

Сигал А.В.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Введение

Задачу выбора портфеля оптимальной структуры [18, 19] можно интерпретировать как частный случай задачи оптимального распределения ресурсов, для решения которой применение теории игр можно считать традиционным. Как показано в [3, 10, 11], при теоретико-игровом моделировании задачи выбора портфеля оптимальной структуры в поле различных информационных ситуаций (ИС) эффективный портфель можно найти на основании решения матричной игры. В этом случае значения компонент оптимальной стратегии первого игрока следует воспринимать как значения долей, в которых инвестору следует распределить имеющиеся средства между соответствующими активами. Но вектор $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$, характеризующий оптимальную смешанную стратегию первого игрока, не всегда задает структуру эффективного портфеля.

Соответствующую игру можно трактовать как статическую, в которой первый игрок является лицом, принимающим решения (ЛПР), активно и осмысленно выбирающим свои стратегии, а второй - «природой» (экономической средой). «Природа» случайным образом оказывается в одном из своих состояний. Далее будем считать, что функционал оценивания $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ статической игры обладает положительным ингредиентом $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+$, т. е. ЛПР стремится максимизировать значения оценок принятых решений. В рамках данного исследования эту статическую игру можно считать равносильной парной матричной игре с нулевой суммой, платежная матрица которой совпадает с матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$.

Цель данного исследования - построение теоретико-игровых моделей

задачи оптимизации структуры портфеля в поле различных ИС.

Постановка проблемы

Пусть $\mathbf{R}_i$ - случайная величина (СВ), характеризующая норму прибыли i -го актива; r_{ij} - значение нормы прибыли i -го актива, когда экономическая среда оказалась в j -м состоянии; q_j - вероятность j -го состояния экономической среды. Математическое ожидание m_i , дисперсия σ_i^2 и среднеквадратичное отклонение σ_i вычисляются по формулам:

$$m_i = \mathbf{M}(\mathbf{R}_i) = \sum_{j=1}^n (r_{ij} \cdot q_j); \quad (1)$$

$$\sigma_i^2 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{R}_i^2) - m_i^2 = \sum_{j=1}^n (r_{ij}^2 \cdot q_j) - m_i^2; \quad (2)$$

$$\sigma_i = \sigma(\mathbf{R}_i) = \sqrt{\mathbf{D}(\mathbf{R}_i)}. \quad (3)$$

Норму прибыли портфеля $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_k)$ характеризует СВ

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^k (\mathbf{R}_i \cdot x_i), \text{ для которой} \quad r_j = \sum_{i=1}^k (r_{ij} \cdot x_i); \quad (4)$$

$$m_x = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x) = \sum_{j=1}^n (r_j \cdot q_j) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i); \quad (5)$$

$$c_{il} = \text{cov}(\mathbf{R}_i; \mathbf{R}_l) = \mathbf{M}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_l) - m_i \cdot m_l = \sum_{j=1}^n (r_{ij} \cdot r_{lj} \cdot q_j) - m_i \cdot m_l; \quad (6)$$

$$\sigma_x^2 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x^2) - m_x^2 = \sum_{j=1}^n (r_j^2 \cdot q_j) - m_x^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot x_i \cdot x_l); \quad (7)$$

$$\sigma_x = \sigma(\mathbf{R}_x) = \sqrt{\mathbf{D}(\mathbf{R}_x)}. \quad (8)$$

Согласно современной теории портфеля ЛПР (инвестор), управляя значениями долей x_i активов (т. е. структурой портфеля), стремится максимизировать значение математического ожидания (5) и минимизировать риск портфеля, выраженный, например, дисперсией (7). Таким образом, имеем задачу двухкритериальной оптимизации:

$$m_x = M(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}; \quad (9)$$

$$\sigma_x^2 = D(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot x_i \cdot x_l) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1; \quad (11)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (12)$$

Задача (9)-(12) - это задача оптимизации структуры портфеля среди портфелей допустимых в модели Марковица, а задача (9)-(11) - в модели Блека. Эффективными портфелями называют портфели, структуры которых задают векторы, оптимальные по Парето в соответствующей задаче.

Для оптимизации структуры портфеля можно применять разные подходы. Например, если известны значения всех элементов r_{ij} и имеет место первая ИС [12, с. 13], когда известны значения всех вероятностей q_j , (при этом величины (1)-(3), (6) - константы), то для решения задачи (9)-(12) можно применять любой из известных подходов решения задачи многокритериальной оптимизации. В этом случае можно применить и теоретико-игровой подход. В связи с этим возникают несколько вопросов. Какие матрицы могут выступать в роли платежных матриц? Каким требованиям должна удовлетворять соответствующая игра, чтобы ее решение задавало структуру эффективного портфеля? Какими особенностями будет обладать эффективный портфель, структура которого найдена на основе применения теории игр? В каких случаях применение теоретико-игровой оптимизации структуры портфеля наиболее целесообразно?

Кроме того, может иметь место ИС, когда значения вероятностей q_j неизвестны, а величины (1)-(3), (6) - функции n переменных $q_1, \dots, q_n$. Ведь на практике законы распределения СВ $\mathbf{R}_i$, характеризующих нормы прибыли активов, неизвестны и приходится применять методы математической статистики. В качестве значений r_{ij} , где $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, принимают значения норм прибыли активов, наблюдавшиеся в прошлые периоды времени, при этом вероятности состояний экономической среды в формулах (1), (2), (5)-(7) принято считать равными между собой:

$$q_1 = \dots = q_n = \frac{1}{n}.$$

Наконец, при оптимизации структуры портфеля среди активов могут присутствовать такие, которые недавно появились на рынке, поэтому для части активов значения их норм прибыли могут оказаться известными не для всех периодов времени, а матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ известна частично.

Нерешенные части проблемы

Теории игр и ее применению в экономических теории и практике посвящена обширная литература, в частности, работы [1 - 4, 6 - 12, 14 - 17]. Однако вопросы теоретико-игровой оптимизации структуры портфеля изучены мало, а вопросы теоретико-игровой оптимизации структуры портфеля в условиях неопределенности, конфликтности и порожденно-го ими экономического риска (ЭР) практически не изучены.

Необходимо классифицировать игры с неполной информацией по степени неопределенности и выработать подходы к их решению. Желательно, чтобы такая классификация игр позволила применять теорию парных матричных игр с нулевой суммой к решению задачи выбора структуры портфеля в поле различных ИС. Это, прежде всего, желательно в связи с тем, что теория парных матричных игр с нулевой суммой является наиболее разработанной частью теории игр, а моделирование ситуаций принятия управленческих решений при помощи парных матричных игр с нулевой суммой позволяет учесть такие присущие экономике атрибуты, как конкуренция, противоречивость, конфликтность и порожденный ими ЭР. Это особенно важно в условиях, когда нецелесообразно рисковать: например, в условиях кризиса, в предкризисные периоды и/или в условиях, когда конкуренты обладают существенным влиянием и активно противодействуют достижению целей, поставленных перед собой самим ЛПР.

Постановка задачи

Поскольку парная матричная игра с нулевой суммой ориентирует на наиболее осторожное поведение, то следует ожидать, что теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля позволяет найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, т. е. вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_k^*)$, являющийся решением задачи однокритериальной минимизации (10)-(12). Этот портфель всегда является эффективным.

Далее будут сформулированы две теоремы о теоретико-игровой опти-

мизации структуры портфеля в поле первой ИС. Полные доказательства этих утверждений приведены, например, в работе [10]. Затем будут сформулированы теоретико-игровые модели задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле других ИС. Это, в частности, потребует введения понятия антагонистической игры, заданной в условиях неполной информации, а также классификации таких игр.

Классическая модель Марковица

Как отмечалось выше, если известны значения всех элементов r_{ij} и имеет место первая ИС, когда известны значения всех вероятностей q_j и величины (1)-(3), (6) - константы, то для решения задачи (9)-(12) можно применить теоретико-игровой подход. При этом в одном случае в качестве платежной матрицы игры выступает матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, где r_{ij} - j -е значение нормы прибыли i -го актива, а в другом случае - ковариационная матрица $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$, где ковариации c_{il} вычисляются по формуле (6).

Теорема 1. Пусть в парной матричной игре с нулевой суммой, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, где r_{ij} - j -е значение нормы прибыли i -го актива, отсутствует седловая точка, т. е. справедливо неравенство $\alpha = \max_i \min_j r_{ij} < \min_i \max_j r_{ij} = \beta$, и все чистые стратегии второго игрока являются его активными стратегиями. Тогда оптимальная стратегия первого игрока $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ - это решение задачи (10)-(12), т. е. $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$.

Активность j -й чистой стратегии второго игрока означает, что найдется хотя бы одна его оптимальная стратегия $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \dots; q_n^*)$ такая, что $q_j^* > 0$. По теореме о дополняющей нежесткости [4, с. 60 - 61], если j -я чистая стратегия второго игрока - это его активная стратегия, то для любой оптимальной стратегии $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ первого игрока справедливо $r_j^* = \sum_{i=1}^k (r_{ij} \cdot p_i^*) = V_{\mathbf{R}}^*$, где $V_{\mathbf{R}}^* = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (r_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_j^*)$ - цена парной матричной игры с нулевой суммой, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$.

Если все чистые стратегии второго игрока - это его активные стратегии, то $r_j^* = \sum_{i=1}^k (r_{ij} \cdot p_i^*) = V_{\mathbf{R}}^* = \text{const}$, $j = \overline{1, n}$, т. е.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{p}}^* = \sum_{i=1}^k (\mathbf{R}_i \cdot p_i^*) = V_{\mathbf{R}}^* = \text{const} \text{ и } \mathbf{D}(\mathbf{R}_{\mathbf{p}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0.$$

Так как $\mathbf{D}(\mathbf{R}_x) \geq 0$, а при соблюдении условий теоремы 1 $\min \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = 0 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_p^*)$, поэтому вектор $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$ задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, точнее, портфеля, лишенного несистематического риска.

Теорема 2. Пусть в парной матричной игре с нулевой суммой, заданной матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$, где c_{il} - ковариации (6), отсутствует седловая точка, т. е. справедливо $\alpha = \max_i \min_l c_{il} < \min_l \max_i c_{il} = \beta$, и все чистые стратегии игроков - это их активные стратегии. Тогда для оптимальных стратегий игроков $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$, $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \dots; q_k^*)$ имеем $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^*$, при этом вектор $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^*$ - это решение задачи (10)-(12), т. е. $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^* = \mathbf{q}^*$.

При соблюдении требований Теоремы 2 $\min_x \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = \mathbf{D}(\mathbf{R}_p^*) = V_C^*$, где $V_C^* = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot p_i^* \cdot q_l^*) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot p_i^* \cdot p_l^*)$ - цена парной матричной игры с нулевой суммой, заданной матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{il})$.

Обобщенная модель Марковица при неизвестных вероятностях состояний «природы»

Пусть теперь известны значения всех элементов r_{ij} и имеет место четвертая ИС [12, с. 13], когда ничего неизвестно о значениях вероятностей q_j . В поле четвертой ИС задачу выбора структуры эффективного портфеля можно представить как задачу трехкритериальной оптимизации:

$$\mathbf{H}(q_1; \dots; q_n) = -\sum_{j=1}^n (q_j \cdot \ln q_j) \rightarrow \max_{\mathbf{q}}; \quad (13)$$

$$m_x = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}; \quad (14)$$

$$\sigma_x^2 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot x_i \cdot x_l) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}; \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1; \quad (16)$$

$$q_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1; \quad (18)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (19)$$

Задачу (13)-(19) можно привести к классической модели Марковица: при соблюдении условий (16), (17) энтропия (13) достигает максимального значения для $q_1 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$. Для решения задачи (13)-(19) применим теоретико-игровой подход: при соблюдении требований теоремы 1 выполняется $\min_{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = 0 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_p^*)$ и вектор $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_k^*)$, характеризующий оптимальную стратегию первого игрока, задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, т. е. портфеля, лишённого несистематического риска для всех распределений вероятностей $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_n)$.

Обобщенная модель Марковица при активном противодействии «природы»

Пусть теперь известны значения всех элементов r_{ij} и имеет место пятая ИС [12, с. 13], когда неизвестны значения всех вероятностей q_j состояний экономической среды, но экономическая среда - это злонамеренный противник. Эта ИС наиболее адекватно отражает ситуации, когда ЛПП нецелесообразно рисковать: например, в кризисные и предкризисные периоды. В поле пятой ИС задачу выбора структуры эффективного портфеля можно представить как задачу трехкритериальной оптимизации:

$$m_x = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{q}}; \quad (20)$$

$$m_x = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}; \quad (21)$$

$$\sigma_x^2 = \mathbf{D}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (c_{il} \cdot x_i \cdot x_l) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}; \quad (22)$$

при соблюдении ограничений (16)-(19).

Если отбросить (22) и учесть (1), задача (20)-(21) - это задача поиска седловой точки функции $m_x = \mathbf{M}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^k (m_i \cdot x_i) = \sum \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (r_{ij} \cdot x_i \cdot q_j)$ с ограничениями (16)-(19), что эквивалентно решению парной матричной игры с нулевой суммой, заданной матрицей

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$. В поле пятой ИС при соблюдении условий теоремы 1 возможно применение этой теоремы.

Обобщенная модель Марковица в условиях неопределенности и риска

Пусть теперь известны значения не всех элементов r_{ij} , где r_{ij} - j -е значение нормы прибыли i -го актива, В этом случае также возможна теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля. Однако следует уточнить сущность термина «антагонистическая игра, заданная в условиях неполной информации», который применяется уже более полувека [14 - 17]. В работе [9] приведено следующее определение.

Определение 1. Антагонистической игрой, заданной в условиях неполной информации, будем называть модификацию парной матричной игры с нулевой суммой, обладающей следующими особенностями:

- множество чистых стратегий первого игрока $\{1; 2; \dots; k\}$ известно;
- множество чистых стратегий второго игрока $\{1; 2; \dots; n\}$ известно;
- платежная матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ известна частично, т. е. имеется хотя бы один элемент r_{ij} , истинное значение которого неизвестно.

Применение антагонистических игр, заданных в условиях неполной информации, позволяет лучше учесть неопределенность, конфликтность и порожденный ими ЭР. Следовательно, на основе применения игр с неполной информацией возможно более качественное управление риском, чем управление им на основании применения игр с полной информацией. Кроме того, применение игр с неполной информацией расширяет возможности и сферу применения теории игр в экономических исследованиях.

Дадим определение ИС и приведем их классификацию. Эта классификация подобна классификации ИС Р. И. Трухаева для характеристики уровня неопределенности выбора «природой» своих состояний [12, с. 13].

Определение 2. Для антагонистической игры, заданной в условиях неполной информации, под ИС $\mathbf{I}_l$ будем понимать определенную степень градации, характеризующую неопределенность значений части элементов r_{ij} частично заданной платежной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$.

Классификацию ИС можно представить в следующем виде [9]:

- $\mathbf{I}_1$ - все неизвестные элементы - заданные СВ;
- $\mathbf{I}_2$ - все неизвестные элементы - заданные функции;
- $\mathbf{I}_3$ - все неизвестные элементы заданы своими ограничениями;

I_4 - для всех неизвестных элементов нет математической информации;

I_5 - все неизвестные элементы принимают наихудшие для ЛПР значения;

I_6 - все неизвестные элементы принадлежат заданному нечеткому множеству [5, 20], т. е. представляют собой нечеткие переменные;

I_7 - смешанная ИС.

Заметим, что только в поле ИС I_4 нельзя, чтобы были неизвестны значения всех элементов r_{ij} платежной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, так как в этом случае формализация антагонистической игры, заданной в условиях полной неопределенности, теряет смысл.

Один из способов решения антагонистической игры, заданной в условиях неполной информации, - это приведение ее к одной или нескольким антагонистическим играм, заданным в условиях полной информации, когда вместо неизвестных элементов следует подставить одно или несколько наиболее типичных значений. Для оценки неизвестных значений элементов платежной матрицы возможно использование методов интерполирования, экстраполирования, регрессионного анализа. Для окончательного выбора оптимального решения такой игры может потребоваться применение методов исследования операций, распознавания образов и теории ожидаемой полезности.

Выводы

1. Поиск структуры эффективного портфеля в классической модели Марковица возможен на основе теоретико-игрового подхода. Если элементы платежной матрицы - это значения норм прибыли активов, а все чистые стратегии второго игрока - его активные стратегии, то оптимальная смешанная стратегия первого игрока задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, а точнее, портфеля, полностью лишённого несистематического риска. Если платежная матрица игры совпадает с ковариационной матрицей и все чистые стратегии игроков являются их активными стратегиями, то оптимальные смешанные стратегии совпадают и задают структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска.
2. При соблюдении определенных требований для решения задач квадратичного программирования определенного типа возможен теоретико-игровой подход.
3. Теоретико-игровой подход позволяет обобщить модель Марковица

на случай, когда неизвестны вероятности состояний экономической среды, и на случай, когда экономическая среда активно противодействует достижению целей инвестора.

4. Применение теоретико-игровой оптимизации структуры портфеля возможно и в случае, когда истинные значения части необходимых значений норм прибыли активов неизвестны. Применение в таких случаях антагонистических игр, заданных в условиях неполной информации, и введенной классификации ИС позволяют, с одной стороны, лучше учитывать такие присущие экономике явления, как конкуренция, конфликтность, противоречивость, неопределенность и порожденный ими ЭР, а, с другой стороны, позволяет использовать аппарат парных матричных игр с нулевой суммой.

5. Одним из способов решения антагонистической игры, заданной в условиях неполной информации, может быть приведение ее к одной или нескольким антагонистическим играм, заданным в условиях полной информации, когда вместо неизвестных элементов следует подставить одно или несколько наиболее типичных значений. Для оценки значений элементов возможно использование методов интерполирования, экстраполирования, регрессионного анализа.

6. Поиск оптимального решения антагонистической игры, заданной в условиях неполной информации, может включать решение нескольких антагонистических игр, заданных в условиях полной информации. Для окончательного выбора оптимального решения такой игры может потребоваться применение методов исследования операций, распознавания образов и теории ожидаемой полезности.

7. Применение теоретико-игровой оптимизации структуры портфеля наиболее целесообразно, когда инвестор должен придерживаться наиболее осторожной стратегии: например, в предкризисные или кризисные периоды и/или когда конкуренты обладают значительной мощностью и активно противодействуют достижению целей инвестора.

Литература

1. Блекуэлл Д. Теория игр и статистических решений / Д. Блекуэлл, М. А. Гиршик; пер. с англ. И. В. Соловьева. - М.: ИЛ, 1958. - 318 с.
2. Вальд А. Последовательный анализ / А. Вальд; пер. с англ. П. А. Бакута. - М.: Физматгиз, 1960. - 328 с.
3. Вітлінський В. В. Економічний ризик: ігрові моделі: Навчальний посібник / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний. - К.: КНЕУ, 2002. - 446 с.

4. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. - М.: Наука, 1985. - 272 с.
5. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде; пер. с англ. Н. И. Ринго. - М.: Мир, 1976. - 168 с.
6. Льюис Р. Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р. Д. Льюис, Х. Райфа; пер. с англ. И. В. Соловьева. - М.: ИЛ, 1961. - 642 с.
7. Нейман Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн; пер. с англ. под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. - М.: Наука, 1970. - 708 с.
8. Петросян Л. А. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. - М.: Высш. шк., 1998. - 304 с.
9. Сигал А. В. Антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности / А. В. Сигал, В. Ф. Блыщик // Экономическая кибернетика: Международный научный журнал. - 2005. - № 5-6 (35-36). - С. 47-53.
10. Сигал А. В. Основы современной теории портфеля ценных бумаг: Учеб. пособие / А. В. Сигал. - Симферополь: КЭИ КНЭУ, 2000. - 60 с.
11. Сігал А. В. Застосування теорії ігор щодо теорії портфеля / А. В. Сігал // Машинна обробка інформації. - 1998 - Вип. 61. - С. 154-160.
12. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. - М.: Наука, 1981. - 258 с.
13. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн; пер. с англ. В. Н. Воробьевой, А. Я. Кируты. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
14. Харшанья Дж. Общая теория выбора равновесия в играх / Дж. Харшанья, Р. Зельтен; пер. с англ. под ред. Н. А. Зенкевича. - СПб.: Экономическая школа, 2001. - 424 с.
15. Aumann R. J. Repeated Game with Incomplete Information / R. J. Aumann, M. Maschler. - Cambridge: MIT Press, 1995. - 360 pp.
16. Harsanyi J. C. A New Theory of Equilibrium Selection for Games with Incomplete Information / J. C. Harsanyi // Games and Economic Behavior. - 1995. - Vol. 10 (2) - P. 318 - 332.
17. Harsanyi J. C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players. Parts I - III / J. C. Harsanyi // Management Science. - 1967 - 1968. - No. 14. - P. 159 - 182, 320 - 334, 486 - 502.
18. Markowitz H. M. Portfolio Selection / H. M. Markowitz // Journal of Finance. - March, 1952. - Vol. 7. No. 1. - P. 77 - 91.
19. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments / H. M. Markowitz. - N. Y.: John Wiley & Sons, 1959. - 384 pp.
20. Zadeh L. A. Fuzzy Sets / L. A. Zadeh // Information and Control. - 1965. - Vol. 8. - P. 338 - 353.