Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию: задача стабилизации*

А. П. Афанасьев[1], С. М. Дзюба[2], С. М. Лобанов[2]

[1] *Институт системного анализа РАН*
[2] *Тамбовский государственный технический университет*

Приведена теорема существования решений общей задачи стабилизации для нелинейных систем. Показано, что решение этой задачи дается законом управления с обратной связью. Установлена схема последовательных приближений, позволяющая получить этот закон.

Введение

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{1}$$

в котором $x = (x^1, \dots, x^n)$ — n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \dots, u^m)$ — m-мерный действительный вектор управления, A и B — действительные $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, а $f = (f^1, \dots, f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09–01–00655) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (№ НШ–5511.2008.9).

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \tag{2}$$

задано, а задача управления системой (1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \left[\left\langle x(t), Qx(t)\right\rangle + \left\langle u(t), Ru(t)\right\rangle\right] dt + \frac{1}{2}\left\langle x(T), Px(T)\right\rangle, \tag{3}$$

в котором T — фиксированное конечное время, Q и P — положительные полуопределенные $(n \times n)$-матрицы, а R — положительно определенная $(m \times m)$-матрица; последнее, очевидно, определяет задачу (1)–(3) как нелинейную задачу стабилизации (см., например [1]).

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к рассматриваемой задаче весьма затруднено, если только влиянием функции f на систему (1) по каким-либо причинам нельзя пренебречь. При этом весьма важным представляется то обстоятельство, что в линейно-квадратичном случае решение удается получить в виде закона управления с обратной связью. Поэтому для получения оценок решения задачи (1)–(3) обычно используют различные методы, которые в той или иной форме используют линеаризацию и (или) последовательные приближения, позволяющие свести ее к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач (см., например, [2–4]).

Целью настоящей работы является получение решения задачи (1)–(3) в виде закона управления с обратной связью. Для получения искомого решения используется некая процедура, являющаяся модификацией упоминавшихся выше методов последовательных приближений и заключающаяся в создании некоторой специальным образом генерируемой последовательности вспомогательных линейно-квадратичных задач стабилизации.

1. Вспомогательные задачи

Прежде всего, опишем первую (теперь уже классическую) процедуру построения оценок решения нелинейно-квадратичных задач оптимального управления, фактически лежащую в основе последующих построений.

Следуя [3], рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \left[\left\langle x(t), Qx(t)\right\rangle + \left\langle u(t), Ru(t)\right\rangle\right] dt + \frac{1}{2}\left\langle x(T), Px(T)\right\rangle \tag{4}$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x(t_0) = c, \tag{5}$$

где $g = (g^1, \ldots, g^n)$ — нелинейная векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

и

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

Пусть $u_N(t)$, $x_N(t)$ — некоторое N-е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (4), (5). Тогда $(N+1)$-е приближение $u_{N+1}(t)$, $x_{N+1}(t)$ может быть получено как решение вспомогательной задачи о минимизации функционала

$$I_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \left[\langle x(t), Qx(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\right] dt + \frac{1}{2}\langle x(T), Px(T)\rangle \tag{6}$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x_N, u_N) + A_N(t)(x - x_N) + B_N(t)(u - u_N), \quad x(t_0) = c, \tag{7}$$

в котором $A_N(t)$ и $B_N(t)$ — действительные $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, задаваемые равенствами

$$A_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x = x_N(t)\\ u = u_N(t)}} \tag{8}$$

и

$$B_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x = x_N(t)\\ u = u_N(t)}} \tag{9}$$

соответственно.

Задача (6), (7) представляет собой вариант задачи стабилизации для линейной системы и ее решение, как известно, дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'_N(t)\left[h_{N+1}(t) - K_{N+1}(t)x_{N+1}(t)\right], \tag{10}$$

в котором $K_{N+1}(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned}\dot{K}_{N+1}(t) = -K_{N+1}(t)A_N(t) - A'_N(t)K_{N+1}(t) + {}\\ + K_{N+1}(t)B_N(t)R^{-1}B'_N(t)K_{N+1}(t) - Q\end{aligned} \tag{11}$$

с граничным условием

$$K_{N+1}(T) = P, \tag{12}$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -\big[A_N(t) - B_N(t)R^{-1}B'_N(t)K_{N+1}(t)\big]'h_{N+1}(t) + \\ + K_{N+1}(t)\big[g\big(x_N(t), u_N(t)\big) - A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)\big] \quad (13)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = 0 \quad (14)$$

(см., например, [1, с. 699]) [1].

Если построенные выше последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots \quad (15)$$

и

$$u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots \quad (16)$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$, то из (15) и (16) можно выбрать подпоследовательности

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots \quad (17)$$

и

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \ldots, u_{N_k}, \ldots \quad (18)$$

равномерно на $[t_0, T]$ сходящиеся к некоторым непрерывным функциям x^* и u^* соответственно, где

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty.$$

Тогда, если окажется, что последовательность (17) совпадает с последовательностью (15), а последовательность (18) — с последовательностью (16), то, используя соотношения (8)–(14), можно рассмотреть и вопрос о том, будет ли $u^*(t)$ оптимальным управлением в задаче (4), (5).

Заметим теперь, что показать эквивалентность последовательностей (15), (17) и (16), (18) в общем случае совсем непросто. Поэтому в работе [4] была предложена иная вспомогательная задача, более полно учитывающая конкретные особенности задачи (1)–(3).

Следуя [4], для всех значений $N = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала (6) с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N), \quad x(t_0) = c. \quad (19)$$

Для заданных функций x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (6), (19) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'\big[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)\big], \quad (20)$$

[1] Здесь в [1] имеет место очевидная опечатка.

в котором $x_{N+1}(t)$ — решение уравнения (19), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(t_0) = c,$$

$K(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \tag{21}$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \tag{22}$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -\bigl[A - BR^{-1}B'K(t)\bigr]'h_{N+1}(t) + K(t)f\bigl(x_N(t), u_N(t)\bigr) \tag{23}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = 0. \tag{24}$$

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ задано, то соотношения (19)–(24) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях $|c|$ позволяет установить существование решений задачи (1)–(3) и дает эффективную процедуру построения этих решений. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{25}$$

и

$$u_0(t) \equiv -R^{-1}B'K(t)c. \tag{26}$$

2. Существование и структура оптимального управления

Пусть L_2 — множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T — часть множества L_2, такая, что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяющее начальному условию (2). В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема. *Предположим, что*

$$f(0,0) = 0 \tag{27}$$

и

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\u=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\u=0}} = 0. \tag{28}$$

Тогда найдется такое положительное число c_0, что при $|c| < c_0$ задача (1)–(3) имеет решение $x^*(t)$, $u^*(t)$. Более точно, для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'\left[h^*(t) - K(t)x^*(t)\right], \tag{29}$$

где $h^*(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{h}^*(t) = -\left[A - BR^{-1}B'K(t)\right]'h^*(t) + K(t)f\left(x^*(t), u^*(t)\right) \tag{30}$$

с граничным условием

$$h^*(T) = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ и $H(t)$ — решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \left[A - BR^{-1}B'K(t)\right]X, \quad X(t_0) = E$$

и, соответственно,

$$\dot{H} = -\left[A - BR^{-1}B'K(t)\right]'H, \quad H(T) = E,$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица. Тогда при использовании управления (20) уравнение (19) эквивалентно уравнению

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)\left[BR^{-1}B'h_{N+1}(\tau) + f\left(x_N(\tau), u_N(\tau)\right)\right]\,d\tau, \tag{32}$$

а уравнение (23) с граничным условием (24) — уравнению

$$h_{N+1}(t) = \int\limits_{T}^{t} H(t-\tau)K(\tau)f\left(x_N(\tau), u_N(\tau)\right)\,d\tau. \tag{33}$$

Принимая во внимание (33), перепишем уравнение (32) в следующем эквивалентном виде:

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau)\Bigg\{f\left(x_N(\tau), u_N(\tau)\right) + \\ + BR^{-1}B'\int\limits_{T}^{t} H(\tau - s)\left[K(s)f\left(x_N(s), u_N(s)\right)\right]\,ds\Bigg\}\,d\tau.$$

Тогда с учетом (20) система (32), (33) может быть представлена в символической форме

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} \Bigg[f_1\big(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)\big) + \\ + \int_{t}^{T} f_2\big(\tau, s, x_N(s), h_N(s)\big)\, ds \Bigg] d\tau, \tag{34}$$

$$h_{N+1}(t) = \int_{t}^{T} f_3\big(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)\big)\, d\tau, \tag{35}$$

где $f_1 = (f_1^1, \ldots, f_1^n)$, $f_2 = (f_2^1, \ldots, f_2^n)$ и $f_3 = (f_3^1, \ldots, f_3^n)$ — соответствующие векторные функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_l^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f_l^i}{\partial h^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad l = 1, 2, 3$$

в пространстве $[t_0, T] \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть теперь a — некоторое положительное число. Обозначим через Σ множество точек $(t, x, h) \in \mathbb{R}^{1+2n}$, для которых выполнены неравенства

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad |x - c| \leqslant a, \quad |h| \leqslant a, \tag{36}$$

где $|\xi|$ — евклидова длина вектора ξ. Так как Σ — компактное множество, то найдутся такие положительные числа M и L, вообще говоря, зависящие от c, что для всех значений t, x и h, удовлетворяющих условиям (36), при $t_0 \leqslant \tau \leqslant T$ выполнены неравенства

$$|f_l(t, \tau, x, h)| \leqslant M, \quad l = 1, 2, 3 \tag{37}$$

и

$$\left| \frac{\partial f_l^i(t,\tau,x,h)}{\partial x^j} \right| \leqslant L, \quad \left| \frac{\partial f_l^i(t,\tau,x,h)}{\partial h^j} \right| \leqslant L, \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad l = 1,2,3. \tag{38}$$

Обозначим через Ω множество всех непрерывных пар (x, h) функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^n$ и при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяющих условиям

$$|x(t) - c| \leqslant a, \quad |h(t)| \leqslant a, \tag{39}$$

т. е. Ω — множество непрерывных пар (x, h) функций, графики которых лежат в Σ. При этом будем рассматривать часть Ω_T множества Ω, такую, что наряду с неравенствами (39) при $(x, h) \in \Omega_T$ выполнялись бы также неравенства

$$|X(t)c - c| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |x(t) - X(t)c| \leqslant \frac{a}{2} \tag{40}$$

и
$$|h(t)| \leqslant a. \tag{41}$$
Тогда в силу неравенства
$$|x(t) - c| \leqslant |x(t) - X(t)c| + |X(t)c - c|$$
из условий (40) и (41) следуют неравенства (39) и, таким образом, принадлежность пары (x, h) к множеству Ω.

Для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ положим
$$\varphi(t) = \bigl(x(t), h(t)\bigr)$$
и будем говорить, что $\varphi \in \Omega_T$, если $(x, h) \in \Omega_T$. Обозначим через F оператор, задаваемый правыми частями системы (34), (35). Тогда, как легко видеть, если число T достаточно мало, то из принадлежности φ к Ω_T следует принадлежность к Ω_T и функции
$$\varphi^* = F\varphi, \tag{42}$$
где $\varphi^* = (x^*, h^*)$.

В самом деле, для того чтобы функция φ^*, задаваемая соотношением (42), принадлежала к множеству Ω_T, достаточно, чтобы при выполнении условия (40) для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ были выполнены также и неравенства
$$|x^*(t) - X(t)c| \leqslant \frac{a}{2}, \quad |h^*(t)| \leqslant a.$$
Но в силу (34), (35) и (37) имеем
$$|h^*(t)| = \left| \int\limits_t^T f_3\bigl(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\bigr)\, d\tau \right| \leqslant M(T - t_0)$$
и
$$|x^*(t) - X(t)c| = \left| \int\limits_{t_0}^t \left[f_1\bigl(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\bigr) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_t^T f_2\bigl(\tau, s, x(s), h(s)\bigr)\, ds \right] d\tau \right| \leqslant M\bigl((T - t_0) + 1\bigr)(T - t_0).$$
Отсюда следует, что при
$$M\bigl((T - t_0) + 1\bigr)(T - t_0) \leqslant \frac{a}{2} \tag{43}$$
условие, предъявляемое к оператору F в (42), выполнено.

Пусть теперь $\varphi = (x, h)$ и $\psi = (y, g)$ — некоторые две функции, принадлежащие к множеству Ω_T. Тогда при выполнении неравенства (43) функции

$$\varphi^* = F\varphi \qquad \text{и} \qquad \psi^* = F\psi$$

также принадлежат Ω_T, где

$$\varphi^* = (x^*, h^*) \quad \text{и} \quad \psi^* = (y^*, g^*).$$

При этом оказывается, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leqslant k\|\varphi - \psi\|, \tag{44}$$

где

$$\|\varphi\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi(t)|$$

и k — некоторое положительное число, не зависящее от φ и ψ и при всех достаточно малых значениях $T > t_0$ удовлетворяющее условию

$$k < 1. \tag{45}$$

В самом деле, в силу неравенств (38) и формулы Лагранжа для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $t_0 \leqslant \tau \leqslant T$

$$\begin{aligned} \big|f_l\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_l\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big)\big| \leqslant \\ \leqslant n^2 L\big(|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)|\big), \quad l = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{46}$$

(см., например, [7, с. 163]). Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_t^T \big[f_3\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_3\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big)\big]\, d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant n^2 L \left[\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau + \int_t^T |h(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \right]. \end{aligned} \tag{47}$$

Но

$$\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau \tag{48}$$

и

$$\int_t^T |h(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau. \tag{49}$$

Тогда, если

$$h^*(t) = \int_t^T f_3\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big)\, d\tau$$

и

$$g^*(t) = \int_t^T f_3\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big)\, d\tau,$$

то из неравенств (47)–(49) следует, что

$$\|h^* - g^*\| \leqslant 2n^2 L(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \tag{50}$$

С другой стороны, в силу неравенства (46)

$$\Bigg| \int_{t_0}^{t} \Bigg\{ f_1\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) - f_1\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) +$$

$$+ \int_t^T \big[f_2\big(\tau, s, x(s), h(s)\big) - f_2\big(\tau, s, y(s), g(s)\big)\big]\, ds \Bigg\}\, d\tau \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant n^2 L \int_{t_0}^{t} \Bigg[|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)| +$$

$$+ \int_t^T \big(|x(s) - y(s)| + |h(s) - g(s)|\big)\, ds \Bigg]\, d\tau. \tag{51}$$

Но

$$\int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau \tag{52}$$

и

$$\int_{t_0}^{t} |h(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\, d\tau. \tag{53}$$

Тогда, если

$$x^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} \left[f_1\big(t, \tau, x(\tau), h(\tau)\big) + \int_t^T f_2\big(\tau, s, x(s), h(s)\big)\, ds \right] d\tau$$

и

$$y^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} \left[f_1\big(t, \tau, y(\tau), g(\tau)\big) + \int_t^T f_2\big(\tau, s, y(s), g(s)\big)\, ds \right] d\tau,$$

то из неравенств (51)–(53) и (48), (49) следует, что

$$\|x^* - y^*\| \leqslant 2n^2 L\big((T - t_0) + 1\big)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \tag{54}$$

При этом, согласно неравенству треугольника, несложно заметить, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leqslant \|x^* - y^*\| + \|h^* - g^*\|. \tag{55}$$

Поэтому, объединяя неравенства (50), (54) и (55), окончательно получаем, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leqslant 4n^2 L\big((T - t_0) + 1\big)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|.$$

Таким образом, если

$$4n^2 L\big((T - t_0) + 1\big)(T - t_0) < 1, \tag{56}$$

то, полагая

$$k = 4n^2 L\big((T - t_0) + 1\big)(T - t_0),$$

видим, что при выполнении условия (56) выполнены также и условия (44) и (45). Но в силу равенств (27) и (28)

$$\lim_{|c|\to 0} M(c) = 0$$

и

$$\lim_{|c|\to 0} L(c) = 0,$$

т. е. согласно (37) и (38) существует такое положительное число c_0, что при $|c| < c_0$ числа M и L удовлетворяют условиям (43) и (56) соответственно, что обеспечивает выполнение требований, предъявляемых к (43)–(45). Поэтому везде в дальнейшем будем считать величину $|c|$ столь малой, что неравенства (43) и (56) выполнены.

Для всех значений $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $N = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\varphi_N(t) = \big(x_N(t), h_N(t)\big)$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots, \tag{57}$$

определенных и непрерывных на отрезке $[t_0, T]$, в силу системы (34), (35) приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{58}$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, 0). \tag{59}$$

Поскольку функция (59) принадлежит к множеству Ω_T, то согласно равенству (58) все функции последовательности (57) также принадлежат к Ω_T. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi, \tag{60}$$

в котором в силу условий (44), (45) F является сжимающим оператором, отображающим множество Ω_T в себя. Поэтому уравнение (60) имеет на множестве Ω решение единственное φ^*, которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \tag{61}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$ (см., например, [7, с. 167]). Но согласно (59) последовательность (58) удовлетворяет начальным приближениям (25) и (26). Поэтому из равенств (20) и (61) следует существование функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$, построенных по формулам

$$\lim_{N\to\infty} u_N(t) = u^*(t) \tag{62}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = x^*(t), \tag{63}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$. Поэтому функция $x^*(t)$ является соответствующим $u^*(t)$ решением уравнения (1) с начальным условием

$$x^*(t_0) = c.$$

При этом уравнение (23) с граничным условием (24) переходит в уравнение (30) с граничным условием (31), а закон управления (20) — в (29). Более того, по построению

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*)$$

и

$$J_N(u_N) \leqslant J_N(u)$$

для всех $u \in L_2^T$, откуда и следует, что для каждой функции $u \in L_2^T$

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*) \leqslant \lim_{N\to\infty} J_N(u),$$

т. е. $u^*(t)$ — оптимальное управление в задаче (1)–(3).

Таким образом, теорема доказана. □

Замечание. Необходимо отметить, что автономность системы (1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе фактически нигде не используется и приняты исключительно для простоты обозначений. В любом случае решение задачи (1)–(3) может быть найдено из тривиального решения вспомогательных линейно-квадратичных задач по формулам (62), (63), а существование решения и предельного перехода по построению гарантировано.

Литература

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. *Ли Л. Р., Маркус Л.* Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.

4. *Afanas'ev A. P.*, *Dzyuba S. M.*, *Lobanov S. M.*, *Tyutyunnik A. V.* Successive approximation and suboptimal control of systems with separeted linear part // Appl. Comp. Math. 2003. Vol. 2. № 1. P. 48–56.
5. *Afanas'ev A. P.*, *Dzyuba S. M.*, *Lobanov S. M.*, *Tyutyunnik A. V.* On a suboptimal control of nonlinear systems via quadratic criteria // Appl. Comp. Math. 2004. Vol. 3. № 2. P. 158–169.
6. *Красовский А. А.* Математическая и прикладная теория: Избр. тр. М.: Наука, 2002.
7. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.