[1] *Институт системного анализа РАН*
[2] *Тамбовский государственный технический университет*

В статье приведены критерии существования обобщенно-периодических решений в автономных и непрерывных периодических системах. Установлена связь между этими критериями и теоремами Пуанкаре—Бендиксона и Массера. Приведена классификация периодических и близких к ним решений дифференциальных уравнений.

Введение

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1, \dots, f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09–01–00655, 07–07–00170) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (№ НШ–5511.2008.9).

на прямом произведении $\mathbb{R}\times\Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, будем считать, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Вопрос о существовании у системы (1) периодических решений весьма важен как для собственно теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений. Подавляющее большинство теорем существования периодических решений так или иначе опирается на различные теоремы о неподвижной точке оператора сдвига (см., например, [1]). Особняком здесь стоят три теоремы, принадлежащие Х. Л. Массера (см. [1–3]). Рассмотрим их подробно.

Утверждение первой теоремы Массера относится к случаю, когда порядок n системы (1) равен единице, и почти очевидно: если система (1) имеет ограниченное решение $\xi(t)$, то она также имеет и периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного единице.

Вторая теорема Массера совсем не тривиальна. Пусть порядок n системы (1) равен двум и каждое решение $\xi(t)$ этой системы определено для всех значений $t \geqslant t_0$. Тогда, если система (1) имеет некоторое решение, ограниченное при этих значениях t, то данная она имеет также и периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного единице.

Третья теорема Массера представляет собой обобщение первых двух теорем на случай систем произвольного порядка, правда, только линейных. Условия теорем Массера, как легко видеть, чрезвычайно просты и элегантны. Вместе с тем, их важность невозможно переоценить, поскольку они имеют характер необходимых и достаточных условий. Именно, отсутствие в указанных системах периодических решений первого рода означает отсутствие также и ограниченных решений.

Возникает естественный вопрос: справедливы ли теоремы Массера в произвольном нелинейном случае и, если нет, какие именно решения будут определять ситуацию типического поведения? Ответ на него занял пятнадцать лет наших исследований. Основные результаты, полученные здесь, изложены в книге [4]. Целью настоящей работы является краткое изложение этих результатов, демонстрирующее все подводные камни, которые пришлось обойти.

1. Попытка обобщения второй теоремы Массера

До недавнего времени считалось, что в произвольном нелинейном случае из существования у системы (1) ограниченного решения следует существование только лишь интегрального инвариантного множества (см., например, [6]). Попытаемся усилить этот результат, доказав многомерный аналог теоремы Массера.

Пусть x_0 — некоторая точка множества Σ и $x_1(t)$ — решение системы (1) с начальными значениями $(0, x_0)$, определенное для всех значений $t \geqslant 0$ и содержащееся при этих значениях t в некотором компактном множестве $E \subset \Sigma$. Для всех значений $t \geqslant 0$ положим

$$x_N(t) = x_1(t + N - 1), \quad N = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2}$$

Легко видеть, что каждая из функций семейства (2) является решением системы (1), определенным для всех значений $t \geqslant 0$ и содержащимся при этих значениях t в множестве E.

В самом деле, решение x_1 удовлетворяет также и интегральному уравнению

$$x_1(t) = x_0 + \int\limits_0^t f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\, d\tau.$$

Более того, в силу периодичности функции f

$$x_1(t) = x_0 + \int\limits_0^1 f\big(\tau, x_1(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_0^{t-1} f\big(\tau, x_1(\tau + 1)\big)\, d\tau =$$
$$= x_2(0) + \int\limits_0^{t-1} f\big(\tau, x_2(\tau)\big)\, d\tau, \quad t \geqslant 1.$$

Поэтому для всех значений $t \geqslant 0$ справедливо равенство

$$x_2(t) = x_2(0) + \int\limits_0^t f\big(\tau, x_2(\tau)\big)\, d\tau.$$

Аналогичным образом, в общем случае

$$x_N(t) = x_N(0) + \int\limits_0^t f\big(\tau, x_N(\tau)\big)\, d\tau, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что по условию множество (2) равномерно ограничено на отрезке $[0, 1]$, а в силу равенства (3) еще и равностепенно непрерывно на $[0, 1]$. Поэтому из него можно выбрать последовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots, \tag{4}$$

пределом которой является функция φ, определенная для всех значений $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. при $N \to \infty$ вдоль множества (4)

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = \varphi(t) \tag{5}$$

равномерно на $[0, 1]$. При этом функция φ целиком содержится в множестве E.

Исключительно для простоты обозначений будем считать, что выбранная последовательность (4) совпадает с множеством (2). Тогда в силу соотношений (3) и (5) несложно заметить, что для всех значений $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau, \tag{6}$$

означающее, что $\varphi(t)$ — решение системы (1).

Заметим теперь, что

$$\lim_{N\to\infty} x_{N+1}(0) = \lim_{N\to\infty} x_N(0).$$

Поэтому из равенств (2), (5) и (6) следует, что

$$\varphi(t) = \varphi(1) + \int\limits_0^t f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau. \tag{7}$$

Последнее, очевидно, означает, что решение $\varphi(t)$ может быть продолжено на всю ось $\mathbb{R}$ и является периодическим решением системы (1) периода, равного единице.

Таким образом, кажущаяся справедливость равенства (7) устанавливает утверждение гораздо более сильное, чем вторая теорема Массера. Именно, если система (1) имеет некоторое решение $\xi(t)$, определенное для всех значений $t \geqslant 0$ и ограниченное при этих значений t, то она также имеет периодическое решение $\varphi(t)$, периода, равного единице. При этом либо само решение $\xi(t)$ является периодическим, либо

$$\lim_{N\to\infty} \xi(t+N) = \varphi(t)$$

равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Последний результат представляется слишком уж большим открытием. Элементарные примеры даже линейных систем второго порядка показывают, что данное утверждение неверно. Более того, известен пример нелинейной системы третьего порядка, все решения которой ограничены, но которая не имеет ни одного периодического решения периода, равного единице (см., например, [4, с. 70–74]). Сказанное означает, что в общем случае теорема Массера также неверна и наш мир устроен не так просто, как хотелось бы.

В чем же дело? Ответ на этот вопрос тривиален. Открыв почти любую книгу по анализу или топологии можно достаточно быстро найти фразы типа «для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность совпадает с исходной последовательностью» или, скажем, «для сокращения письма предположим, что сама подпоследовательность обладает этим свойством».

Обычно это не приводит к недоразумениям. Обычно, но, к сожалению, не всегда...

Совершенная нами ошибка — отождествление множества (2) и последовательности (4), изредка встречается. В качестве примера отметим ситуацию, непосредственно связанную с приведенной выше конструкцией и подробно описанную в [4, с. 157–161]. При этом необходимо отметить, что именно работа над указанной ошибкой в конечном итоге и привела к появлению понятия обобщенно-периодического решения, описывающего ситуацию типического поведения решений системы (1).

2. Обобщенно-периодические решения

Прежде всего, введем следующее

Определение 1. Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \geqslant t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Решение $\varphi(t)$ назовем *обобщенно-периодическим*, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что для всех значений $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t+N)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что простейшим примером обобщенно-периодического решения может служить периодическое решение натурального периода. В качестве несколько менее тривиального примера отметим иррациональную обмотку тора и любое другое почти периодическое решение (см. [4, с. 163]). Существование же обобщенно-периодических решений в общем случае устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t)$ *— решение системы* (1), *определенное для всех значений* $t \geqslant t_0$ *и ограниченное при этих значениях* t. *Тогда, какова бы ни была последовательность*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty, \tag{8}$$

натуральных чисел, найдется такая ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

и такое обобщенно-периодическое решение $\varphi(t)$ *системы* (1), *что*

$$\lim_{l\to\infty} \xi(t + N_{k_l} - 1) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset [t_0, \infty)$ *и*

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в некоторой окрестности T точки t_0 определен оператор сдвига $G(t_0, t)$ по интегральным кривым $x(t)$ системы (1). Этот оператор непрерывен по t во всех точках множества Σ, непрерывно отображает Σ в себя при всех значениях $t \in T$ и (по определению) задается равенством

$$G(t_0, t)x(t_0) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\, d\tau.$$

Пусть x_0 — некоторая точка множества Σ и $x_1(t)$ — решение системы (1) с начальными значениями $(0, x_0)$, определенное для всех значений $t \geqslant 0$ и содержащееся при этих значениях t в некотором компактном множестве $E \subset \Sigma$. Для простоты обозначений положим

$$g^t = G(0, t)$$

и посредством равенства (2) введем в рассмотрение множество функций

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots . \tag{9}$$

Тогда, как несложно заметить, при всех значениях t и N имеет место равенство

$$x_N(t) = g^t \underbrace{(g^1 \ldots g^1)}_{N-1} x_0,$$

которое, как легко видеть, может быть переписано в эквивалентном виде:

$$x_N(t) = g^t x_N(0). \tag{10}$$

Для некоторой последовательности вида (8) выберем из множества (9) последовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots . \tag{11}$$

Так как все функции последовательности (11) содержатся в множестве E, а по условию множество E компактно, то множество (11) ограничено на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, поскольку оператор g^t непрерывен по t, то из равенства (10) следует, что множество (11) равностепенно непрерывно на $[0, 1]$. Поэтому из него можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $[0, 1]$ последовательность

$$x_{N_{k_1}}, x_{N_{k_2}}, \ldots, x_{N_{k_l}}, \ldots , \tag{12}$$

пределом которой является функция φ, определенная для всех значений $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. при $N \to \infty$ вдоль множества (12)

$$\lim_{N \to \infty} x_N(t) = \varphi(t)$$

равномерно на $[0, 1]$.

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная последовательность (12) совпадает с множеством (11)[1]. Поскольку при всех значениях $t \geqslant 0$ оператор g^t непрерывно отображает множество E в себя, заметим, что при $N \to \infty$ вдоль (11)

$$\lim_{N\to\infty} g^t x_N(0) = g^t \varphi_0$$

равномерно на $[0, 1]$, где φ_0 — некоторая точка множества E. Тогда, переходя в (3) к пределу при $N \to \infty$ вдоль множества (11), получим равенство

$$\varphi(t) = g^t \varphi_0,$$

справедливое для всех значений $0 \leqslant t \leqslant 1$ и означающее, что $\varphi(t)$ — решение системы (1) с начальными значениями $(0, \varphi_0)$.

Обозначим через

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \ldots, \Delta(N_k), \ldots \tag{13}$$

множество, элементы которого при всех значениях N_k из множества (8) определим формулой

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k.$$

При этом будем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(N_k) = \infty; \tag{14}$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (13) соответствующие элементы при сохранении его неограниченности[2].

Заметим теперь, что в силу равенства (9) множество (11) равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на всей полуоси $t \geqslant 0$. Поэтому можем считать, что для всех значений $t \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t), \tag{15}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $t \geqslant 0$. Последнее, как несложно заметить, означает, что функция $\varphi(t)$, построенная по формуле (15), является решением системы (1), определенным для всех значений $t \geqslant 0$.

Поскольку для всех значений N_k

$$x_{N_{k+1}}(0) = x_{N_k}\big(\Delta(N_k)\big),$$

то имеем

$$\varphi_0 = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}\big(\Delta(N_k)\big).$$

---

[1] Здесь это уже не приводит к ошибке!

[2] Вот где, очевидно, и была «собака зарыта»: отсутствие периодического решения натурального периода неизбежно влечет за собой равенство (14).

Более того, так как функция φ целиком содержится в компактном множестве E, без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\bigl(\Delta(N_k)\bigr) = \varphi_0^*, \tag{16}$$

где φ_0^* — некоторая точка множества E.

Если

$$\varphi_0 \neq \varphi_0^*,$$

то в силу условий (15) и (16) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0, зависящее от ε, что

$$\bigl|x_{N_k}\bigl(\Delta(N_k)\bigr) - \varphi\bigl(\Delta(N_k)\bigr)\bigr| \geqslant \varepsilon$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \bigl|x_{N_k}\bigl(t+\Delta(N_k)\bigr) - \varphi\bigl(t+\Delta(N_k)\bigr)\bigr| \geqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Из непрерывности функции $g^t x$ по t, x и компактности множества E следует, что множество M функций

$$\varphi(t), \varphi(t+1), \ldots, \varphi(t+N), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$, равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, 1]$. Поэтому замыкание $\overline{M}$ множества M — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, 1]$ множество, еще и равностепенно непрерывное (см., например, [4, с. 140–143]).

Для всех значений $0 \leqslant t \leqslant 1$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}\bigl(t+\Delta(N_k)\bigr), \tag{18}$$

причем в силу равностепенной непрерывности множества (11) на отрезке $[0, 1]$ и компактности множества E можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = \Delta(N_k) + 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда согласно неравенству (17) для всех значений $k > k_0$ справедливо также и неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_k} |x_{N_k}(t) - \varphi(t)| \geqslant \varepsilon.$$

Обозначим через k_1 некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_1 > k_0$. Тогда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_1}} |x_{N_{k_1}}(t) - \varphi(t)| \geqslant \varepsilon.$$

Более того, найдутся такие положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_1}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_1.$$

Тогда, как и ранее,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_2}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| \geqslant \varepsilon,$$

причем найдутся такие положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_2}} |x_{N_{k_3}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_2.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такие последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \qquad \lim_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0,$$

положительных и

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, \qquad \lim_{l\to\infty} k_l = \infty,$$

натуральных чисел, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_l}} |x_{N_{k_l}}(t) - \varphi(t)| \geqslant \varepsilon \tag{19}$$

и

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_l}} |x_{N_{k_{l+1}}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_l. \tag{20}$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}[0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0, \infty)$, а на каждом из этих отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (19) и (20). Поэтому в силу неравенства (17) $x^* \notin \overline{M}$. Последнее, однако, противоречит равенствам (15) и (18). Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = \lim_{k\to\infty} \varphi\bigl(\Delta(N_k)\bigr)$$

и, значит, в силу соотношений (15) и (18) для всех значений $t \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi\bigl(t + \Delta(N_k)\bigr), \tag{21}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b] \subset [0, \infty)$. Но согласно компактности и равностепенной непрерывности множества $\overline{M}$ несложно заметить, что в равенстве (21) равномерная сходимость имеет место на всей полуоси $[0, \infty)$, т. е. $\varphi(t)$ — обобщенно-периодическое решение.

Таким образом, в силу равенства (15) теорема 1 доказана. $\square$

3. Автономный случай

Предположим теперь, что система (1) автономна, т. е.

$$\dot{x} = f(x); \tag{22}$$

здесь $x \in \Sigma$ и f — гладкое векторное поле, определенное в каждой точке множества Σ. Поскольку правая часть системы (22) периодична по t с любым периодом $T > 0$, несколько изменим в автономном случае определение обобщенно-периодического решения.

Определение 2. Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение системы (22), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t. Предположим, что для каждой пары (ε, T) положительных чисел можно указать такое натуральное число N, что для всех значений $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + NT)| < \varepsilon.$$

Тогда будем говорить, что $\varphi(t)$ — *обобщенно-периодическое* решение.

Теорема 2. *Пусть $\xi(t)$ — решение системы* (22), *определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при $t \geqslant 0$, и Ω — ω-предельное множество решения $\xi(t)$. Тогда множество Ω содержит траекторию K, описываемую обобщенно-периодическим решением $\varphi(t)$ системы* (22). *Более полно, для каждого положительного числа T и каждой последовательности натуральных чисел*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty,$$

можно указать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

и такое обобщенно-периодическое решение $\varphi(t)$, что

$$\lim_{l\to\infty} \xi(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$. Аналогичное утверждение имеет место и для решений, ограниченных при $t \leqslant 0$.

Доказательство теоремы 2 весьма близко к доказательству теоремы 1, но значительно более громоздко. По этой причине здесь оно опускается (см., например, [4, с. 146–154]).

Заметим теперь, что в качестве тривиального следствия теоремы 2 и теорем Биркгофа о рекуррентных траекториях и минимальных множествах справедливы следующие теоремы 3 и 4, устанавливающие взаимооднозначную связь между обобщенно-периодическим решением и важнейшими объектами общей теории динамических систем.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(t)$ — решение системы* (22), *определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t, и пусть K — траектория, описываемая этим решением. Оказывается, что K — рекуррентная траектория тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ — обобщенно-периодическое решение.*

Теорема 4. *Каждая траектория K, содержащаяся в компактном минимальном множестве M, является траекторией, описываемой обобщенно-периодическим решением $\varphi(t)$.*

Замечание. Необходимо отметить, что:

1. В силу теоремы 2 определение 2 задает жесткий сценарий поведения решений, не являющихся обобщенно-периодическими. В частности, отсутствие в системе обобщенно-периодических решений влечет за собой отсутствие решений ограниченных и обратно.
2. Определение 2 не использует понятия траектории. Поэтому оно более точно передает характер поведения рекуррентных траекторий, поскольку различные динамические системы могут иметь одинаковые траектории, описываемые качественно различными решениями.
3. Определения 1 и 2 позволяют с единых позиций описать ситуацию типического поведения в непрерывных периодических и динамических системах.

4. Периодические и близкие к ним решения

Теперь рассмотрим наиболее важные виды периодических и близких к ним решений систем (1) и (22). На наш взгляд, в силу результатов, приведенных в книге [4], наиболее полной представляется следующая классификация.

A) *Периодические решения первого рода системы* (1).

B) *Периодические решения второго рода системы* (1).

C) *Периодические решения системы* (22) *фиксированного периода.*

D) *Периодические решения системы* (22) *произвольного периода.*

E) *Условно-периодические решения системы* (22).

F) *Почти периодические решения систем* (1) *и* (22).

G) *Устойчивые по Пуассону решения системы* (22).

H) *Решения системы* (22), *траектории которых рекуррентны.*

I) *Обобщенно-периодические решения систем* (1) *и* (22).

Понятия периодического решения первого и второго рода относятся исключительно к неавтономным системам. Именно, говорят, что $\varphi(t)$ — решение первого рода, если его период равен периоду правой части системы (1). В противном случае $\varphi(t)$ — решение второго рода.

Что касается автономных систем, то здесь правая часть периодична с любым периодом T. Поэтому приходиться различать периодические решения некоторого фиксированного периода T и периодические решения произвольного периода. В первом случае речь идет о циклах — замкнутых траекториях, описываемых периодическими решениями, во втором — о положениях равновесия системы (22).

Наиболее близкими к периодическим являются условно-периодические и почти периодические решения.

Условно-периодическое решение представляет собой объект, порожденный, вообще говоря, иррациональной обмоткой тора. Именно, говорят, что $\xi(t)$ — условно-периодическое решение, если траектория, описываемая им, всюду плотна на торе и ее замыкание является компактным минимальным множеством (см., например, [6]). При этом следует иметь в виду, что некоторые современные источники называют такие решения квазипериодическими (см., например, [7, с. 32]). В связи с этим непонятно, зачем нужно занимать столь общий термин под столь узкое понятие и, тем более, подвергать ревизии А. Н. Колмогорова?

Почти периодические решения содержат в себе все упомянутые выше периодические. Встречаются они достаточно часто и у систем вида (1), и у систем вида (22). Так, например, хорошо известно, что каждое решение линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),$$

ограниченное на всей оси $\mathbb{R}$, является почти периодическим (см., например, [8, с. 400]). В автономном случае почти периодическое решение представляет собой хорошо изученный классический объект общей теории динамических систем. При этом следует помнить, что в отличие от условно-периодических движений существуют почти периодические движения, траектории которых нигде не плотны, например, на соленоиде Виториса и Ван-Данцига (см., например, [4, с. 169–172]).

Как выяснится чуть ниже, краеугольным камнем общей теории динамических систем является решение системы (22), устойчивое по Пуассону. Поскольку в современной литературе это понятие встречается крайне редко, а о Д. Пуассоне[3] уже почти никто не вспоминает, позволим себе привести одно из эквивалентных определений.

Пусть $\xi(t)$ — решение системы (22), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$. Говорят, что $\xi(t)$ *положительно устойчиво по Пуассону*, если найдется такая последовательность

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \tag{23}$$

действительных чисел, что для всех значений $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + t_k) = \xi(t). \tag{24}$$

[3] Разумеется, в смысле устойчивости решений!

Аналогичным образом, говорят, что решение $\xi(t)$ *отрицательно устойчиво по Пуассону*, если найдется такая последовательность вида (4), для которой при $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t - t_k) = \xi(t). \tag{25}$$

И, наконец, решение $\xi(t)$ называется *устойчивым по Пуассону*, если оно одновременно положительно и отрицательно устойчиво.

Замечание. Легко видеть, что сходимость в равенствах (4) и (4), вообще говоря, не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Поэтому из (4) не всегда следует (4) и обратно.

Из приведенного выше определения видно, что каждое непустое компактное α- и ω-предельное множество содержит устойчивые по Пуассону решения. При этом замыкание $\overline{L}$ траектории L, описываемой устойчивым по Пуассону решением $\xi(t)$, не обязано быть минимальным множеством (см., например, [4, с. 180]). Более того, несложно заметить, что каждое почти периодическое решение устойчиво по Пуассону, но не каждое устойчивое по Пуассону решение почти периодично.

Еще одним краеугольным камнем общей теории динамических систем является понятие рекуррентной траектории. Ввиду особой важности этого понятия для дальнейшего анализа, приведем следующее классическое определение Дж. Биркгофа.

Пусть $\varphi(t)$ — решение системы (22), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$, и K — траектория, описываемая этим решением. Траектория K называется *рекуррентной*, если для каждого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число T, что ε-окрестность любой дуги K_T временной длины T траектории K целиком содержит K.

В силу данного определения несложно заметить, что каждая рекуррентная траектория устойчива по Пуассону, но не обратно (см., например, [4, с. 157]). С другой стороны, каждая траектория, описываемая почти периодическим решением, рекуррентна, но не обратно: еще А. Пуанкаре построил пример системы на торе, все траектории которой рекуррентны, нигде не плотны и не являются траекториями, описываемыми почти периодическими движениями (см., например, [4, с. 169]).

Согласно теоремам 3 и 4 определения 2 обобщенно-периодического решения системы (22) и рекуррентной траектории оказываются эквивалентными. При этом определение 2 органичным образом дополняет классическое и, как уже отмечалось ранее, позволяет более точно передать характер решения, траектория которого рекуррентна.

Суммируя сказанное, заметим, что наиболее общим объектом, содержащим в себе все упомянутые периодические и близкие к ним решения системы (22), являются решения, устойчивые по Пуассону. Мы, однако, утверждаем, что ситуацию типического поведения для систем (1) и (22) определяют обобщенно-периодические решения. Почему? Во-первых, согласно теоремам 3 и 4 рекуррентные траектории и обобщенно-периодические решения являют собой те «кирпичики», которые собственно и образуют фундамент α- и ω-предельных множеств системы (22), в том числе даже всех самых странных и самых нерегулярных аттракторов. Во-вторых, в случае системы (1) понятие устойчивости по Пуассону автоматически переходит в понятие обобщенной периодичности.

В самом деле, по аналогии с (4) в силу периодичности функции f представляется уместным говорить, что $\xi(t)$ — *положительно устойчивое по Пуассону* решение системы (1), если найдется такая последовательность вида (8), что для всех значений $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + N_k) = \xi(t). \tag{26}$$

С другой стороны, будем говорить, что решение $\xi(t)$ *отрицательно устойчиво по Пуассону*, если найдется такая последовательность вида (8), для которой при $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t - N_k) = \xi(t). \tag{27}$$

И, наконец, решение $\xi(t)$ системы (1) назовем *устойчивым по Пуассону*, если оно одновременно положительно и отрицательно устойчиво.

Заметим теперь, что в равенствах (4) и (4) сходимость всегда равномерна на всей оси $\mathbb{R}$ (см. [4, с. 230])[4]. Другими словами, в неавтономном случае из (4) всегда следует (4), устойчивость по Пуассону и обратно. Поэтому приведенное выше определение устойчивого по Пуассону решения системы (1) эквивалентно определению 1 обобщенно-периодического решения.

Для полноты картины покажем, что в неавтономном случае также можно говорить о неком компактном минимальном множестве и его связи с обобщенно-периодическими решениями. Для этого рассмотрим некоторое решение $\xi(t)$, определенное для всех значений $t \geqslant 0$. При этих значениях t положим

$$\xi_N(t) = \xi(t + N - 1), \quad N = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{28}$$

Обозначим через F — множество функций вида (4), определенных на отрезке $[0, 1]$. Если решение $\xi(t)$ ограничено при $t \geqslant 0$, то, как легко видеть, замыкание $\overline{F}$ множества F — компактное в топологии равномерной сходимости на отрезке $[0, 1]$ множество, еще и равностепенно непрерывное на этом отрезке. Поэтому, если $\xi(t)$ обобщенно-периодическое решение, то $\overline{F}$ — минимальное множество. Обратно, если $\overline{F}$ — минимальное множество, то в силу теоремы 1 несложно заметить, что $\xi(t)$ обобщенно-периодическое решение (см. [4, с. 227]).

[4] Сказанное, вообще говоря, относится и к автономному случаю.

Таким образом, можно утверждать, что ситуацию типического поведения в системах (1) и (22) определяют обобщенно-периодические решения. По этой причине представляется уместным считать именно обобщенно-периодические решения наиболее общими из решений, близких к периодическим.

Литература

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
2. *Massera J. L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. Vol. 17. P. 457–475.
3. *Рейсинг Р.*, *Сансоне Г.*, *Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1974. 318 с.
4. *Афанасьев А. П.*, *Дзюба С. М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007. 240 с.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 400 с.
6. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 35. № 4. С. 527–530.
7. *Магницкий Н. А.*, *Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
8. *Массера Х. Л.*, *Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.